Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Шоргин, О точности нормальной аппроксимации распределений случайных сумм с безгранично делимыми индексами, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 920–926

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:31:25

© 1996 г.

ШОРГИН С. Я.*

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ СУММ С БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫМИ ИНДЕКСАМИ

Рассматриваются случайные суммы независимых одинаково распределенных случайных величин с индексом, имеющим безгранично делимое (и тем самым обобщенное пуассоновское) распределение. Получены оценки точности нормальной аппроксимации распределений указанных случайных сумм; в правых частях оценок присутствуют «нецентральные» ляпуновские дроби. Обсуждается вопрос о соотношении величин «классических» и «нецентральных» ляпуновских дробей; показано, что в рамках данной задачи использование последних более естественно.

Ключевые слова и фразы: случайные суммы, индекс и случайные слагаемые случайной суммы, «нецентральное» и «классическое» отношения Ляпунова, безгранично делимое распределение, пуассоновское и обобщенное пуассоновское распределения, нормальная аппроксимация.

1. Основные обозначения и проблематика работы. Введем, прежде всего, ряд обозначений, упрощающих запись результатов и доказательств.

Совпадение распределений случайных величин (с.в.) X и Y будем обозначать как $X =_d Y$. Функцию распределения и характеристическую функцию (х.ф.) любой с.в. X обозначим $F_X(x)$ и $f_X(t)$, соответственно, а производящую функцию (п.ф.) любой неотрицательной целочисленной (н.ц.) с.в. N обозначим $\psi_N(z)$.

Пусть N — некоторая н.ц. с.в., X — произвольная с.в. Обозначим случайную величину, х.ф. распределения которой равна $\psi_N(f_X(t))$, символом $\{N, X\}$. Очевидно, что с.в. $\{N, X\}$ может быть представлена в виде $\{N, X\} =_d \sum_{j=1}^N X_j$ (для определенности полагаем, что $\sum_{j=1}^0 = 0$), где $X_1, X_2, \dots$ — одинаково распределенные (о.р.) с.в., причем $X_j =_d X$ и с.в. $N, X_1, X_2, \dots$ независимы в совокупности. Будем называть при этом с.в. $\{N, X\}$ случайной суммой (сл. суммой), с.в. N — индексом, а с.в. X — случайным слагаемым (сл. слаг.). Очевидно, что в случае, когда X — н.ц. с.в., то и $\{N, X\}$ — н.ц. с.в., и ее п.ф. $\psi_{\{N, X\}}(z) = \psi_N(\psi_X(z))$.

Для любой с.в. X , имеющей два конечных первых момента, символом $\tilde{X}$ или X^- обозначим нормированную с.в.: $\tilde{X} =_d (X - E(X))/[D(X)]^{1/2}$.

Если невырожденная в 0 с.в. X имеет три конечных первых момента, то назовем отношением Ляпунова величину $L(X) = E(|X|^3)/[E(X^2)]^{3/2}$. При $E(X) = 0$ эта величина совпадает с «классической» ляпуновской дробью $L(X - E(X))$, фигурирующей в правой части оценки Берри-Эссеена (и содержащей соответствующие центральные моменты). Для любой невырожденной с.в. X , имеющей три момента, обозначим $L_0(X) = L(X - E(X))$.

Предположим, что распределение с.в. N — безгранично делимое (б.д.) в классе распределений н.ц. с.в., т.е. для любого натурального m существует такая н.ц. с.в. N'_m , что $N =_d \{m, N'_m\}$. Как известно [1], в этом случае распределение с.в. N является обобщенным пуассоновским (о.п.), т.е. ее х.ф. равна $f_N(t) = \exp[\lambda(f_Y(t) - 1)]$, где $\lambda > 0$, $f_Y(t)$ — х.ф. некоторой н.ц. с.в. Y ; иначе говоря, $N =_d \{\Pi(\lambda), Y\}$, где $\Pi(\lambda)$ — пуассоновская с.в. с параметром λ . Пусть существуют первые три момента с.в. N и X .

*Институт проблем информатики РАН, ул. Вавилова, 30/6, 117900 Москва, Россия.

