Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Тюрин, Рецензия на книгу Никитина Я. Ю. “Асимптотическая эффективность непараметрических критериев”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 4, 947–951

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3287>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:55:44

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Никитин Я. Ю. Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. Москва: Наука, Физматлит, 1995, 238 с.

Прошло несколько десятилетий с тех пор, как были высказаны основные идеи об измерении асимптотической относительной эффективности (АОЭ) статистических критериев. Бахадур (Bahadur R.) предложил свое понятие АОЭ в 1960 году. Еще прежде, в 1956 году, свое предложение высказали Ходжес и Леман (Hodges J., Lehmann E.). Наиболее популярное ныне понятие АОЭ по Питмену (Pitman E.) известно с конца сороковых годов. За это время в этой области были получены впечатляющие результаты. Среди многих исследователей, внесших свой вклад в развитие этой темы, автору обсуждаемой книги принадлежит почетное место. Ниже мы не раз будем говорить о его достижениях.

В своей книге Я. Ю. Никитин дал прекрасное изложение идей асимптотической эффективности статистических критериев применительно к непараметрическим тестам. Он все в этой области знает, все прочитал, все привел в систему, своими трудами закрыл обширные «белые пятна» и в результате представил читателям замечательно ясную картину.

Тематика книги относится к проверке статистических гипотез. Обсуждается важный аспект этой проблемы: как следует сравнивать разные статистические критерии, когда они предназначены для проверки одной гипотезы. Автор рассматривает непараметрические критерии и несколько основных гипотез, издавна находящихся в центре внимания статистической теории: согласия (выборки с данным распределением), однородности (двух или нескольких выборок), симметрии (распределения относительно заданного центра), независимости (двух или нескольких признаков). Каждой из этих гипотез в книге посвящена отдельная глава.

Для проверки этих гипотез теоретики предложили различные непараметрические критерии, начиная с А. Н. Колмогорова, который открыл свой знаменитый и теперь носящий его имя критерий в 1933 году. Это критерии типа Колмогорова–Смирнова, интегральные критерии типа омега-квадрат (Крамер–фон Мизес–Смирнов) и линейные ранговые критерии. Для каждой из упомянутых гипотез есть несколько непараметрических критериев, с помощью которых ее можно проверить. Поэтому естественно возникает проблема сравнения их между собой и выбор наилучшего, если возможно.

В первой главе собраны необходимые сведения из теории вероятностей и других областей математики. В последней главе Я. Ю. Никитин излагает новую, принадлежащую ему постановку задачи: для данного непараметрического критерия найти такие распределения вероятностей, для которых этот критерий оптимален в определенном асимптотическом смысле.

Обсудим способы сравнения статистических критериев. Для простоты ограничимся простейшим планом эксперимента — повторной независимой выборкой неслучайного (фиксированного) объема. Только такие планы рассматривает и автор книги. Пусть T и V — два статистических критерия для проверки некоторой гипотезы. Правильнее было бы говорить о двух последовательностях T_n и V_n , отмечая зависимость от объема выборки, но мы будем опускать индекс n , когда это не приводит к недоразумению.

Пусть θ — некоторое распределение вероятностей, представляющее альтернати-

ву к проверяемой гипотезе. Через α и β обозначим, соответственно, уровень значимости и мощность критерия против альтернативы θ . Пусть $N_T(\alpha, \beta, \theta)$ обозначает число наблюдений (объем выборки), которое необходимо для того, чтобы критерий T при уровне значимости α достигал бы мощности β против альтернативы θ . Для критерия V аналогичное количество обозначим через $N_V(\alpha, \beta, \theta)$. Дробь

$$\frac{N_T(\alpha, \beta, \theta)}{N_V(\alpha, \beta, \theta)}$$

называют эффективностью критерия V по отношению к критерию T . (Если относительная эффективность больше 1, то критерий V требует меньшего числа наблюдений, чем критерий T , и потому V лучше, чем T).

