Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Веретенников, О полиномиальных оценках перемешивания для стохастических дифференциальных уравнений с градиентным сносом, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 1, 163–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:00:58

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2000 г.

ВЕРЕТЕННИКОВ А. Ю.*

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ДЛЯ
СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С
ГРАДИЕНТНЫМ СНОСОМ¹⁾

Для одного класса стохастических дифференциальных уравнений с нерегулярными коэффициентами получены оценки скорости сходимости к инвариантной мере и оценки перемешивания.

Ключевые слова и фразы: стохастическое дифференциальное уравнение, перемешивание, градиентный снос, неравенство Харнака.

1. Введение. Рассмотрим d -мерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = dB_t + (b(X_t) - \nabla U(X_t)) dt \quad (1)$$

с начальным условием

$$X_0 = x. \quad (2)$$

Здесь B_t , $t \geq 0$, — d -мерный винеровский процесс, X_t принимает значения в $\mathbb{R}^d$, b — ограниченная или линейно растущая борелевская вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^d$, U — функция типа потенциала, т.е. положительная и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) = +\infty$. Функция U предполагается локально ограниченной и гладкой, класса C^1 . Однако цель настоящей работы — установить эргодические свойства марковского процесса X_t (существование и единственность его инвариантной меры, оценки скорости сходимости к ней и оценки скорости перемешивания), не зависящие от производных функции U .

Известно, что для широкого класса эргодических марковских процессов как оценки некоторых коэффициентов перемешивания, так и оценки скорости сходимости к инвариантной мере можно вывести из оценок типа

$$\mathbb{E}_x \tau^k \leq C(1 + |x|^m), \quad (3)$$

$$\sup_t \mathbb{E}_x(1 + |X_t|^m) \leq C(1 + |x|^{m'}) \quad (4)$$

с некоторыми $k, m, m', C > 0$, где τ — момент остановки, $\tau = \inf(t \geq 0: |X_t| \leq K)$ для некоторого $K > 0$; ср. [7], [13]. В частности, для стохастического дифференциального уравнения (1) с $U \equiv 0$ и ограниченным b из (3) и (4) следуют оценки (см. [13])

$$\beta^x(t) + \text{var}(\mu_t^x - \mu^{\text{inv}}) \leq \tilde{P}(x)(1+t)^{-k'} \quad (5)$$

с любым $k' < k$, где $\beta^x(t)$ — коэффициент полной регулярности Колмогорова,

$$\beta^x(t) = \sup_{s \geq 0} \mathbb{E} \varlimsup_{A \in \mathcal{F}_{s+t}} (P(A|\mathcal{F}_{\leq t}) - P(A)),$$

* Институт проблем передачи информации РАН, Б. Каретный, 19, 101447 Москва, Россия; e-mail: ayu@sci.lpi.ac.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 98-01-00062, и CNRS, грант PICS-99 «Homogénéisation, moyennisation et milieux aléatoires. Méthodes probabilistes».

$\tilde{P}(x)$ — некоторая функция. Оценки вида (3)–(4) устанавливались для различных классов процессов многими авторами, укажем на работы [2], [7], [9], [11]–[14]. Еще один метод получения такого рода неравенств предложен в [5], где наряду с уже известными экспоненциальными и полиномиальными получены новые оценки субэкспоненциального типа. Иным способом более сильные субэкспоненциальные неравенства установлены в [10]. В [13] и [14] для «недивергентных» уравнений использовалось условие устойчивости

$$-p = \limsup_{|x| \rightarrow \infty} (b(x), x) < 0. \quad (6)$$

Оценок вида (3)–(4) для уравнений с градиентным сносом до сих пор не было (в [5] оценки зависят от производных, что сводит задачу к неградиентному случаю). Идея вывода оценок (3) в настоящей работе состоит в применении «цепочки уравнений Дынкина»; оценки (4) получаются с помощью теорем сравнения и прямых оценок решений эллиптических уравнений.

По-видимому, результаты настоящей работы допускают обобщение на случай уравнения с борелевским невырожденным коэффициентом диффузии

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t - \nabla(a^{-1}U)(X_t) dt,$$

где $a = \sigma\sigma^*/2$, однако при этом «регулярный» снос $b(x)$ допускается, лишь если a удовлетворяет условию Липшица.