Предметом работы является оценка точности аппроксимации распределения с.в. $S =_d \{N, X\}$ в случае, когда с.в. N имеет б.д. распределение, нормальным законом с соответствующими моментами. Очевидно, что в этом случае $S =_d \{\Pi(\lambda), Y\}, X\}$. Положим $\Delta = \sup_x |F_{\tilde{S}}(x) - \Phi(x)|$, где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения.

Для случая произвольного распределения индекса N существует ряд оценок точности нормальной аппроксимации распределений сл. сумм $S =_d \{N, X\}$. Оценки из [2] для случая $E(X) = 0$ представляются близкими к окончательным. Что касается общего случая ($E(X) \neq 0$), то соответствующие оценки точности нормальной аппроксимации [3], [4] весьма сложны по структуре; при этом в указанные оценки входит компонента, содержащая «классическое» отношение Ляпунова $L_0(X)$ ([3, теорема 6.2.1]; см. ниже неравенство (6)). В то же время анализ случая, когда с.в. N имеет распределение Пуассона (частный случай рассматриваемой нами задачи), показывает, что при $E(X) \neq 0$ более естественным является наличие в оценках для Δ «нецентральных» ляпуновских дробей вида $L(X)$. Оценку величины Δ для $N =_d \Pi(\lambda)$ в терминах величин $L(X)$ сформулируем в качестве леммы.

Лемма 1. Если N имеет распределение Пуассона с параметром λ , то

$$\Delta \leq C_1 \frac{L(X)}{\lambda^{1/2}}, \quad (1)$$

где C_1 — абсолютная постоянная.

Отметим, что данная оценка, по-видимому, впервые приведена в [5] (без доказательства; при этом утверждалось, что можно положить $C_1 = 2.23$). В [6] приводится доказательство данной леммы; показано, что можно положить $C_1 = 1.99$. Наконец, недавно совместно В. Ю. Королевым и автором показано, что можно положить $C_1 = C_0$, где C_0 — постоянная из неравенства Берри–Эссеена для одинаково распределенных слагаемых, т.е. (см. [7]) $C_1 = C_0 = 0.7655$ (доказательство последней оценки для C_1 будет опубликовано позднее).

Основной результат работы — неравенство (2), являющееся обобщением (1) на случай о.п. распределения индекса N . Эта оценка является альтернативной результатам [3], [4] (хотя и относится к более узкому классу распределений, чем рассматривается в этих работах). В случае $N =_d \Pi(\lambda)$ оценка (2) сводится к (1), причем абсолютная постоянная в (2) совпадает с C_1 из (1).

При решении задачи оценки точности аппроксимации распределения сл. сумм с о.п. распределением индекса, безусловно, имеет место существенная потеря общности по сравнению с ситуацией произвольного распределения N , рассмотренной, например, в [2]–[4]. Но все же и данный частный случай представляет достаточный интерес. Так, целочисленный случайный процесс с независимыми приращениями представляет собой совокупность с.в. N_i , имеющих б.д. распределение (и, значит, о.п. распределение [1]); задачи исследования сл. сумм, связанных с такими процессами, возникают при анализе ряда систем массового обслуживания, процессов риска в страховой математике и т.п. Отметим при этом, что оценки, получаемые в данной работе, оказываются весьма простыми по форме и (см. п. 3) в ряде ситуаций более точны, чем общие оценки [3], [4].

2. Формулировка и обсуждение результатов. Пусть с.в. N и X имеют три конечных первых момента.

Теорема 1. Справедлива оценка

$$\Delta \leq \frac{C_1}{\lambda^{1/2}} \left\{ E[Y(Y-1)(Y-2)]E^3(|X|) + 3E[Y(Y-1)]E(|X|)E(X^2) + E(Y)E(|X|^3) \right\} / \{E(Y^2)E^2(X) + E(Y)D(X)\}^{3/2}, \quad (2)$$

где C_1 — абсолютная постоянная из неравенства (1).

(Отметим, что для н.с. с.в. Y справедливы неравенства $E[Y(Y-1)(Y-2)] \geq 0$, $E[Y(Y-1)] \geq 0$.)

Неравенство (2) является самым точным из результатов работы, но имеет достаточно сложный вид. Более наглядным результатом является следующее утверждение.