К сожалению, теоретически вывести зависимость $N(\alpha, \beta, \theta)$ не удастся. Эта задача становится несколько проще, когда либо $\alpha \rightarrow 0$ (Бахадур), либо $\beta \rightarrow 1$ (Ходжес и Леман), либо альтернатива θ приближается к гипотезе (Питмен). АОЭ по Питмену вычислять несложно, когда критериальные статистики асимптотически нормальны. Теория в этом случае хорошо известна. Для негауссовских асимптотических распределений об эффективности по Питмену мало что можно сказать. По этим двум причинам об этом виде АОЭ автор говорит только при случае.

Главная тема книги — асимптотическая эффективность непараметрических критериев по Бахадур и по Ходжесу и Леману. Асимптотической эффективностью критерия V относительно критерия T Бахадур предложил называть

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{N_T(\alpha, \beta, \theta)}{N_V(\alpha, \beta, \theta)}.$$

Оказалось, что при $\alpha \rightarrow 0$ выборочный объем обычно асимптотически не зависит от β :

$$N_T(\alpha, \beta, \theta) \sim \frac{2 \ln \alpha^{-1}}{c_T(\theta)} \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0.$$

Функцию альтернативы $c_T(\theta)$ называют точным наклоном (по Бахадур). Ясно, что АОЭ по Бахадур критерия V против критерия T равна отношению их точных наклонов $c_V(\theta)/c_T(\theta)$. Следовательно, для ее вычисления необходимы точные наклоны для критериев.

Способ вычисления точного наклона для статистики T_n был дан Бахадуром (1971). Для непараметрических критериев (статистики которых при гипотезе распределены свободно) теорема Бахадура выглядит так:

Пусть а) $T_n \rightarrow b(\theta)$ по P_θ -вероятности при $n \rightarrow \infty$; б) при гипотезе

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln P(T_n \geq t) = -f(t),$$

где функция $f(\cdot)$ — непрерывная. Тогда

$$c_T(\theta) = 2f(b(\theta)).$$

Вычисление точных наклонов (с помощью теоремы Бахадура) оказалось весьма непростой задачей, так как оно требует знания вероятностей больших отклонений для критериальных статистик. (Предел T_n при альтернативе θ обычно вычислить нетрудно.) Так что большие отклонения для непараметрических статистик — это вторая большая тема книги.

Поясним это на примере проверки по выборке гипотезы согласия $H_0: F = F_0$. (Гипотеза о том, что данная выборка извлечена из генеральной совокупности с заданной функцией распределения F_0 . Поскольку далее мы говорим о непараметрических

критериях, F_0 предполагается непрерывной.) Для проверки упомянутой гипотезы можно применить известную статистику Колмогорова

$$D_n = \sup_t |F_n(t) - F_0(t)|,$$

где $F_n(\cdot)$ — функция распределения выборки, объем выборки n .

Вычисление точного наклона для критерия Колмогорова основано на том, что при $n \rightarrow \infty$

$$n^{-1} \ln P(D_n \geq a) \sim g(a),$$

где $g(\cdot)$ — некоторая вполне определенная функция (Abrahamson, 1967). По отношению к статистике $\sqrt{n}D_n$ (которая имеет хорошо известное асимптотическое распределение Колмогорова) речь действительно идет о больших отклонениях:

$$P(D_n \geq a) = P(\sqrt{n}D_n \geq a\sqrt{n}).$$

Точные наклоны для статистик типа Колмогорова–Смирнова (сюда можно присоединить статистики Койнера, Ватсона, Дарлингa и др., если речь о проверке гипотезы согласия) были получены усилиями многих исследователей. Если опустить детали (которые, разумеется, очень важны и в которых все дело), то можно сказать, что эти вычисления основывались на теореме Чернова (1952) и ее позднейших усовершенствованиях. Теорема Чернова утверждает, что для независимых одинаково распределенных случайных величин $Y_1, \dots, Y_n$ таких, что $P(Y_1 > 0) > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln P(Y_1 + \dots + Y_n \geq nu) = -f(u),$$

где $f(\cdot)$ определяется через производящую функцию моментов случайных величин Y_i .

