Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Закон арксинуса для ветвящихся процессов в случайной среде и процессов Гальтона–Ватсона, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 449–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp33>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 03:19:55

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 51

Выпуск 3, 2006 год

июль, август, сентябрь

© 2006 г.

АФАНАСЬЕВ В. И.*

ЗАКОН АРКСИНУСА ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ
В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ И
ПРОЦЕССОВ ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА¹⁾

Установлены два взаимосвязанных результата. Критический ветвящийся процесс в случайной среде проводит над высоким уровнем, если этот уровень достижим, часть своей жизни, подчиненную закону арксинуса. Если критический процесс Гальтона–Ватсона не вырождается в далекий момент времени, то доля численности будущих поколений в общем числе частиц подчинена закону арксинуса.

Ключевые слова и фразы: ветвящийся процесс в случайной среде, процесс Гальтона–Ватсона, остановленное случайное блуждание, условные принципы инвариантности, условные предельные теоремы, закон арксинуса.

1. Пусть $\xi_0 = 1, \xi_1, \xi_2, \dots$ — ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС), задаваемый последовательностью (случайных) независимых и одинаково распределенных производящих функций $f_1(s), f_2(s), \dots$, которая и называется случайной средой ($f_n(s)$ определяет закон размножения частиц в $(n-1)$ -м поколении). Определение ВПСС можно найти, например, в [1].

Положим $X_n = \ln f'_n(1)$, $\eta_n = f''_n(1)/(f'_n(1))^2$, $n \in \mathbb{N}$. Будем предполагать, что процесс $\{\xi_n\}$ является критическим, т.е.

$$\mathbb{E}X_1 = 0, \quad (1)$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: viafan@mail.ru; viafan@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00266) и гранта НШ-1758.2003.1 Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ.

и выполнены следующие моментные ограничения:

$$0 < \mathbf{E}X_1^2 \equiv \sigma^2 < +\infty, \quad \mathbf{E} \ln^q(\eta_1 \vee 1) < +\infty \quad (2)$$

при некотором $q > 2$.

В [1] показано, что при выполнении условий (1), (2) и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi_n > 0\} \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \quad (3)$$

где c_1 — положительная постоянная, и

$$\left\{ \frac{\ln \xi_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} \{W^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (4)$$

где случайный процесс $\{W^+(t)\}$ является броуновской извилиной, знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с σ -алгеброй борелевских множеств относительно топологии Скорохода.

Пусть $T = \min\{n: \xi_n = 0\}$ — момент вырождения $\{\xi_n\}$. Будем понимать под $W^+(t)$ при $t > 1$ стандартное броуновское движение, начинающееся из $W^+(1)$. Положим $\tau = \inf\{t > 0: W^+(t) = 0\}$. Из результатов (3), (4) можно вывести, что при выполнении условий (1), (2) и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{T}{n}; \frac{\ln(\xi_{[nt]} \vee 1)}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{\ln(\xi_{[tT]} \vee 1)}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, +\infty) \mid T > n \right\} \xrightarrow{D} \{\tau; W_1^+(t), W_2^+(t), t \in [0, +\infty)\}, \quad (5)$$

где $W_1^+(t) = W^+(t \wedge \tau)$, $W_2^+ = W^+(t\tau \wedge \tau)$. Знак $\xrightarrow{D}$ в соотношении (5) означает сходимость по распределению в $\mathbf{R} \times D[0, +\infty) \times D[0, +\infty)$ с σ -алгеброй борелевских множеств относительно топологии произведения (на $\mathbf{R}$ рассматривается обычная топология, а на $D[0, +\infty)$ — топология Скорохода).

Вывод соотношения (5) из (3) и (4) осуществлен в [2, теоремы 3, 5] при более сильных ограничениях на критический ВПСС, чем условия (2). Однако приведенные в [2] рассуждения справедливы и в более общей ситуации, рассматриваемой в настоящей работе. При этом требуется обобщить только лемму 4 из [2], что сделано в данной работе (см. замечание 1).

Пусть $T_x = \min\{n: \xi_n > x\}$ — момент первого достижения уровня x процессом $\{\xi_n\}$. В [2] найдена асимптотика при $x \rightarrow +\infty$ вероятности $\mathbf{P}\{T_x < +\infty\}$, а в [3] доказаны предельные теоремы для случайных величин $T_x/\ln^2 x$, T_x/T , $T/\ln^2 x$, рассматриваемых при условии $\{T_x < +\infty\}$. Эти результаты установлены при более сильных ограничениях на критический ВПСС, чем условия (2). Однако они справедливы и при выполнении этого условия. Асимптотика вероятности $\mathbf{P}\{T_x < +\infty\}$ находится

в лемме 3, а доказательство предельных теорем для указанных случайных величин опирается только на соотношения (3), (5) и леммы 1–3 настоящей работы.