Следствие 1. *Справедлива оценка*

$$\Delta \leq \frac{C_1}{\lambda^{1/2}} \frac{E(Y^3)E(|X|^3)}{\{E(Y^2)E^2(X) + E(Y)D(X)\}^{3/2}} \\ = \frac{C_1}{\lambda^{1/2}} L(X) L(Y) \left[\frac{E(X^2)}{E^2(X) + E(Y)D(X)/E(Y^2)} \right]^{3/2}. \quad (3)$$

(Неравенство (3) вытекает из (2) в силу того, что $E^3(|X|) \leq E(|X|^3)$, $E(|X|) \times E(X^2) \leq E(|X|^3)$ и $Y(Y-1)(Y-2) + 3Y(Y-1) + Y = Y^3$.)

Правая часть (3) совпадает с правой частью (2) в случае, когда либо с.в. X является вырожденной, либо с.в. Y вырождена в 1. Очевидно, что в остальных случаях неравенство (3) «хуже», чем (2). Пусть $L'_0(N) = E[(N - E(N))^3]/D^{3/2}(N)$. Так как $E[(\Pi(\lambda), Y - E(Y))^3] = \lambda E(Y^3)$, то $L'_0(N) = L(Y)/\lambda^{1/2}$.

Неравенство (3) может быть переписано эквивалентным образом с использованием только моментов с.в. N и X (т.е. есть для вычисления значения оценки необязательно знать величину λ и моменты с.в. Y).

Следствие 2. *Справедлива оценка*

$$\Delta \leq C_1 \frac{E[(N - E(N))^3]E(|X|^3)}{\{D(N)E^2(X) + E(N)D(X)\}^{3/2}} \\ = C_1 L(X) L'_0(N) \left[\frac{E(X^2)}{E^2(X) + (E(N)/E(N^2))D(X)} \right]^{3/2}. \quad (4)$$

(Данное следствие вытекает из (3) и свойств моментов с.в. N .)

Для выражения $E(Y^2)E^2(X) + E(Y)D(X)$, присутствующего в знаменателе правой части неравенства (3), можно выписать следующие нижние оценки: $E(Y^2) \times E^2(X) + E(Y)D(X) \geq E(Y^2)E^2(X)$ и $E(Y^2)E^2(X) + E(Y)D(X) \geq E(Y)E(X^2)$ (так как $E(Y^2) \geq E(Y)$). Значит, из (3) вытекает следующий результат.

Следствие 3. *Справедлива оценка*

$$\Delta \leq \frac{C_1}{\lambda^{1/2}} \min \left\{ L(Y) \frac{E(|X|^3)}{E^3(X)}, \frac{E(Y^3)}{E^{3/2}(Y)} L(X) \right\}.$$

Очевидно, что данное неравенство (как и все приведенные выше) является обобщением (1) (с сохранением абсолютной постоянной); для получения из теоремы 1 и следствий 1-3 оценки (1) достаточно положить в них $Y =_d 1$ или, что то же самое, $N =_d \Pi(\lambda)$.

Отметим, что в случае, когда с.в. X фиксирована, причем $E(X) \neq 0$, необходимым и достаточным условием сходимости правой части (4) к 0 является $L'_0(N) \rightarrow 0$. В терминах моментов с.в. Y это условие выглядит так:

$$\frac{L(Y)}{\lambda^{1/2}} \rightarrow 0. \quad (5)$$

Очевидно, что данное условие выполняется, если $\lambda \rightarrow \infty$, а с.в. Y , являющаяся сл. слаг. для сл. суммы N , фиксирована. Однако при рассмотрении произвольной последовательности о.п. с.в. $N_k =_d \{\Pi(\lambda_k), Y_k\}$ даже с неограниченно растущим параметром λ_k , но с различными распределениями с.в. Y_k , выполнение (5) не гарантировано.

3. Сравнение результатов работы с имеющимися оценками. Ниже осуществляется сравнение оценок, приведенных в предыдущем пункте, с аналогичными оценками, полученными с помощью других методов в [3], [4]. Это сравнение проводится в предположении, что $\lambda \rightarrow \infty$.

