Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Чупрунов, О сходимости случайных ломаных с нормировками типа Стьюдента, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 914–919

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3282>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 02:11:26

© 1996 г.

ЧУПРУНОВ А. Н.*

О СХОДИМОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ЛОМАНЫХ С НОРМИРОВКАМИ ТИПА СТЬЮДЕНТА¹⁾

Приведены условия, обеспечивающие сходимость случайных ломаных и случайных ступенчатых функций, определенных суммами независимых случайных величин с нормировками типа Стьюдента к винеровскому процессу и p -устойчивому случайному процессу с независимыми приращениями. Особое внимание уделено случаю, когда рассматриваемые случайные величины являются наблюдениями случайного процесса в случайные моменты времени.

Ключевые слова и фразы: суммы независимых случайных величин, сходимость по распределению, винеровский процесс, однородный случайный процесс с независимыми приращениями.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство, $(T, \mathcal{B})$ — измеримое пространство, $X_n(t)$, $t \in T$, $n \in \mathbb{N}$, — случайные процессы, определенные на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и измеримые как функции двух аргументов относительно произведения σ -алгебр $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Обозначим через X_{ni} , $i, n \in \mathbb{N}$, независимые копии X_n . Пусть ξ и ξ_n , $n \in \mathbb{N}$, — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в $(T, \mathcal{B})$, определенные на другом вероятностном пространстве $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$.

В [1] получены условия сходимости по распределению сумм и максимумов от случайных величин $X_{ni}(\xi_i(\omega_1))$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$. В [2] изучаются обобщения результатов [1] на случайные процессы X_{ni} , принимающие значения в банаховом пространстве. В [3] изучается сходимость эмпирических случайных процессов, определенных случайными величинами $X_{ni}(\xi_i(\omega_1))$. Здесь мы продолжим эти исследования.

Случайные величины $X_{ni}(\xi_i(\omega_1))$ возникают в некоторых задачах, связанных с применениями теории вероятностей. Рассмотрим, например, выборку из m работников цеха. С k -м работником из этой выборки связывается пара чисел (x_k, t_k) , где x_k — числовая характеристика рассматриваемого параметра здоровья, а t_k — число лет, проработанных работником в этом цехе. Пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, — случайный процесс, описывающий эволюцию этого параметра здоровья у работников цеха ($X(t)$ — случайная величина, характеризующая параметр здоровья у людей, проработавших ровно t лет в этом цехе). Тогда числа x_k можно рассматривать как наблюдения случайного процесса $X(t)$ в случайные моменты времени t_k , $1 \leq k \leq m$. Итак, наша задача свелась к изучению случайного процесса $X(t)$ по наблюдениям (x_k, t_k) , $1 \leq k \leq m$. При этом мы считаем, что t_k — независимые наблюдения одной и той же случайной величины ξ .

Пусть D — подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$, L — некоторое линейное пространство функций на D , наделенное метризуемой топологией, $H(y)$, $H_n(y)$, $y \in D$, — случайные процессы, почти все траектории которых принадлежат L . Говорят, что процессы $H_n(y)$ сходятся по распределению к процессу $H(y)$ в L (и обозначают $H_n \xrightarrow{d} H$, $n \rightarrow \infty$), если распределения случайных процессов H_n сходятся слабо в L к распределению случайного процесса H . Здесь в качестве пространства L мы будем рассматривать пространство непрерывных функций $C[0, 1]$ или пространство

*НИИ математики и механики, ул. Университетская, 17, 420008 Казань, Татарстан.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01265).

Скоророда $\mathcal{D}[0, 1]$. Символом $\xrightarrow{d}$ будем обозначать также сходимость по распределению случайных элементов. Символом $\stackrel{d}{=}$ будем обозначать равенство распределений случайных величин.