В данной работе изучается время пребывания критического ВПСС над или под уровнем x , т.е. случайные величины

$$\mu_x = \#\{i: \xi_i > x\}, \quad \nu_x = \#\{i: 0 < \xi_i \leq x\},$$

при условии $\{T_x < +\infty\}$. Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. При выполнении условий (1), (2) и $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{\sigma^2 \mu_x}{2 \ln^2 x} \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \mu,$$

где случайная величина μ имеет плотность вероятностей

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi u}} - 2e^u (1 - \Phi(\sqrt{2u})), \quad u > 0$$

(здесь $\Phi(u)$ — функция распределения стандартного нормального закона).

Теорема 2. При выполнении условий (1), (2) и $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{\sigma^2 \nu_x}{2 \ln^2 x} \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \nu,$$

где случайная величина ν имеет следующее преобразование Лапласа:

$$\mathbf{E} \exp(-s\nu) = \frac{2\sqrt{s}}{\operatorname{sh}(2\sqrt{s})}, \quad s > 0.$$

Следующая теорема утверждает, что доля времени, проведенного критическим ВПСС над высоким уровнем, при условии, что этот уровень достижим, подчинена закону арксинуса.

Теорема 3. При выполнении условий (1), (2), $u \in [0, 1]$ и $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{\mu_x}{T} \leq u \mid T_x < +\infty \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{\nu_x}{T} \leq u \mid T_x < +\infty \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{u}). \end{aligned}$$

2. При доказательстве теорем 1–3 важную роль играют следующие леммы.

Лемма 1. При выполнении условий (1), (2)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(T \leq \varepsilon \ln^2 x \mid T_x < +\infty) = 0.$$

Доказательство. Пусть P_f и E_f означают соответственно вероятность и математическое ожидание, вычисленные при фиксированной случайной среде $\{f_n(\cdot)\}$. Тогда при натуральном x и положительном ε

$$\begin{aligned} P_f\{T_x < +\infty, T \leq \varepsilon \ln^2 x\} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=x+1}^{+\infty} P_f\{T_x = k, \xi_k = l, T \leq \varepsilon \ln^2 x\} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=x+1}^{+\infty} P_f\{T_x = k, \xi_k = l\} (P_f^{(k)}\{T \leq \varepsilon \ln^2 x - k\})^l, \end{aligned}$$

где индекс k у вероятности $P_f^{(k)}$ означает, что рассматривается процесс, начинающийся с одной частицы k -го поколения. Очевидно, случайные величины $P_f\{T_x = k, \xi_k = l\}$ и $P_f^{(k)}\{T \leq \varepsilon \ln^2 x - k\}$ независимы, причем последняя случайная величина распределена так же, как $P_f\{T \leq \varepsilon \ln^2 x - k\}$, поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_x < +\infty, T \leq \varepsilon \ln^2 x\} \\ = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=x+1}^{+\infty} \mathbf{P}\{T_x = k, \xi_k = l\} \mathbf{E}(P_f\{T \leq \varepsilon \ln^2 x - k\})^l. \end{aligned}$$

Далее, при $k > 0$ и $l > x$

$$(P_f\{T \leq \varepsilon \ln^2 x - k\})^l \leq (P_f\{T \leq \varepsilon \ln^2 x\})^x.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\{T_x < +\infty, T \leq \varepsilon \ln^2 x\} \leq \mathbf{P}\{T_x < +\infty\} \mathbf{E}(P_f\{T \leq \varepsilon \ln^2 x\})^x. \quad (6)$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(P_f\{T \leq \varepsilon \ln^2 x\})^x = 0. \quad (7)$$

Это эквивалентно соотношению

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(P_f\{T \leq n\})^{\exp(\sqrt{n/\varepsilon})} = 0.$$

По неравенству Агрести (см., например, соотношение (3.4) в [1]) при натуральном n

$$P_f\{T \leq n\} \leq 1 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} \exp(-S_i) + \exp(-S_n) \right)^{-1}.$$

Положим $\delta_i = \ln \eta_i$, тогда

$$P_f\{T \leq n\} \leq 1 - \zeta_n^{-1}, \quad (8)$$

где $\zeta_n = \sum_{i=0}^{n-1} \exp(-S_i + \delta_{i+1}) + \exp(-S_n)$, причем $\zeta_n \geq 1$. Ввиду соотношения (8), чтобы установить справедливость (7), достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(1 - \zeta_n^{-1})^{\exp(\sqrt{n/\varepsilon})} = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим случайные события

$$A_1 = \left\{ \sup_{0 \leq i \leq n} (-S_i) > \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n}{\varepsilon}} \right\}, \quad A_2 = \left\{ \sup_{1 \leq i \leq n} \delta_i > \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n}{\varepsilon}} \right\}.$$

По принципу инвариантности Прохорова–Донскера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}\left\{ \sup_{t \in [0,1]} W(t) > \frac{1}{4\sigma\sqrt{\varepsilon}} \right\},$$