В [3] доказано следующее утверждение, уточняющее оценку из [4]: если с.в. X и N имеют три конечных момента, то для любого $q \in (0, 1)$

$$\Delta \leq C_0 \frac{L_0(X)}{q^{1/2} E^{1/2}(N)} + w(q) \frac{E(|N - E(N)|)}{E(N)} + \sup_x |F_{\bar{N}}(x) - \Phi(x)|, \quad (6)$$

где C_0 — постоянная из оценки Берри-Эссеена для одинаково распределенных слагаемых (см. п. 1),

$$w(q) = \max \left[\frac{1}{1-q}, \frac{1}{cq^{1/2}(1+q^{1/2})} \right], \quad c = (2\pi e)^{1/2}.$$

Для того, чтобы сравнить неравенство (6) с результатами из п. 2, следует выяснить, как выглядит (6) в ситуации, когда с.в. N имеет о.п. распределение. Для этого нужно, прежде всего, заменить в правой части (6) величину $\sup_x |F_{\bar{N}}(x) - \Phi(x)|$ на ее оценку, получаемую с помощью методов [3]–[4]; такая оценка получена в [6]:

$$\sup_x |F_{\bar{N}}(x) - \Phi(x)| \leq \lambda^{-1/2} \left[C_0 + \inf_{0 < p < 1} \left\{ \frac{C_0 L_0(Y)}{p^{1/2}} + w(p) \right\} \right].$$

Кроме того, в случае, когда $N =_d \{\Pi(\lambda), Y\}$, в силу неравенства Ляпунова $E(|N - E(N)|) \leq D^{1/2}(N) = \lambda^{1/2} E^{1/2}(Y^2)$. В результате заключаем, что для с.в. N , имеющих о.п. распределение,

$$\Delta \leq \lambda^{-1/2} \left\{ \inf_{0 < q < 1} \left\{ C_0 \frac{L_0(X)}{q^{1/2} E^{1/2}(Y)} + w(q) \frac{E^{1/2}(Y^2)}{E(Y)} \right\} + C_0 + \inf_{0 < p < 1} \left\{ \frac{C_0 L_0(Y)}{p^{1/2}} + w(p) \right\} \right\}.$$

В силу [6, лемма 3] данное неравенство можно переписать так:

$$\Delta \leq \lambda^{-1/2} \left\{ \frac{E^{1/2}(Y^2)}{E(Y)} \Omega(r_1) + C_0 + \Omega(r_2) \right\}, \quad (7)$$

где

$$\Omega(r) = \begin{cases} \frac{1 + s^2(r/2)}{(1 - s^2(r/2))^2} & \text{при } r \geq \frac{2(1+c)}{(2c+c^2)^2}, \\ r(1+c) + \frac{(1+c)^2}{2c+c^2} & \text{при } r \leq \frac{2(1+c)}{(2c+c^2)^2}; \end{cases}$$

$s(u)$ — решение уравнения $s^3(u)/(1-s^2(u))^2 = u$ (которое существует и единственно при любом $u > 0$); $r_1 = C_0 \sqrt{E(Y)/E(Y^2)} L(X)$; $r_2 = C_0 L_0(Y)$. Отметим, что $r_2 \geq 2(1+c)/(2c+c^2)^2$.

Точное решение вопроса, в каких случаях лучше оценка из (2), а в каких — оценка из (7), представляется затруднительным в силу сложности выражений, стоящих в правых частях этих неравенств. Поэтому для практического применения можно рекомендовать «объединенную» оценку:

$$\Delta \leq \min\{P, Q\},$$

где P — правая часть неравенства (2), Q — правая часть (7).

Для корректной постановки задачи сравнения асимптотического поведения этих оценок при $\lambda \rightarrow \infty$ рассмотрим следующую схему серий. Пусть при каждом n заданы положительный параметр λ_n , с.в. M_n , имеющая пуассоновское распределение с параметром λ_n , последовательность о.р. н.ц. с.в. $Y_{1n}, Y_{2n}, \dots$ и последовательность о.р. с.в. $X_{1n}, X_{2n}, \dots$, причем при каждом n все перечисленные с.в. независимы в совокупности. При различных n как с.в. Y_{in} , так и с.в. X_{in} могут быть распределены по-разному. Рассмотрим последовательности сл. сумм $N_n =_d Y_{1n} + \dots + Y_{M_n n}$, $S_n =_d X_{1n} + \dots + X_{M_n n}$ и последовательность величин $\Delta_n = \sup_x |F_{S_n}^-(x) - \Phi(x)|$.