Пусть случайный процесс $H(y)$, $y \in [0, 1]$, определен в точках $y = x_k$, $1 \leq k \leq n$, $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$. Будем говорить, что в остальных точках отрезка $[0, 1]$ случайный процесс $H(y)$ определен по линейности, если для любой точки $x \in [0, 1]$, $x_i < x < x_{i+1}$, $Z(x) = \alpha Z(x_i) + (1 - \alpha) Z(x_{i+1})$, где α — такое положительное число, что $x = \alpha x_i + (1 - \alpha) x_{i+1}$.

Пусть Z, Z_n , $n \in \mathbb{N}$, — случайные элементы со значениями в банаховом пространстве B , η, η_n , $n \in \mathbb{N}$, — случайные величины. Уже в одномерном случае легко построить такие η, η_n , $n \in \mathbb{N}$, и Z, Z_n , $n \in \mathbb{N}$, что $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$, $n \rightarrow \infty$, и $Z_n \xrightarrow{d} Z$, $n \rightarrow \infty$, но последовательность $\eta_n Z_n$ не сходится по распределению. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $\eta_n \xrightarrow{d} C$, $n \rightarrow \infty$, где C — некоторое число, и $Z_n \xrightarrow{d} Z$, $n \rightarrow \infty$. Тогда $\eta_n Z_n \xrightarrow{d} CZ$, $n \rightarrow \infty$.

Применим лемму 1 к случайным элементам, рассматриваемым в теореме Донскера–Прохорова.

Пусть ξ_{nk} , $1 \leq k \leq k_n$, $n \in \mathbb{N}$, — независимые в каждой серии бесконечно малые случайные величины. Напомним условие Линдеберга: случайные величины ξ_{nk} — центрированные, $\sigma_{ni}^2 = E(\xi_{ni})^2 < \infty$ для всех $1 \leq i \leq k_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\max_{1 \leq i \leq k_n} \sigma_{ni}^2 / b_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, где $b_n = \sum_{i=1}^{k_n} \sigma_{ni}^2$, $n \in \mathbb{N}$, и для каждого $\varepsilon > 0$

$$(b_n)^{-1} \sum_{i=1}^{k_n} E(\xi_{ni})^2 I\{|\xi_{ni}| \geq \varepsilon (b_n)^{1/2}\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Определим случайные процессы $U_n(x)$, $x \in [0, 1]$. При $x = (b_n)^{-1} \sum_{i=1}^k \sigma_{ni}^2$, $1 \leq k \leq k_n$, положим $U_n(x) = \sum_{i=1}^k \xi_{ni}$. В остальных точках отрезка $[0, 1]$ случайные процессы $U_n(x)$ определены по линейности. Везде далее мы будем предполагать, что $k_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$.

Теорема Прохорова [4]. Пусть выполнено условие Линдеберга. Тогда $(b_n)^{-1/2} U_n \xrightarrow{d} W$, $n \rightarrow \infty$, в $C[0, 1]$, где W — винеровский процесс.

Обозначим через C_{rnk} и B_{rnk} тяжелые r -центры и r -разбросы случайных величин ξ_{nk} (см. определения r -центров и r -разбросов в монографии [5]), пусть $B_n = \sum_{i=1}^{k_n} B_{rni}$.

Определим случайные процессы $V_n(x)$, $x \in [0, 1]$. При $x = (B_n)^{-1} \sum_{i=1}^k B_{rni}$, $1 \leq k \leq k_n$, положим $V_n(x) = \sum_{i=1}^k \xi_{ni}$. В остальных точках отрезка $[0, 1]$ случайные процессы $V_n(x)$ определены по линейности.

Теорема Круглова [6]. Пусть $C_{rnk} = 0$, $1 \leq k \leq k_n$, и $B_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $V_n \xrightarrow{d} W$, $n \rightarrow \infty$, в $C[0, 1]$.

Из теоремы Прохорова и теоремы Круглова, используя лемму 1, получаем следующий результат.