где $\{W(t)\}$ — стандартное броуновское движение, начинающееся в нуле. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_1) = 0. \quad (10)$$

Далее, замечая, что $\delta_1 \leq \ln(\eta_1 \vee 1)$, и применяя неравенство Чебышёва с учетом условия (2), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_2) &= 1 - \left(1 - \mathbf{P}\left\{ \delta_1 > \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n}{\varepsilon}} \right\} \right)^n \\ &\leq 1 - \left(1 - \mathbf{P}\left\{ \ln(\eta_1 \vee 1) > \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n}{\varepsilon}} \right\} \right)^n \\ &\leq 1 - (1 - 4^q \varepsilon^{q/2} \mathbf{E} \ln^q(\eta_1 \vee 1) n^{-q/2})^n. \end{aligned}$$

Откуда, учитывая, что $q > 2$, находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_2) = 0. \quad (11)$$

Ввиду соотношений (10) и (11)

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left[(1 - \zeta_n^{-1})^{\exp(\sqrt{n/\varepsilon})}; A_1\right] \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left[(1 - \zeta_n^{-1})^{\exp(\sqrt{n/\varepsilon})}; A_2\right] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Покажем, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left[(1 - \zeta_n^{-1})^{\exp(\sqrt{n/\varepsilon})}; \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\right] = 0. \quad (13)$$

Действительно, если осуществляется случайное событие $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$, то $\zeta_n \leq (n+1) \exp(\sqrt{n/\varepsilon}/2)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} (1 - \zeta_n^{-1})^{\exp(\sqrt{n/\varepsilon})} &\leq \exp\left(-\zeta_n^{-1} \exp\left(\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}\right)\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{\exp(\sqrt{n/\varepsilon}/2)}{n+1}\right), \end{aligned}$$

откуда следует соотношение (13). Из соотношений (12), (13) вытекает (9) и, следовательно, (7). Из соотношений (6) и (7) получаем утверждение леммы 1.

З а м е ч а н и е 1. Поскольку (см., например, [4])

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} W(t) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} = 0,$$

то соотношение (10) можно усилить: в условиях леммы 1

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^{-1} \mathbf{P}(A_1) = 0.$$

Откуда, учитывая соотношения (11), (13), получаем, что в условиях леммы 1

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^{-1} \mathbf{E}(1 - \zeta_n^{-1})^{\exp(\sqrt{n/\varepsilon})} = 0.$$

Это утверждение есть усиление леммы 4 из [2], которое, как говорилось ранее, позволяет доказать соотношение (5).

Следующее утверждение легко вытекает из доказательства леммы 1 работы [3].

Лемма 2. Пусть $\{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}$ — броуновская экскурсия, α — равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ случайная величина, не зависящая от $\{W_0^+(t)\}$. Конечномерные распределения случайных элементов

$$\left\{ \tau; W_1^+(t), W_2^+(t), t \in [0, +\infty) \right\}$$

и

$$\left\{ \alpha^{-2}; \alpha^{-1} W_0^+((\alpha^2 t) \wedge 1), \alpha^{-1} W_0^+(t), t \in [0, +\infty) \right\}$$

совпадают ($W_0^+(t) = 0$ при $t > 1$).

Лемма 3. При выполнении условий (1), (2) и $x \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{P}\{T_x < +\infty\} \sim \frac{c_2}{\ln x},$$

где $c_2 = c_1 \sigma \sqrt{\pi/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что при $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_x < +\infty\} &= \mathbf{P}\left\{ \sup_{n \geq 0} \xi_n > x \right\} = \mathbf{P}\left\{ \sup_{t \in [0,1]} \xi_{[tT]} > x \right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{ \sup_{t \in [0,1]} \ln(\xi_{[tT]} \vee 1) > \ln x \right\}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что при $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$\mathbf{P}\{T_x < +\infty\} = P_1(x, \varepsilon) + P_2(x, \varepsilon), \quad (14)$$

где

$$P_1(x, \varepsilon) = \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} \ln(\xi_{[tT]} \vee 1) > \ln x \mid T > \varepsilon \ln^2 x\right) \mathbf{P}\{T > \varepsilon \ln^2 x\},$$

$$P_2(x, \varepsilon) = \mathbf{P}(T \leq \varepsilon \ln^2 x \mid T_x < +\infty) \mathbf{P}\{T_x < +\infty\}.$$

В силу соотношения (5)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} \ln(\xi_{[tT]} \vee 1) > \ln x \mid T > \varepsilon \ln^2 x\right) = \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} W_2^+(t) > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}.$$

Таким образом, ввиду соотношения (3) при $x \rightarrow +\infty$

$$P_1(x, \varepsilon) \sim \frac{c_1}{\sqrt{\varepsilon} \ln x} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} W_2^+(t) > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}. \quad (15)$$