Пусть с.в. $Y_n =_d Y_{1n}$, $X_n =_d X_{1n}$. Тогда $N_n =_d \{\Pi(\lambda_n), Y_n\}$ и $S_n =_d \{N_n, X_n\}$. Отметим, что значение Δ_n определяется тройкой (λ_n, Y_n, X_n) (естественно, имеются в виду распределения с.в. Y_n и X_n).

Итак, справедливы неравенства $\Delta_n \leq P_n$, $\Delta_n \leq Q_n$, где P_n — правая часть неравенства (2) для $\lambda = \lambda_n$, $Y =_d Y_n$, $X =_d X_n$; Q_n — правая часть неравенства (7) при этих же λ, Y, X . Конечно, значения P_n и Q_n также зависят от тройки (λ_n, Y_n, X_n) , поэтому при необходимости будет использоваться запись $P_n(\lambda_n, Y_n, X_n)$ и $Q_n(\lambda_n, Y_n, X_n)$.

Следующая теорема показывает, что существует некоторое естественное множество распределений с.в. Y_n (см. условие (8)), такое, что для всех с.в. X_n , имеющих три момента, и для Y_n , удовлетворяющих (8), оценка P_n в определенном смысле более точна, чем оценка Q_n .

Теорема 2. Рассмотрим с.в. Y_n , удовлетворяющие условию

$$E(Y_n^3) E^{1/2}(Y_n) \leq K E^{3/2}(Y_n^2), \quad (8)$$

где $K \geq 1$ есть абсолютная постоянная. Существует абсолютная постоянная R (зависящая от K) такая, что для любых $\lambda_n > 0$, любых с.в. Y_n , удовлетворяющих (8), и любых с.в. X_n , имеющих три конечных момента, $P_n/Q_n \leq R$. В то же время существует такая последовательность троек $(\lambda_n^0, Y_n^0, X_n^0)$, где с.в. Y_n^0 удовлетворяют (8), а с.в. X_n^0 имеют три конечных момента, что $P_n(\lambda_n^0, Y_n^0, X_n^0) \rightarrow 0$ при $\lambda_n \rightarrow \infty$, но $Q_n(\lambda_n^0, Y_n^0, X_n^0)$ не стремится к 0.

З а м е ч а н и е 1. Из этой теоремы следует, что (в рамках описанного класса распределений с.в. Y_n и X_n) для всех тех последовательностей распределений с.в. S_n , асимптотическую нормальность которых гарантирует оценка Q_n , оценка P_n также сообщает об их асимптотической нормальности (и имеет «не худший» порядок скорости сходимости к 0, чем P_n). В то же время наличие такой последовательности троек $(\lambda_n^0, Y_n^0, X_n^0)$, что оценка P_n «улавливает» асимптотическую нормальность соответствующей последовательности распределений с.в. S_n , а оценка Q_n этого не «улавливает», означает, что в рамках данного класса распределений с.в. Y_n и X_n оценка вида P_n является асимптотически более точной, чем оценка вида Q_n . Естественно, можно выделить и такой класс распределений с.в. Y_n и X_n , в рамках которого асимптотически более точной является оценка Q_n , однако в данной работе этот вопрос не рассматривается.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что условиям (8) удовлетворяют, в частности, с.в. Y_n , удовлетворяющие условию $E(Y_n^3) \leq K E(Y_n^2)$ (K — абсолютная постоянная). Это следует из того, что $E(Y_n^3) E^{1/2}(Y_n) \leq K E(Y_n^2) E^{1/2}(Y_n) \leq K E^{3/2}(Y_n^2)$. В частности, этому условию удовлетворяют все с.в., равномерно ограниченные величиной K .

З а м е ч а н и е 3. Неравенство $K \geq 1$ вытекает из (10).