Для статистики омега-квадрат и других статистик интегрального типа этот метод (переход к проблеме больших отклонений для сумм независимых случайных величин) применить не удавалось. Здесь был необходим другой подход. Первый результат о больших отклонениях для статистики омега-квадрат был получен А. А. Могульским (1977). Могульский использовал подход, который в книге назван вариационным. Именно этот подход развивает Я. Ю. Никитин и именно на этом пути он получает свои глубокие результаты об асимптотической эффективности. Поэтому на описании вариационного подхода к большим отклонениям надо остановиться подробнее. Кроме того, в развитие этого направления основной вклад внесли отечественные исследователи, что тоже примечательно.

Пусть $T(F_n)$ — статистика критерия (функционал от функции распределения выборки) для проверки гипотезы H_0 . Гипотезу H_0 мы отвергали, если наблюдаемое значение $T(F_n)$ неправдоподобно (с позиций H_0) велико. Например,

$$T(F_n) = \int [F_n(x) - F_0(x)]^2 dF_0(x),$$

если мы говорим о статистике ω_n^2 Крамера–фон Мизеса. Для вычисления точного наклона нам нужны вероятности (при H_0) событий вида

$$\{F_n: T(F_n) \geq a\}.$$

Еще в 1957 году И. Н. Санов показал, что для «достаточно регулярных» множеств Ω в пространстве функций распределения (на прямой)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln P(F_n \in \Omega) = -\inf \left\{ \ln \frac{dG}{dF_0} : G \in \Omega \right\} \quad (*)$$

для выборок из F_0 .

Санов назвал такие множества F_0 -отделимыми. К сожалению, проверить, является ли множество F_0 -отделимым, оказалось трудным делом. Поэтому в дальнейшем были предложены другие условия на Ω , при которых справедливо (*). В частности, важные результаты в этом направлении принадлежат А. А. Боровкову (1967).

Основываясь на этих результатах и используя конкретный вид уравнения Эйлера–Лагранжа в экстремальной задаче (*), А. А. Могульский (1977) показал, что (при гипотезе H_0)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(\omega_n^2 \geq a) = -\frac{\pi}{2} a + \dots$$

Правая часть представляет собой ряд по степеням $a^{1/2}$, который сходится при достаточно малых $a > 0$. К сожалению, для других интегральных статистик экстремальные задачи из (*) и уравнения Эйлера–Лагранжа оказались более сложными. К ним не удавалось применить метод Могульского непосредственно. Прорыв был сделан Я. Ю. Никитиным в 1980 г. Для решения подобных задач Никитин разработал общий метод, используя идеи нелинейного функционального анализа, в частности, теорию ветвления для решений нелинейных уравнений в банаховских пространствах. В результате для интегральных статистик вида

$$\int [F_n(x) - F(x)]^k q(F(x)) dF(x)$$

он вывел аналогичные ряды по степеням $a^{1/k}$, сходящиеся при достаточно малых $a > 0$, и дал метод рекуррентного расчета их коэффициентов. Из статистик такого вида наиболее известна статистика Андерсона–Дарлингга:

$$\int \frac{[F_n(x) - F(x)]^2}{F(x)[1 - F(x)]} dF(x).$$

Имея (при гипотезе) для $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\{T(F_n) \geq a\}$ представление в виде ряда, можно с помощью цитированной теоремы Бахадура вычислить и точные наклоны $st_T(\theta)$ — по крайней мере их главные части, когда альтернатива θ сближается с гипотезой. Я. Ю. Никитин приводит таблицы таких локальных точных наклонов для наиболее известных непараметрических критериев.

Остается еще сказать о непараметрических критериях, статистики которых основаны на рангах наблюдений. Для примера упомянем о статистике ранговых сумм Уилкоксона (для проверки гипотезы об однородности двух выборок) и о коэффициентах ранговой корреляции Спирмена и Кендалла (для проверки гипотезы о независимости признаков). Для ранговых статистик важные теоремы о вероятностях больших уклонений были получены еще в шестидесятых годах. На их основе в последующем были найдены и точные наклоны по Бахадуру для линейных ранговых статистик весьма общего вида.