Заметим, что по лемме 2

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} W_2^+(t) > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\} &= \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} \frac{W_0^+(t)}{\alpha} > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\} \\ &= \int_0^1 \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > \frac{u}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\} du \\ &= \sigma\sqrt{\varepsilon} \int_0^{1/(\sigma\sqrt{\varepsilon})} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > v\right\} dv. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} W_2^+(t) > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\} &= \sigma \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > v\right\} dv \\ &= \sigma \mathbf{E} \sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (16)$$

(последнее математическое ожидание найдено в [5]). Ввиду соотношений (15) и (16)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \cdot P_1(x, \varepsilon) = c_1 \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (17)$$

По лемме 1

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_2(x, \varepsilon)}{\mathbf{P}\{T_x < +\infty\}} = 0. \quad (18)$$

Из соотношений (14), (17) и (18) следует утверждение леммы 3.

3. Условный принцип инвариантности (5) для критического ВПСС позволяет установить факт сходимости по распределению рассмотренных в теоремах 1–3 случайных величин и найти вид предельного распределения, сложно выражаемого через распределение некоторых функционалов от броуновской экскурсии. Для нахождения простого выражения

для предельного распределения используется следующий прием. Рассматривается критический процесс Гальтона–Ватсона и такие предельные теоремы для него, в которых предельные распределения совпадают с предельными распределениями из теорем 1–3.

Нам потребуются некоторые результаты для критического процесса Гальтона–Ватсона $Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \dots$, удовлетворяющего условию

$$0 < \mathbf{D}Z_1 \equiv 4\lambda < +\infty. \quad (19)$$

Известно, что при выполнении этого условия и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{Z_n > 0\} \sim \frac{1}{2\lambda n}.$$

Пусть $\tilde{T} = \min\{n > 0: Z_n = 0\}$ — момент вырождения процесса $\{Z_n\}$. Для формулировки нижеследующего условного принципа инвариантности для критического процесса Гальтона–Ватсона рассмотрим следующие функционалы от броуновской экскурсии $\{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}$:

а) локальное время

$$l_0^+(u) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 I_{[u, u+\varepsilon]}(W_0^+(t)) dt, \quad u \in [0, +\infty)$$

(здесь $I_A(\cdot)$ — индикатор множества A);

б) максимум $h_0^+ = \sup_{t \in [0, 1]} W_0^+(t)$.

В [6] доказано, что при выполнении условия (19) и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\tilde{T}}{n}; \frac{Z_{[nt]}}{\lambda n}, \frac{Z_{[t\tilde{T}]}}{\lambda n}, t \in [0, +\infty) \mid \tilde{T} > n \right\} \\ \xrightarrow{D} \left\{ \tilde{\tau}; Y^+(t), Y_0^+(t), t \in [0, +\infty) \right\}, \quad (20)$$

причем распределение случайного элемента в правой части задается формулой

$$\mathbf{P}\left\{ \tilde{\tau} \in A, \{Y^+(t)\} \in B, \{Y_0^+(t)\} \in C \right\} \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{h_0^+}{u} \in A, \frac{\{l_0^+(tu)\}}{u} \in B, \frac{\{l_0^+(th_0^+)\}}{u} \in C, h_0^+ > u \right\} du, \quad (21)$$

где A — борелевское множество в $\mathbf{R}$, а B и C — борелевские множества в $D[0, +\infty)$.

4. Доказательство теоремы 1. а) Очевидно, при $x, y > 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sigma^2 \mu_x}{\ln^2 x} > y \mid T_x < +\infty \right) = \mathbf{P}\left\{ \frac{\sigma^2 \mu_x}{\ln^2 x} > y \right\} (\mathbf{P}\{T_x < +\infty\})^{-1}. \quad (22)$$

Запишем представление при $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\sigma^2 \mu_x}{\ln^2 x} > y\right\} = P_1(x, \varepsilon, y) + P_2(x, \varepsilon, y), \quad (23)$$

где

$$P_1(x, \varepsilon, y) = \mathbf{P}\left\{\frac{\sigma^2 \mu_x}{2 \ln^2 x} > y, T > \varepsilon \ln^2 x\right\},$$

$$P_2(x, \varepsilon, y) = \mathbf{P}\left\{\frac{\sigma^2 \mu_x}{2 \ln^2 x} > y, T \leq \varepsilon \ln^2 x\right\}.$$

Ясно, что $P_2(x, \varepsilon, y) \leq \mathbf{P}\{T_x < +\infty, T \leq \varepsilon \ln^2 x\}$, поэтому ввиду леммы 1

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{P_2(x, \varepsilon, y)}{\mathbf{P}\{T_x < +\infty\}} = 0. \quad (24)$$