4. Доказательство результатов работы. Важнейшее значение для доказательства теоремы 1 имеет следующая простая лемма.

Лемма 2. Если Y — н.ц. с.в., то

$$S =_d \{\Pi(\lambda), Y\}, X\} =_d \{\Pi(\lambda), \{Y, X\}\}.$$

Доказательство сводится к цепочке тождеств:

$$\begin{aligned} f_S(t) &= \psi_{\{\Pi(\lambda), Y\}}(f_X(t)) = \psi_{\Pi(\lambda)}(\psi_Y(f_X(t))) \\ &= \psi_{\Pi(\lambda)}(f_{\{Y, X\}}(t)) = f_{\{\Pi(\lambda), \{Y, X\}\}}(t). \end{aligned}$$

Из леммы 2 следует, что с.в. $S =_d \{\{\Pi(\lambda), Y\}, X\}$, являющаяся сл. суммой с обобщенным пуассоновским индексом $\{\Pi(\lambda), Y\}$ и сл. слаг. X , одновременно является сл. суммой с пуассоновским индексом $\Pi(\lambda)$ и сл. слаг. $\{Y, X\}$; благодаря этому анализ распределения с.в. S можно провести с помощью результатов для сл. сумм с пуассоновским индексом.

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 2 имеем: $S =_d \{\Pi(\lambda), \{Y, X\}\}$. Пусть $U =_d \{Y, X\}$. Из леммы 1 следует, что

$$\left| F_S^-(x) - \Phi(x) \right| = \left| F_{\{\Pi(\lambda), U\}}^-(x) - \Phi(x) \right| \leq C_1 \frac{\mathbf{E}(|U|^3)}{\lambda^{1/2} \mathbf{E}^3(U^2)}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|U|^3) &\leq \mathbf{E}(|\{Y, X\}|^3) = [\mathbf{E}(Y^3) - 3\mathbf{E}(Y^2) + 2\mathbf{E}(Y)] \mathbf{E}^3(|X|) \\ &\quad + 3[\mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)] \mathbf{E}(|X|) \mathbf{E}(X^2) + \mathbf{E}(Y) \mathbf{E}(|X|^3); \\ \mathbf{E}(U^2) &= [\mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)] \mathbf{E}^2(X) + \mathbf{E}(Y) \mathbf{E}(X^2), \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 основывается на следующем утверждении.

Лемма 3. Для любой невырожденной с.в. Z , имеющей три конечных момента, $L(Z) \leq C_2 L_0(Z)$, причем можно положить $C_2 = 2\sqrt{2} < 2.83$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{E}(Z) = \alpha$, $\mathbf{D}(Z) = \sigma^2$, $Z_0 = Z - \alpha$; не ограничивая общности, предположим, что $\alpha > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} L(Z) &= \frac{\mathbf{E}(|Z_0 + \alpha|^3)}{(\sigma^2 + \alpha^2)^{3/2}} \leq \frac{\mathbf{E}(|Z_0|^3) + 3\sigma^2\alpha + 3\mathbf{E}(|Z_0|)\alpha^2 + \alpha^3}{(\sigma^2 + \alpha^2)^{3/2}} \\ &\leq \mathbf{E}(|Z_0|^3) \frac{\sigma^3 + 3\sigma^2\alpha + 3\sigma\alpha^2 + \alpha^3}{\sigma^3(\sigma^2 + \alpha^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Поскольку $L_0(Z) = \mathbf{E}(|Z_0|^3)/\sigma^3$, то $L(Z) \leq L_0(Z) \max_{x \geq 0} [(1+x)^3/(1+x^2)^{3/2}]$.