Предложение 1. Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$P\left\{\max_{1 \leq i \leq k_n} |\xi_{ni}| = 0\right\} = 0.$$

(1) Пусть выполнено условие Линдеберга. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{k_n} (\xi_{ni})^2\right)^{-1/2} U_n \xrightarrow{d} W, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{в } C[0, 1].$$

(2) Пусть $C_{rnk} = 0$, $1 \leq k \leq k_n$, $n \in \mathbb{N}$, $B_n \rightarrow B$, $n \rightarrow \infty$, $u \infty > B > 0$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{k_n} (\xi_{ni})^2 \right)^{-1/2} V_n \xrightarrow{d} W, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{в } C[0, 1].$$

Приведем аналоги предложения 1 для случайных величин $X_{ni}(\xi_i(\omega_1))$. Пусть

$$S_{nx}^*(\omega_1) = \sum_{i=1}^{[k_n x]} X_{ni}(\xi_i(\omega_1)), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \omega_1 \in \Omega_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим случайные процессы

$$S'_n(x, \omega_1) = S_{nx}^*(\omega_1) + \{k_n x\} X_{n([k_n x]+1)}(\xi_{[k_n x]+1}(\omega_1)), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

параметризованные элементами $\omega_1 \in \Omega_1$. Все траектории случайных процессов $S'_n(x, \omega_1)$ лежат в пространстве $C[0, 1]$.

Пусть $\tau > 0$. Положим

$$A(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} k_n |EX_n(t) I\{|X_n(t)| < \tau\}|, \quad B(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} k_n E \frac{(X_n(t))^2}{1 + (X_n(t))^2}, \quad t \in T,$$

символом E_1 обозначим математическое ожидание относительно вероятности P_1 , пусть $\gamma(\sigma^2)$ — симметричная гауссовская случайная величина с дисперсией σ^2 .

Лемма 2. Пусть $S_n(t) \xrightarrow{d} \gamma(\sigma^2(t))$, $n \rightarrow \infty$, для каждого $t \in T$, $E_1 \sigma^2(\xi) = b$, причем $\infty > b > 0$, $E_1 A(\xi) < \infty$ и $E_1 B(\xi) < \infty$. Тогда $S'_n(x, \omega_1) \xrightarrow{d} b^{1/2} W$, $n \rightarrow \infty$, в $C[0, 1]$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Пусть $Y(t)$, $Y_n(t)$, $t \in T$, $n \in \mathbb{N}$, — независимые одинаково распределенные случайные процессы, определенные на $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и как функции двух аргументов измеримые относительно произведения σ -алгебр $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Рассмотрим случайные процессы

$$S''_n(x, \omega_1) = n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^{[nx]} Y_i(\xi_i(\omega_1)) + \{nx\} Y_{[k_n x]+1}(\xi_{[k_n x]+1}(\omega_1)) \right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

параметризованные элементами $\omega_1 \in \Omega_1$.

Следствие 1. Пусть $EY(t) = 0$ для всех $t \in T$ и $0 < b < \infty$, где $b = E_1 E(Y(\xi))^2$. Тогда $S''_n(x, \omega_1) \xrightarrow{d} b^{1/2} W$, $n \rightarrow \infty$, в $C[0, 1]$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Из леммы 2 и следствия 1, ввиду леммы 1, вытекают, соответственно, теорема 1 и следствие 2.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 2 и для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$P_1 \{ \omega_1 \in \Omega_1: P\{X_n(\xi) = 0\} > 0 \} = 0.$$

Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}(\xi_i(\omega_1)) \right)^{-1/2} S'_n(x, \omega_1) \xrightarrow{d} W, \quad n \rightarrow \infty,$$

в $C[0, 1]$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Следствие 2. Пусть выполнены условия следствия 1, $b = E_1 E(Y(\xi))^2$ и $P_1 \{ \omega_1 \in \Omega_1: P\{Y(\xi) = 0\} > 0 \} = 0$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n Y_i(\xi_i(\omega_1)) \right)^{-1/2} S''_n(x, \omega_1) \xrightarrow{d} W, \quad n \rightarrow \infty,$$