Обозначим $\lambda(A)$ меру Лебега борелевского множества A в $\mathbf{R}$. Тогда

$$\mu_x = \#\{i: \xi_i > x\} = T\lambda(\{t: \xi_{[tT]} > x\}) = T\lambda(\{t: \ln(\xi_{[tT]} \vee 1) > \ln x\}).$$

Следовательно,

$$P_1(x, \varepsilon, y) = \mathbf{P}\left(\frac{T\lambda(\{t: \ln(\xi_{[tT]} \vee 1) > \ln x\})}{\ln^2 x} > \frac{2y}{\sigma^2} \mid T > \varepsilon \ln^2 x\right) \\ \times \mathbf{P}\{T > \varepsilon \ln^2 x\}. \quad (25)$$

Пусть $\mu_0^+(x) = \lambda(\{t: W_0^+(t) > x\})$ — время пребывания броуновской экскурсии $\{W_0^+(t)\}$ выше уровня x . В силу соотношения (5) и леммы 2 первый множитель в правой части (25) стремится при $x \rightarrow \infty$ к

$$\mathbf{P}\left\{\tau\lambda\left(\left\{t: W_2^+(t) > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\right) > \frac{2y}{\sigma^2\varepsilon}\right\} \\ = \mathbf{P}\left\{\lambda\left(\left\{t: W_0^+(t) > \frac{\alpha}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\right) > \frac{2y\alpha^2}{\sigma^2\varepsilon}\right\} \\ = \int_0^1 \mathbf{P}\left\{\lambda\left(\left\{t: W_0^+(t) > \frac{v}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\right) > \frac{2yv^2}{\sigma^2\varepsilon}\right\} dv \\ = \int_0^1 \mathbf{P}\left\{\mu_0^+\left(\frac{v}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right) > \frac{2yv^2}{\sigma^2\varepsilon}\right\} dv = \sigma\sqrt{\varepsilon} \int_0^{1/(\sigma\sqrt{\varepsilon})} \mathbf{P}\{\mu_0^+(u) > 2yu^2\} du.$$

Что касается второго множителя в правой части (25), то ввиду соотношения (3) и леммы 3 при $x \rightarrow +\infty$ справедлива формула

$$\mathbf{P}\{T > \varepsilon \ln^2 x\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{P}\{T_x < +\infty\}. \quad (26)$$

В силу сказанного

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_1(x, \varepsilon, y)}{\mathbf{P}\{T_x < +\infty\}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\{\mu_0^+(u) > 2yu^2\} du. \quad (27)$$

Из соотношений (22)–(24) и (27) получаем, что при $y > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 \mu_x}{2 \ln^2 x} > y \mid T_x < +\infty \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P} \{ \mu_0^+(u) > 2yu^2 \} du. \quad (28)$$

б) Рассмотрим теперь критический процесс Гальтона–Ватсона $\{Z_n\}$ и покажем, что если выполнено условие (19) и $y > 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sum_{i=n}^{\infty} Z_i}{2\lambda n^2} > y \mid \tilde{T} > n \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P} \{ \mu_0^+(u) > 2yu^2 \} du. \quad (29)$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=n}^{\infty} Z_i = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i - \sum_{i=0}^{n-1} Z_i = \tilde{T} \int_0^1 Z_{[t\tilde{T}]} dt - n \int_0^1 Z_{[tn]} dt.$$

Поэтому ввиду соотношений (20) и (21)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sum_{i=n}^{\infty} Z_i}{2\lambda n^2} > y \mid \tilde{T} > n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\tilde{T}}{n} \int_0^1 \frac{Z_{[t\tilde{T}]}}{\lambda n} dt - \int_0^1 \frac{Z_{[tn]}}{\lambda n} dt > 2y \mid \tilde{T} > n \right) \\ &= \mathbf{P} \left\{ \tilde{\tau} \int_0^1 Y_0^+(t) dt - \int_0^1 Y^+(t) dt > 2y \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{h_0^+}{u^2} \int_0^1 l_0^+(th_0^+) dt - \frac{1}{u} \int_0^1 l_0^+(tu) dt > 2y, h_0^+ > u \right\} du. \quad (30) \end{aligned}$$

Известно (см. [7]), что для любого борелевского множества A в $\mathbf{R}$

$$\int_A l_0^+(s) ds = \int_0^1 I_A(W_0^+(s)) ds.$$

Следовательно,

$$h_0^+ \int_0^1 l_0^+(th_0^+) dt = \int_0^{h_0^+} l_0^+(s) ds = \int_0^1 I_{[0, h_0^+]}(W_0^+(s)) ds = 1, \quad (31)$$

$$u \int_0^1 l_0^+(tu) dt = \int_0^u l_0^+(s) ds = \int_0^1 I_{[0, u]}(W_0^+(s)) ds = 1 - \mu_0^+(u). \quad (32)$$

Поэтому правая часть соотношения (30) равна $\sqrt{2/\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{P} \{ \mu_0^+(u) > 2yu^2 \} du$, что и доказывает (29).