Максимум в правой части последнего неравенства достигается при $x = 1$ и равен $2\sqrt{2}$, откуда и следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2. Во-первых, докажем, что существует такая абсолютная постоянная R , что $P_n/Q_n \leq R$ для любой последовательности (λ_n, Y_n, X_n) , где Y_n удовлетворяют (8), а X_n имеют три момента. Отметим, что при $r \leq 2(1+c)/(2c+c^2)^2$ выполняется $\Omega(r) \geq R_1 r$, где $R_1 = 1+c+(1+c)(2c+c^2)/2$. Далее, при $r \geq 2(1+c)(2c+c^2)^2$

$$\frac{\Omega(r)}{r} = \frac{1+s^2(r/2)}{2(1-s^2(r/2))^2(r/2)} = \frac{1+s^2(r/2)}{2s^3(r/2)}.$$

Последняя дробь — монотонно убывающая функция от r ; значит,

$$\frac{\Omega(r)}{r} \geq R_2 = \frac{1+s^2((1+c)/(2c+c^2)^2)}{2s^3((1+c)/(2c+c^2)^2)}.$$

При $r \geq 0$ выполняется $\Omega(r) \geq R_3 r$, где $R_3 = \min\{R_1, R_2\}$. Имеем:

$$\lambda_n^{1/2} Q_n > \frac{\mathbf{E}^{1/2}(Y_n^2)}{\mathbf{E}(Y_n)} \Omega(r_1) \geq \frac{C_0 R_3}{\mathbf{E}^{1/2}(Y_n)} L_0(X_n). \quad (9)$$

Рассмотрим теперь оценку P_n , которую мы возьмем из следствия 1:

$$\lambda_n^{1/2} P_n = C_1 L(X_n) L(Y_n) \left[\frac{E(X_n^2)}{E^2(X_n) + E(Y_n) D(X_n)/E(Y_n^2)} \right]^{3/2}.$$

Из неравенства Ляпунова $E^2(Y_n^2) \leq E(Y_n^3) E(Y_n)$ и (8) следует, что

$$1 \leq \frac{E^{1/2}(Y_n^2)}{E^{1/2}(Y_n)} \leq \frac{E(Y_n^3)}{E^{3/2}(Y_n^2)} E^{1/2}(Y_n) \leq K. \quad (10)$$

Значит,

$$\lambda_n^{1/2} P_n \leq \frac{K C_1 L(X_n)}{E^{1/2}(Y_n)} \left[\frac{E^2(X_n) + D(X_n)}{E^2(X_n) + K^{-2} D(X_n)} \right]^{3/2} \leq \frac{C_1 K^4 L(X_n)}{E^{1/2}(Y_n)}. \quad (11)$$

Итак, $P_n/Q_n \leq (C_1 K^4 / (C_0 R_3)) L(X)/L_0(X)$; в силу леммы 3

$$\frac{P_n}{Q_n} \leq R = \frac{C_1 C_2 K^4}{C_0 R_3}.$$

Первое из утверждений теоремы 2 доказано. Для доказательства второго утверждения рассмотрим $\lambda_n^0 = n$, с.в. $Y_n^0 = 1$ и с.в. X_n^0 , принимающие два значения: 2 с вероятностью $1/n$ и 1 с вероятностью $1 - 1/n$, $n = 2, 3, \dots$; тогда при всех $n \geq 2$ справедливы оценки $L_0(X_n^0) > 0.68 n^{1/2}$ и $L(X_n^0) < 1.2$. Очевидно, при таком выборе $\{Y_n^0\}$ условие (8) выполняется с $K = 1$; в силу (11) $P_n < 1.2 C_1 / n^{1/2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, в то же время из (9) следует, что $Q_n > 0.68 C_0 R_3$.

В заключение автор выражает признательность Ю. В. Прохорову за поддержку и В. Ю. Королеву за полезные замечания и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.
2. Королев В. Ю., Селиванова Д. О. Несколько замечаний о точности нормальной аппроксимации для распределений случайных сумм. — Вестник Московского ун-та, сер. вычислит. матем. и кибернет., 1991, № 2, с. 46–53.
3. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: МГУ, 1990.
4. Englund G. A remainder term estimate in the random sum central limit theorem. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 1, с. 143–149.
5. Ротарь Г. В. Об одной задаче управления резервами. — Экономика и матем. методы, 1976, т. 12, в. 4, с. 733–739.
6. Bening V. E., Korolev V. Yu., Shorgin S. Ya. On approximations to generalized Poisson distributions. — J. Math. Sciences. Proceedings of the XVII Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 1996 (to appear).
7. Шуганов И. С. Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — В сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара. М.: ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.

Поступила в редакцию
2.IV.1996