2. Основные результаты. Дополнительно предполагаем, что

$$\sup_{x, x': |x-x'| \leq 1} (U(x) - U(x')) < \infty \quad (7)$$

и о структуре функции U известно следующее:

$$U(x) = U^1(x) + U^2(x), \quad U^1(x) = V(|x|), \quad \langle \nabla U^2(x), x \rangle \equiv 0. \quad (8)$$

Это означает, что «основная» градиентная часть сноса U^1 радиальна, тогда как «дополнительная» градиентная часть этого сноса ∇U^2 ортогональна направлению x в любой точке x . Пусть $\bar{b}(\xi)$ — измеримая функция такая, что

$$\bar{b}(\xi) \geq \sup_{|x|=\xi} \left\langle b(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle,$$

и выполнено условие устойчивости

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\xi \bar{b}(y) dy - V(\xi)}{\ln \xi} + d = -p < 0. \quad (9)$$

Вместо $|x|$ в (8), по-видимому, можно было бы использовать любую другую подходящую функцию $h(x)$, гладкую вне окрестности нуля и со свойством $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = +\infty$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (9) с $p > \frac{1}{2}$. Тогда для всякого $k < p + \frac{1}{2}$ и любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка (3) с $m = 2k + \varepsilon$ и некоторым $C = C_\varepsilon$ и оценка (4) с тем же m и $m' = m + \varepsilon$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (9) с $p > \frac{1}{2}$. Тогда существует единственная инвариантная мера марковского процесса X_t и справедлива оценка (5) с любым $k < p + \frac{1}{2}$ и $\tilde{P}(x)$ вида $C_\varepsilon(1+|x|^m)$, $m = 2k + \varepsilon$, с любым $\varepsilon > 0$ и некоторым C_ε .

Отметим, что для применения теорем 1, 2 необходимо условие $p > \frac{1}{2}$. Это соответствует критической постоянной $r_0 > \frac{3}{2}$ из [13].

3. Доказательства. 1. В силу предположения о структуре коэффициента сноса и теорем сравнения имеем: $|X_t| \leq y_t$,

$$dy_t = d\bar{w}_t + \left\{ \bar{b}(y_t) + \frac{d}{y_t} - V'(y_t) \right\} dt + d\varphi_t \equiv d\bar{w}_t - \bar{V}'(y_t) dt + d\varphi_t,$$

где $\bar{w}$ — одномерный винеровский процесс, y — процесс с мгновенным отражением в (любой) точке $K > 0$, φ — его локальное время в этой же точке и $\bar{V}'(y) = V'(y) - d/y - \bar{b}(y)$. Условие (9) означает, что для функции $\bar{V}$ справедливо соотношение $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{V}(\xi)/\ln \xi = p > 0$. В частности, отсюда следует, что при $K \geq 1$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие постоянные $C_\varepsilon^1, C_\varepsilon^2$, что при всех $\xi \geq 2$

$$C_\varepsilon^1 \left(p - \frac{\varepsilon}{2} \right) \ln \xi \leq \bar{V}(\xi) \leq C_\varepsilon^2 \left(p + \frac{\varepsilon}{2} \right) \ln \xi.$$

2. Инвариантная плотность процесса y_t при $K = |x|$ имеет вид $C(|x|) \exp(-2\bar{V}(y))$, $y > |x|$. Постоянная $C(|x|)$ оценивается с помощью нормировочного тождества:

$$C(|x|) = \left(\int_{|x|}^{\infty} \exp(-2\bar{V}(y)) dy \right)^{-1} \leq C_\varepsilon |x|^{2p+\varepsilon-1}, \quad |x| \geq 2.$$

3. Неравенства (4) с $m < 2p - 1$ устанавливаются прямыми вычислениями:

$$\mathbb{E}_x |X_t|^m \leq \mathbb{E}_{|x|} |y_t|^m \leq C(|x|) \int_{|x|}^{\infty} \xi^m \exp(-2\bar{V}(\xi)) d\xi \leq C_\varepsilon (1 + |x|^{m+2\varepsilon}),$$

и это верно при всех x в силу теорем сравнения для y_t с различными y_0 .

4. Пусть $v^q(\xi) = \mathbb{E}_\xi \gamma^q$, $\gamma = \inf(t: y_t \leq K)$, L — производящий оператор процесса y_t . В силу тождеств $(\int_0^\gamma 1 dt)^q = q \int_0^\gamma (\int_t^\gamma 1 ds)^{q-1} dt$, для всех q , для которых величина $v^q(\xi)$ конечна, имеет место равенство $v^q(y_0) = q \mathbb{E} \int_0^\gamma v^{q-1}(y_t) dt$, откуда (например, в силу формулы Ито) следуют уравнения

$$Lv^q = -qv^{q-1} \quad (q \geq 1), \quad (10)$$

ср. [3, теорема 13.17] (где обоснование иное). Начальные условия $v^q(K) = 0$ очевидны. Уравнение относительно v^q разрешимо в явном виде через v^{q-1} :

$$v^q(\xi) = q \int_K^\xi \exp(2\bar{V}(y_1)) dy_1 \int_{y_1}^\infty v^{q-1}(y_2) \exp(-2\bar{V}(y_2)) dy_2. \quad (11)$$

Это позволяет по индукции проверить неравенства ($\forall q < p + \frac{1}{2}$)

$$v^q(\xi) \leq C_{q,\varepsilon} (1 + \xi^{2q+\varepsilon}), \quad (12)$$

что и доказывает теорему 1.

5. Покажем справедливость теоремы 2. В силу принципа Харриса для существования инвариантной меры достаточно оценки (3) с любым $k \geq 1$.