Перечисленные выше результаты позволяют сравнивать непараметрические критерии по их точным бахадуrowsким наклонам. Нет ничего неожиданного в том, что среди них нет асимптотически оптимальных. Тем более удивительным представляются результаты Никитина, который показал, что некоторые известные непараметрические критерии асимптотически оптимальны по Ходжесу и Леману.

Обсудим этот вид АОЭ подробнее. По Ходжесу и Леману АОЭ критерия V относительно критерия T есть

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{N_T(\alpha, \beta, \theta)}{N_V(\alpha, \beta, \theta)}$$

(при фиксированных альтернативе θ и уровне значимости $\alpha > 0$). Оказывается, что в этих условиях необходимый объем выборки почти не зависит от α :

$$N_T(\alpha, \beta, \theta) \sim \frac{2 \ln(1 - \beta)^{-1}}{d_T(\theta)} \quad \text{при } \beta \rightarrow 1.$$

Функцию $d_T(\theta)$ альтернативы θ называют индексом Ходжеса–Лемана. Ясно, что АОЭ по Ходжесу–Леману критерия V против критерия T равна $d_V(\theta)/d_T(\theta)$. Вычисление индексов Ходжеса–Лемана — задача еще более трудная, чем вычисление точных наклонов по Бахадуру. Причина понятна: для этого нужны вероятности больших уклонений при альтернативе. Кроме того, теория не располагает каким-либо аналогом цитированной выше теоремы Бахадура. Поэтому понятие АОЭ по Ходжесу и Леману не получило большого развития. До работ Я. Ю. Никитина об этом виде асимптотической эффективности для непараметрических критериев было известно очень немного, ибо при альтернативе для этих критериев исчезает свобода от распределений. Развитый Я. Ю. Никитиным вариационный метод оказался полезен и при вычислениях вероятностей больших уклонений при альтернативах. Этим методом он вычислил индексы Ходжеса–Лемана для некоторых статистик и нашел их АОЭ. Для линейных ранговых статистик (для проверки гипотезы однородности) выяснилось, в частности, что их локальная АОЭ по Ходжесу–Леману, по Бахадуру и по Питмену одинаковы.

Вернемся к уже упоминавшейся асимптотической оптимальности. Она может быть установлена с помощью верхних границ для точных наклонов по Бахадуру и для индексов Ходжеса–Лемана. Пусть T — критерий для проверки гипотезы $\theta \in \Theta_0$, τ — некоторая альтернатива. Пусть $K(P, Q)$ — информация Кульбака–Лейблера для двух распределений P, Q , т.е.

$$K(P, Q) = \int \ln \frac{P(dx)}{Q(dx)} P(dx), \quad \text{если } P \ll Q$$

($K(P, Q) = +\infty$ в противном случае). Справедливы неравенства

$$c_T(\tau) \leq 2 \inf \{K(\tau, \theta): \theta \in \Theta_0\},$$

$$d_T(\tau) \leq 2 \inf \{K(\theta, \tau): \theta \in \Theta_0\}.$$

Критерий T естественно назвать асимптотически оптимальным по Бахадуру или по Ходжесу–Леману, если соответствующее неравенство для него выполняется как равенство. Я. Ю. Никитин показал, что асимптотически оптимальными по Ходжесу–Леману оказываются многие непараметрические критерии. Например, известные критерии Колмогорова, Смирнова и Крамера–фон Мизеса для проверки гипотез согласия и однородности. В то же время асимптотическая оптимальность по Бахадуру для статистических критериев встречается крайне редко, да и то лишь в локальном смысле.

В последней главе Я. Ю. Никитин исследует вопрос, который до его публикаций в литературе не обсуждался. Каковы те (однопараметрические) семейства распределений, для которых тот или иной статистический критерий (для проверки простой гипотезы против односторонних альтернатив) оказывается по Бахадуру асимптотически оптимальным? Он находит такие распределения для наиболее известных непараметрических критериев.

Читатели получили прекрасную книгу. Трудные вопросы современной статистической теории представлены в ней с впечатляющей ясностью, последовательностью и полнотой.