в $C[0, 1]$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Рассмотрим случайные процессы $S_n^t(x, \omega_1)$, $0 \leq x \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, параметризованные $\omega_1 \in \Omega_1$. При $x = m/k_n$, $0 \leq m \leq k_n$, полагаем

$$S_n^t(x, \omega_1) = 2 \sum_{j < i \leq m} X_{nj}(\xi_j(\omega_1)) X_{ni}(\xi_i(\omega_1)).$$

В остальных точках $x \in [0, 1]$ случайные процессы $S_n^t(x, \omega_1)$ определены по линейности:

$$S_n^t(x, \omega_1) = S_n^t\left(\frac{[xk_n]}{k_n}, \omega_1\right) + \{xk_n\} \left(S_n^t\left(\frac{[xk_n] + 1}{k_n}, \omega_1\right) - S_n^t\left(\frac{[xk_n]}{k_n}, \omega_1\right) \right).$$

Обозначим через I такой элемент пространства $C[0, 1]$, что $I(x) = x$, $x \in [0, 1]$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда $S_n^t(x, \omega_1) \xrightarrow{d} b(W^2 - I)$, $n \rightarrow \infty$, в $C[0, 1]$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Рассмотрим следующие случайные процессы, параметризованные элементами $\omega_1 \in \Omega_1$:

$$S_n^{\&}(x, \omega_1) = 2 \left(\sum_{j < i \leq [nx]} Y_i(\xi_i(\omega_1)) Y_j(\xi_j(\omega_1)) + \{nx\} \sum_{\substack{[nx] < i \leq [nx] + 1, \\ j < i \leq [nx] + 1}} Y_i(\xi_i(\omega_1)) Y_j(\xi_j(\omega_1)) \right), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

При $X_{ni} = n^{-1/2} Y_i$ из леммы 3 выводим

Следствие 3. Пусть выполнены условия следствия 1. Тогда $n^{-1} S_n^{\&}(x, \omega_1) \xrightarrow{d} b(W^2 - I)$, $n \rightarrow \infty$, в $C[0, 1]$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Из леммы 3 и следствия 3, ввиду леммы 1, соответственно, вытекают теорема 2 и следствие 4.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{k_n} (X_{ni}(\xi_i(\omega_1)))^2 \right)^{-1} S_n^t(x, \omega_1) \xrightarrow{d} W^2 - I, \quad n \rightarrow \infty,$$

в $C[0, 1]$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Следствие 4. Пусть выполнены условия следствия 2. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n (Y_i(\xi_i(\omega_1)))^2 \right)^{-1} S_n^{\&}(x, \omega_1) \xrightarrow{d} W^2 - I, \quad n \rightarrow \infty,$$

в $C[0, 1]$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Пусть $0 < p \leq 2$, η, η_n , $n \in \mathbb{N}$, — такие независимые одинаково распределенные случайные величины, центрированные при $p > 1$ и симметричные при $p \leq 1$, что семейства $\{\eta, \eta_i\}$, $\{Y, Y_i\}$ независимы, $S_n^p = n^{-1/p} \sum_{i=1}^n \eta_i$, $n \in \mathbb{N}$, γ_p — стандартная p -устойчивая случайная величина при $0 < p < 2$ и гауссовская стандартная величина при $p = 2$ (т.е. случайная величина γ_p имеет характеристическую функцию $\widehat{\mathcal{L}}(\gamma_p)(x) = \exp(-|x|^p)$, $x \in \mathbb{R}$, при $0 < p < 2$ и $\gamma_2 \stackrel{d}{=} \gamma(1)$). Обозначим через $W_p = W_p(t)$, $t \in [0, 1]$, такой однородный случайный процесс с независимыми приращениями, что $\mathcal{L}(W_p(1)) \stackrel{d}{=} \mathcal{L}(\gamma_p)$. Заметим, что при $p = 2$ случайный процесс W_p — винеровский процесс W . Рассмотрим случайные процессы $S_n^{sp}(x, \omega_1) = \sum_{i=1}^{[nx]} \eta_i Y_i(\xi_i(\omega_1))$, $0 \leq x \leq 1$, параметризованные элементами $\omega_1 \in \Omega_1$.