6. Часть неравенства (5) для $\text{var}(\mu_t^x - \mu^{\text{inv}})$, а вместе с ним и единственность инвариантной меры устанавливаются с помощью оценок (3) и (4), метода каплинга и мозеровского неравенства Харнака для эллиптических уравнений дивергентного вида (см. [6]) — ср. [13] или [14], где использовалось параболическое неравенство Харнака. Поясним, что эллиптическое неравенство Харнака $\mathbb{E}_x f(X_\sigma) \leq C \mathbb{E}_{x'} f(X_\sigma)$ для любой неотрицательной функции f и любых $|x|, |x'| \leq 1$ и $\sigma := \inf(t \geq 0: |X_t| \geq 2)$ в силу условия (7) следует из теоремы 8.20 из [6] и справедливости уравнения $\nabla(\exp(2U(x)) \nabla v(x)) = 0$ для функции $v(x) = \mathbb{E}_x f(X_\sigma)$. В методе каплинга полезно использовать также неравенство $\sup_x \mathbb{P}_x\{\sigma > t\} \leq C \exp(-\lambda t)$, $C, \lambda > 0$, вытекающее, например, из марковского свойства процесса и оценок Аронсона [1], влекущих неравенство $\inf_{|x| \leq 2} \mathbb{P}_x\{|X_1| > 2\} > 0$. Для ссылки на оценки из [1] надо сделать замену времени $t \mapsto \exp(2U(X_t))t$, превращающую уравнение $v_t - \exp(-2U) \nabla(\exp(2U) \nabla v)/2 = 0$ в дивергентное $v_t - \nabla(\exp(2U) \nabla v)/2 = 0$, вспомнить про условие (7) и вне шара $|x| \leq 3$ поменять саму функцию U таким образом, чтобы она оказалась ограниченной и отделенной от нуля, что можно сделать, не меняя процесс до момента выхода из указанного шара.

7. Оценка для $\beta^x(t)$ следует из (4) и уже установленных неравенств для вариации в совокупности с марковским свойством, обеспечивающим первое равенство:

$$\beta^x(t) = \sup_{s \geq 0} \mathbb{E}_x \text{var}(\mu_t^{X_s} - \mu^{\text{inv}}) \leq \sup_{s \geq 0} \mathbb{E}_x C_\varepsilon \frac{(1 + |X_s|^{m+\varepsilon})}{(1+t)^{k'}} \leq C_\varepsilon \frac{(1 + |x|^{m+2\varepsilon})}{(1+t)^{k'}}.$$

Это завершает доказательство теоремы 2.

Автор благодарен анонимному рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению данного краткого изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aronson D. G. Bounds on the fundamental solutions of a parabolic equation. — Bull. Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, p. 890–896.
2. Asparndiarov S., Iasnogorodski R., Menshikov M. Passage-time moments for non-negative stochastic processes and an application to reflected random walks in a quadrant. — Ann. Probab., 1996, v. 24, № 2, p. 932–960.
3. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963, 859 с.
4. Fukushima M. Dirichlet Forms and Markov Processes. Amsterdam: North-Holland, 1980, 196 p.
5. Ganidis H., Roynette B., Simonot F. Convergence rate of some semi-groups to their invariant probability. — Stochastic Process. Appl., 1999, v. 79, № 2, p. 243–263.
6. Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer-Verlag, 1983, 513 p.
7. Калашиников В. В. Свойство γ -возвратности для марковских последовательностей. — Докл. АН СССР, сер. матем., 1973, т. 213, № 6, с. 1243–1246.
8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
9. Lamperti J. Criteria for stochastic processes, II: Passage-time moments. — J. Math. Anal. Appl., 1963, v. 7, p. 127–145.
10. Малышкин М. Н. Об субэкспоненциальной скорости перемешивания и скорости сходимости для диффузионных процессов. — Теория вероятн. и ее примен. (в печати).
11. Menshikov M., Williams R. J. Passage-time moments for continuous non-negative stochastic processes and applications. — Adv. Appl. Probab., 1996, v. 28, p. 747–762.
12. Silvestrov D. S. Recurrence relations for generalized hitting times for semi-Markov processes. — Ann. Appl. Probab., 1996, v. 6, № 2, p. 617–649.
13. Veretennikov A. Yu. On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 70, p. 115–127.
14. Веретенников А. Ю. О полиномиальном перемешивании и скорости сходимости для стохастических разностных и дифференциальных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 2, с. 312–327.

Поступила в редакцию
20.XI.1997

© 2000 г.

ВИСКОВ О. В.*

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ С НЕПРЕРЫВНОЙ ВВЕРХ КОМПОНЕНТОЙ И ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Моему Учителю Юрию Васильевичу Проторову

Показывается, что для случайного блуждания, имеющего непрерывную вверх компоненту, распределения некоторых моментов первого выхода и положения блуждающей частицы в эти моменты безгранично

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: viskov@bernoulli.mian.ras.ru