с) Итак, предельные распределения в (27) и (29) совпадают. Но предельное распределение в (29) можно найти, опираясь на следующий результат Линдвалла [8, теорема 3.3]: если выполнено условие (19), то при $x, s \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp \left(-s \frac{\sum_{i=0}^{\infty} Z_i}{2\lambda n^2} \right) \mid Z_0 = [2\lambda nx] \right] = \exp(-x\sqrt{s}),$$

причем сходимость равномерна по $x \in (0, a]$, где a — произвольное положительное число. Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\exp \left(-s \frac{\sum_{i=n}^{\infty} Z_i}{2\lambda n^2} \right) \mid Z_n > 0 \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbf{E} \left[\exp \left(-s \frac{\sum_{i=n}^{\infty} Z_i}{2\lambda n^2} \right) \mid Z_n = [2\lambda n x] \right] d\mathbf{P} \left(\frac{Z_n}{2\lambda n} \leq x \mid Z_n > 0 \right). \end{aligned}$$

По теореме Яглома при $x \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{Z_n}{2\lambda n} \leq x \mid Z_n > 0 \right) = 1 - \exp(-x).$$

В силу сказанного при $s \geq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp \left(-s \frac{\sum_{i=n}^{\infty} Z_i}{2\lambda n^2} \right) \mid Z_n > 0 \right] &= \int_0^{+\infty} \exp(-x(\sqrt{s} + 1)) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{s} + 1}. \end{aligned}$$

Но это означает, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\sum_{i=n}^{\infty} Z_i}{2\lambda n^2} \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} \mu, \quad (33)$$

где случайная величина μ имеет следующее преобразование Лапласа:

$$\mathbf{E} \exp(-s\mu) = \frac{1}{\sqrt{s} + 1}, \quad s \geq 0. \quad (34)$$

Из таблиц преобразований Лапласа находим, что правой части (34) соответствует оригинал

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi u}} - 2e^u(1 - \Phi(\sqrt{2u})).$$

Ввиду соотношений (28), (29) и (33) при $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{\sigma^2 \mu_x}{2 \ln^2 x} \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \mu,$$

где случайная величина μ та же, что и в соотношении (33). Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Дословно повторяя пункты а) и б) доказательства теоремы 1, получим при $y > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 \nu_x}{2 \ln^2 x} > y \mid T_x < +\infty \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P} \{ \nu_0^+(u) > 2yu^2 \} du, \quad (35)$$

где $\nu_0^+(x) = \lambda(\{t: W_0^+(t) \leq x\})$ — время пребывания броуновской экскурсии $\{W_0^+(t)\}$ ниже уровня x ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=0}^n Z_i}{2\lambda n^2} > y \mid \tilde{T} > n\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\{\nu_0^+(u) > 2yu^2\} du \quad (36)$$

для процесса Гальтона–Ватсона $\{Z_n\}$, удовлетворяющего условию (19).

Видно, что предельные распределения в (35) и (36) совпадают. Пейкс [9, теорема 4] установил, что при выполнении условия (19) и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\sum_{i=0}^n Z_i}{2\lambda n^2} \mid \tilde{T} > n \right\} \xrightarrow{D} \nu, \quad (37)$$

где случайная величина ν имеет следующее преобразование Лапласа:

$$\mathbf{E} \exp(-s\nu) = \frac{2\sqrt{s}}{\operatorname{sh}(2\sqrt{s})}, \quad s > 0.$$

Ввиду соотношений (35)–(37) при $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{\sigma^2 \nu_x}{2 \ln^2 x} \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \nu,$$

где случайная величина ν та же, что и в соотношении (37). Теорема 2 доказана.

6. Доказательство теоремы 3. Пусть $x > 0, u \in [0, 1]$. Очевидно, что

$$\frac{\mu_x}{T} = \lambda(\{t: \xi_{[tT]} > x\}),$$

поэтому при $\varepsilon > 0$ справедливо представление

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_x}{T} > u, T_x < +\infty\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_x}{T} > u\right\} = Q_1(x, \varepsilon, u) + Q_2(x, \varepsilon, u), \quad (38)$$

где

$$Q_1(x, \varepsilon, u) = \mathbf{P}\left\{\lambda(\{t: \xi_{[tT]} > x\}) > u, T > \varepsilon \ln^2 x\right\},$$

$$Q_2(x, \varepsilon, u) = \mathbf{P}\left\{\lambda(\{t: \xi_{[tT]} > x\}) > u, T \leq \varepsilon \ln^2 x\right\}.$$

Поскольку

$$Q_2(x, \varepsilon, u) \leq \mathbf{P}\{T_x < +\infty, T > \varepsilon \ln^2 x\},$$

то ввиду леммы 1

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{Q_2(x, \varepsilon, u)}{\mathbf{P}\{T_x < +\infty\}} = 0. \quad (39)$$