Лемма 4. Пусть $0 < p < 2$, $S_n^p \xrightarrow{d} \gamma_p$, $n \rightarrow \infty$, $0 < b < \infty$, где $b = \mathbb{E}\mathbb{E}_1|Y(\xi)|^p$. Тогда $S_n^{sp}(x, \omega_1) \xrightarrow{d} b^{1/p}W_p$, $n \rightarrow \infty$, в $\mathcal{D}[0, 1]$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Из леммы 4 и леммы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы 3 и

$$\mathbf{P}_1\{\omega_1 \in \Omega_1: \mathbf{P}\{Y(\xi) = 0\} > 0\} = 0.$$

Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n |Y_i(\xi_i(\omega_1))|^p\right)^{-1/p} S_n^{sp}(x, \omega_1) \xrightarrow{d} W_p, \quad n \rightarrow \infty,$$

в $\mathcal{D}[0, 1]$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Пусть ξ_{ni} , $1 \leq i \leq k_n$, $n \in \mathbf{N}$, — такие независимые бесконечно малые случайные величины, что $\{\eta_n\}$ и $\{\xi_{ni}\}$ — независимые семейства. Пусть $\tau > 0$. Положим

$$(\xi_{ni})^\tau = \xi_{ni} I\{|\xi_{ni}| < \tau\}, \quad \xi_{n0} = 0, \quad a_{nm} = \sum_{i=0}^m \mathbb{E}|(\xi_{ni})^\tau|^p, \quad m \leq k_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Определим случайные процессы $W_{pn}(t)$, $t \in [0, 1]$. При $a_{nm} \leq t < a_{n(m+1)}$, $m < k_n$, положим $W_{pn}(t) = \sum_{i=1}^m \xi_{ni}\eta_i$, при $a_{nk_n} \leq t$ положим $W_{pn}(t) = \sum_{i=1}^{k_n} \xi_{ni}\eta_i$.

Лемма 5. Пусть $S_n^p \xrightarrow{d} \gamma_p$, $n \rightarrow \infty$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $W_{pn} \xrightarrow{d} b^{1/p}W_p$, $n \rightarrow \infty$, в $\mathcal{D}[0, 1]$;
- 2) $\sum_{i=1}^{k_n} |\xi_{ni}|^p \rightarrow b$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности.

Из леммы 5 и леммы 1 вытекает

Теорема 4. Пусть $S_n^p \xrightarrow{d} \gamma_p$, $n \rightarrow \infty$, и $W_{pn} \xrightarrow{d} b^{1/p}W_p$, $n \rightarrow \infty$, в $\mathcal{D}[0, 1]$, где $0 < b < \infty$, и для всех $n \in \mathbf{N}$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq i \leq k_n} |\xi_{ni}| = 0\right\} = 0.$$

Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{k_n} |\xi_{ni}|^p\right)^{-1/p} W_{pn} \xrightarrow{d} W_p, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{в } \mathcal{D}[0, 1].$$

Пусть

$$W'_n(a_{nm}) = W_{2n}(a_{nm}), \quad 1 \leq m \leq k_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

В остальных точках отрезка $[0, 1]$ случайные процессы $W'_n(x)$ определены по линейности.