Далее,

$$Q_1(x, \varepsilon, u) = \mathbf{P}\left(\lambda(\{t: \ln(\xi_{[tT]} \vee 1) > \ln x\}) > u \mid T > \varepsilon \ln^2 x\right) \\ \times \mathbf{P}\{T > \varepsilon \ln^2 x\}. \quad (40)$$

В силу соотношения (5) и леммы 2 первый множитель в правой части (40) стремится при $x \rightarrow +\infty$ к

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\lambda\left(\left\{t: W_2^+(t) > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\right) > u\right\} &= \mathbf{P}\left\{\lambda\left(\left\{t: \frac{W_0^+(t)}{\alpha} > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\right) > u\right\} \\ &= \int_0^1 \mathbf{P}\left\{\lambda\left(\left\{t: W_0^+(t) > \frac{w}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\right) > u\right\} dw \\ &= \int_0^1 \mathbf{P}\left\{\mu_0^+\left(\frac{w}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right) > u\right\} dw = \sigma\sqrt{\varepsilon} \int_0^{\sigma\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{P}\{\mu_0^+(v) > u\} dv. \end{aligned}$$

Применяя еще формулу (26) для второго множителя в правой части (40), получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Q_1(x, \varepsilon, u)}{\mathbf{P}\{T_x < +\infty\}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\{\mu_0^+(v) > u\} dv. \quad (41)$$

Из соотношений (38), (39) и (41) следует, что при $u \in [0, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\mu_x}{T} > u \mid T_x < +\infty\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\{\mu_0^+(v) > u\} dv.$$

Завершает доказательство теоремы 3 следующее утверждение.

Лемма 4. При $u \in [0, 1]$

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{P}\{\mu_0^+(v) > u\} dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \arcsin \sqrt{1-u}.$$

Доказательство. Положим при $u \geq 0$

$$f(u) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\{\mu_0^+(v) > u\} dv.$$

Найдем преобразование Лапласа $F(s)$ функции $f(u)$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-su} f(u) du \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-su} \mathbf{P}\{\mu_0^+(v) > u\} du \right) dv, \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

Но внутренний интеграл равен $(1 - F_v(s))/s$, где $F_v(s)$ — преобразование Лапласа случайной величины $\mu_0^+(v)$, т.е.

$$F_v(s) = \mathbf{E}e^{-s\mu_0^+(v)}, \quad s \geq 0.$$

Следовательно,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s} (1 - F_v(s)) dv.$$

В [7, теорема 5.1] найдено интегральное представление для преобразования Лапласа $F_v(s)$, из которого нетрудно получить, что при $s > 0$

$$\frac{1}{s} (1 - F_v(s)) = \frac{1}{i\sqrt{\pi}s} \int_G \frac{\sqrt{z}e^z}{\operatorname{sh}(v\sqrt{2z})} \times \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(v\sqrt{2z}) + \operatorname{sh}(v\sqrt{2z})} - \frac{1}{\operatorname{ch}(v\sqrt{2z}) + \sqrt{1+s/z} \operatorname{sh}(v\sqrt{2z})} \right) dz,$$

где контур G представляет собой мнимую ось, у которой некоторый отрезок с центром в точке $z = 0$ заменен на правую половину окружности с центром в точке $z = 0$ (контур обходится снизу вверх). Откуда ввиду (42) находим, что $F(s) = (i\sqrt{2\pi}s)^{-1} \int_G e^z \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+s/z}\right) dz$. Поскольку при замене z на $\bar{z}$ подынтегральное выражение заменяется на сопряженное, то

$$F(s) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}s} \operatorname{Im} \int_{G^+} e^z \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+\frac{s}{z}}\right) dz,$$

где G^+ — часть контура G , лежащая над действительной осью. Наконец, применяя лемму Жордана, видим, что

$$\begin{aligned} F(s) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{-y} \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-\frac{s}{y}}\right) dy \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{-su} \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-\frac{1}{u}}\right) du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \int_0^1 e^{-su} \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-\frac{1}{u}}\right) du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 e^{-su} \arcsin \sqrt{1-u} du. \end{aligned}$$

Итак, $F(s)$ есть преобразование Лапласа функции

$$f(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \arcsin \sqrt{1-u}, \quad u \in [0, 1].$$

Лемма 4 доказана.

7. При доказательстве теорем 1 и 2 использовались соответствующие предельные теоремы для критического процесса Гальтона–Ватсона. Оказывается, теореме 3 соответствует следующий закон арксинуса для этого процесса.