Лемма 6. Пусть

$$\mathbb{E}\eta = 0, \quad \mathbb{E}\eta^2 = 1.$$

Следующие условия эквивалентны:

- 1) $W'_n \xrightarrow{d} b^{1/2}W$, $n \rightarrow \infty$, в $C[0, 1]$;
- 2) $\sum_{i=1}^{k_n} |\xi_{ni}|^2 \rightarrow b$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности.

Теорема 5. Пусть

$$\mathbb{E}\eta = 0, \quad \mathbb{E}\eta^2 = 1 \quad \text{и} \quad W'_n \xrightarrow{d} b^{1/2}W, \quad n \rightarrow \infty,$$

в $C[0, 1]$, где $0 < b < \infty$, и для всех $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq i \leq k_n} |\xi_{ni}| = 0\right\} = 0.$$

Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{k_n} |\xi_{ni}|^2 \right)^{-1/2} W'_n \xrightarrow{d} W, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{в } C[0,1].$$

З а м е ч а н и е 1. В идейном плане доказательства лемм 2, 3 и 6 близки к доказательству теоремы Прохорова. А. В. Скороход (см., например, [7, с. 547]) получил условия сходимости случайных ступенчатых функций, определенных суммами независимых случайных величин, к однородному случайному процессу с независимыми приращениями. В идейном плане доказательства лемм 4 и 5 близки к доказательству теоремы Скорохода.

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что условия: «для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\mathbf{P}\{\max_{1 \leq i \leq k_n} |\xi_{ni}| = 0\} = 0$ » в предложении 1, теоремах 4 и 5; «для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\mathbf{P}_1\{\omega_1 \in \Omega_1: \mathbf{P}\{X_n(\xi) = 0\} > 0\} = 0$ » в теоремах 2 и 3; « $\mathbf{P}_1\{\omega_1 \in \Omega_1: \mathbf{P}\{Y(\xi) = 0\} > 0\} = 0$ » в следствиях 2 и 4 и теореме 3, обеспечивают почти наверное определенность рассматриваемых случайных элементов и не имеют существенного использования в доказательствах. Поэтому если расширить понятие сходимости по распределению на не обязательно почти всюду определенные случайные величины, то эти условия в перечисленных выше теоремах являются излишними. Приведем один из вариантов такого расширения: последовательность Z_n не обязательно почти всюду определенных случайных элементов в банаховом пространстве B сходится по распределению к случайному элементу Z со значением в B тогда и только тогда, когда

а) для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ и компакт $K_\varepsilon \subset B$, что $\mathbf{P}\{Z_n \in K_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon$ для всех $n > n_\varepsilon$;

б) для каждого $x' \in B'$, для каждой такой точки $y \in \mathbb{R}$, что функция распределения случайной величины $x'(Z)$ непрерывна в y , числовая последовательность $\mathbf{P}\{x'(Z_n) \leq y, x'(Z_n) \text{ определена}\}$ сходится к $\mathbf{P}\{x'(Z) \leq y\}$.

Заметим, что в силу критерия слабой сходимости Прохорова для почти всюду определенных случайных элементов это определение совпадает с обычным определением сходимости по распределению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чупрунов А. Н. О сходимости по распределению сумм и максимумов независимых случайных величин со случайными параметрами. — *Liet. Matem. Rink.*, 1995, v. 35, № 1, p. 52–64.
2. Чупрунов А. Н. О сходимости по распределению эмпирических процессов определенных независимыми случайными процессами. — *Liet. Matem. Rink.*, 1995, v. 35, № 2, p. 171–180.
3. Чупрунов А. Н. О сходимости по распределению почти всех сумм независимых банаховозначных случайных элементов. — *Изв. ВУЗов. Математика*, 1994, № 11, p. 83–87.
4. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1956, т. 1, в. 2, с. 117–238.
5. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
6. Круглов В. М. Слабая сходимость случайных ломаных к винеровскому процессу. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1985, т. 30, в. 2, с. 209–218.
7. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977, 568 с.

Поступила в редакцию

3.1.1996