Теорема 4. Пусть $\{Z_n\}$ — критический процесс Гальтона–Ватсона и выполнено условие (19). Тогда при $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=n}^{\infty} Z_i}{\sum_{i=0}^{\infty} Z_i} \leq x \mid Z_n > 0\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} Z_i}{\sum_{i=0}^{\infty} Z_i} \leq x \mid Z_n > 0\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \left(\sum_{i=0}^{\infty} Z_i \right)^{-1} &= n \int_0^1 Z_{[nt]} dt \left(\tilde{T} \int_0^1 Z_{[t\tilde{T}]} dt \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\tilde{T}}{n} \right)^{-1} \int_0^1 \frac{Z_{[nt]}}{\lambda n} dt \left(\int_0^1 \frac{Z_{[t\tilde{T}]}}{\lambda n} dt \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому в силу соотношений (20) и (21) при $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} Z_i}{\sum_{i=0}^{\infty} Z_i} \leq x \mid Z_n > 0 \right) \\ = \mathbf{P} \left\{ \tilde{\tau}^{-1} \int_0^1 Y^+(t) dt \left(\int_0^1 Y_0^+(t) dt \right)^{-1} \leq x \right\} \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{u}{h_0^+} \int_0^1 l_0^+(tu) dt \left(\int_0^1 l_0^+(th_0^+) dt \right)^{-1} \leq x, h_0^+ > u \right\} du. \end{aligned}$$

Но последнее выражение ввиду соотношений (31), (32) и леммы 4 равно при $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P} \{ 1 - \mu_0^+(u) \leq x, h_0^+ > u \} du \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P} \{ \mu_0^+(u) \geq 1 - x \} du = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

8. В заключение укажем, каким образом для теорем 1–3 подбираются соответствующие предельные теоремы для критического процесса Гальтона–Ватсона.

Рассмотрим простое случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbf{N}$, где $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения 1 и (-1) с одинаковыми вероятностями 0.5. Пусть $\mathcal{T} = \min\{n > 0: S_n \leq 0\}$. Введем остановленное случайное блуждание

$$\tilde{S}_n = \begin{cases} S_n, & n \leq \mathcal{T}, \\ 0, & n > \mathcal{T}, \end{cases}$$

и будем его рассматривать только при условии $\{\mathcal{T} > 1\}$.

В [3, теоремы 4, 6] доказано, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\mathcal{T}}{n}; \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sqrt{n}}, \frac{\tilde{S}_{[t\mathcal{T}]}}{\sqrt{n}}, t \in [0, +\infty) \mid \mathcal{T} > n \right\} \\ \xrightarrow{D} \left\{ \tau; W_1^+(t), W_2^+(t), t \in [0, +\infty) \right\}. \end{aligned}$$

Этот условный принцип инвариантности для остановленного случайного блуждания позволяет, например, доказать результат, аналогичный

теореме 1: при $x \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\tilde{\mu}_x}{2x^2} \mid \mathcal{T}_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \mu, \quad (43)$$

где $\mathcal{T}_x = \min\{n: \tilde{S}_n > x\}$, $\tilde{\mu}_x = \#\{i: \tilde{S}_i > x\}$.

Обозначим Z_n — число переходов блуждания $\{\tilde{S}_k\}$ из состояния n в состояние $(n+1)$. Нетрудно показать, что $\{Z_n\}$ является критическим процессом Гальтона–Ватсона с $\lambda = 0,5$. Теперь заметим, что

$$\tilde{\mu}_n = Z_n + 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} Z_i,$$

а случайное событие $\{\mathcal{T}_n < +\infty\}$ совпадает с $\{Z_n > 0\}$. Поэтому (43) можно переписать так: при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\sum_{i=n}^{\infty} Z_i}{n^2} \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} \mu,$$

а это как раз та предельная теорема (см. (33)), которая использовалась при доказательстве теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A. Criticality for branching processes in random environment. — Ann. Probab., 2005, v. 33, № 2, pp. 645–673.
2. Афанасьев В. И. О максимуме критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 1999, т. 11, № 2, с. 86–102.
3. Афанасьев В. И. О моменте достижения фиксированного уровня критическим ветвящимся процессом в случайной среде. — Дискретн. матем., 1999, т. 11, № 4, с. 33–47.
4. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
5. Durrett R. T., Iglehart D. L. Functionals of Brownian meander and Brownian excursion. — Ann. Probab., 1977, v. 5, № 1, p. 130–135.
6. Афанасьев В. И. Об условном принципе инвариантности для критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона. — Дискретн. матем., 2005, т. 17, № 1, с. 35–49.
7. Cohen J. W., Hooghiemstra G. Brownian excursion, the $M/M/1$ queue and their occupation times. — Math. Oper. Res., 1981, v. 6, № 4, p. 608–629.
8. Lindvall T. Limit theorems for some functionals of certain Galton–Watson branching processes. — Adv. Appl. Probab., 1974, v. 6, p. 309–321.
9. Pakes A. G. Some limit theorems for the total progeny of a branching process. — Adv. Appl. Probab., 1971, v. 3, p. 176–192.

Поступила в редакцию
28.XII.2004

Исправленный вариант
23.XI.2005