Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Висков, Случайное блуждание с непрерывной вверх компонентой и формула обращения Лагранжа, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 1, 166–175

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp330>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:11:14

Это завершает доказательство теоремы 2.

Автор благодарен анонимному рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению данного краткого изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aronson D. G. Bounds on the fundamental solutions of a parabolic equation. — Bull. Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, p. 890–896.
2. Asparndiarov S., Iasnogorodski R., Menshikov M. Passage-time moments for non-negative stochastic processes and an application to reflected random walks in a quadrant. — Ann. Probab., 1996, v. 24, № 2, p. 932–960.
3. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963, 859 с.
4. Fukushima M. Dirichlet Forms and Markov Processes. Amsterdam: North-Holland, 1980, 196 p.
5. Ganidis H., Roynette B., Simonot F. Convergence rate of some semi-groups to their invariant probability. — Stochastic Process. Appl., 1999, v. 79, № 2, p. 243–263.
6. Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer-Verlag, 1983, 513 p.
7. Калашиников В. В. Свойство γ -возвратности для марковских последовательностей. — Докл. АН СССР, сер. матем., 1973, т. 213, № 6, с. 1243–1246.
8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
9. Lamperti J. Criteria for stochastic processes, II: Passage-time moments. — J. Math. Anal. Appl., 1963, v. 7, p. 127–145.
10. Малышкин М. Н. Об субэкспоненциальной скорости перемешивания и скорости сходимости для диффузионных процессов. — Теория вероятн. и ее примен. (в печати).
11. Menshikov M., Williams R. J. Passage-time moments for continuous non-negative stochastic processes and applications. — Adv. Appl. Probab., 1996, v. 28, p. 747–762.
12. Silvestrov D. S. Recurrence relations for generalized hitting times for semi-Markov processes. — Ann. Appl. Probab., 1996, v. 6, № 2, p. 617–649.
13. Veretennikov A. Yu. On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 70, p. 115–127.
14. Веретенников А. Ю. О полиномиальном перемешивании и скорости сходимости для стохастических разностных и дифференциальных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 2, с. 312–327.

Поступила в редакцию
20.XI.1997

© 2000 г.

ВИСКОВ О. В.*

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ С НЕПРЕРЫВНОЙ ВВЕРХ КОМПОНЕНТОЙ И ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Моему Учителю Юрию Васильевичу Проторову

Показывается, что для случайного блуждания, имеющего непрерывную вверх компоненту, распределения некоторых моментов первого выхода и положения блуждающей частицы в эти моменты безгранично

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: viskov@bernoulli.mian.ras.ru

делимы. Доказательства элементарны и базируются на алгебраическом подходе к классической формуле обращения Лагранжа, позволяющем явно выписать соответствующие меры Леви.

Ключевые слова и фразы: формула обращения Лагранжа, алгебра Гейзенберга–Вейля, безгранично делимые распределения, непрерывные вверх случайные блуждания.

1. Рассмотрим случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин, принимающих лишь целые значения. Для положительного целого k обозначим τ_k первый момент пересечения случайным блужданием уровня k :

$$\tau_k = \min\{n; S_n \geq k\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Предположим, что выполняется условие

$$P\{\xi_1 > 1\} = 0, \quad (*)$$

из которого ясно, что случайный момент τ_k совпадает с моментом первого попадания случайного блуждания в точку k . По этой причине случайное блуждание, удовлетворяющее условию (*), называют непрерывным вверх случайным блужданием.

Будет показано, что для любого случайного блуждания, удовлетворяющего условию (*), случайная величина τ_1 имеет безгранично делимое распределение (возможно, с ненулевой массой на бесконечности). Для биномиального случайного блуждания, когда $\xi_i = 1$ или -1 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно, этот замечательный факт был отмечен Феллером [1] в его докладе, сделанном по приглашению на Курантовском Симпозиуме в 1965 году. Основным инструментом, позволившим обобщить этот результат Феллера, послужила классическая формула обращения Лагранжа, различным формам которой посвящен п. 3. При этом преследовалась двоякая цель. С одной стороны, можно не отсылать потенциального читателя к стандартным первоисточникам [2]–[5], и в этом смысле настоящая работа становится самодостаточной. Более того, представляется, что одна из приводимых форм (экспоненциальная форма) ранее не отмечалась. С другой стороны, приводимые здесь доказательства базируются на методах некоммутативной алгебры, что позволяет существенно расширить сферу применимости этой формулы, традиционно ограниченную рамками теории функций комплексной переменной. Именно это расширение дает возможность, практически не меняя хода рассуждений, изучить (см. п. 10) многомерное случайное блуждание, имеющее хотя бы одну непрерывную вверх компоненту.

2. Для нахождения распределения случайной величины τ_k будем использовать технику производящих функций. Отметим прежде всего, что, ввиду условия (*), для произвольных положительных целых l и k интервал времени $\tau_{k+l} - \tau_l$ между моментами первого посещения случайным блужданием уровней l и $l+k$ стохастически независим от τ_l и его распределение совпадает с распределением τ_k . Этот факт находит свое аналитическое отражение в мультипликативном свойстве производящих функций $F_k(t) = Et^{\tau_k}$. Другими словами, справедливы равенства

$$F_k(t) = F^k(t), \quad F(t) = F_1(t).$$

Понятно, далее, что если первый шаг случайного блуждания положителен, то $\tau_1 = 1$. С другой стороны, предшествующие аргументы показывают, что если $\xi_1 = -k$, $k = 0, 1, \dots$, то $\tau_1 = 1 + \sigma_{k+1}$, где σ_{k+1} обозначена независимая от ξ_1 случайная величина, распределение которой совпадает с распределением τ_{k+1} . Поскольку, как это было отмечено, производящая функция τ_{k+1} равна $F^{k+1}(t)$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} t^k \sum_{j=-\infty}^1 P\{\tau_1 = k; \xi_1 = j\} = tP\{\xi_1 = 1\} + t \sum_{j=-\infty}^0 F^{-j+1}(t) P\{\xi_1 = j\} \\ &= tF(t) \sum_{j=-\infty}^{\infty} P\{\xi_1 = j\} F^{-j}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения производящей функции $F(t)$ необходимо найти решение уравнения

$$1 = tP\left(\frac{1}{f(t)}\right),$$

где $P(t) = Et^{\zeta_1}$ — производящая функция шага рассматриваемого случайного блуждания.

Удобно переписать это уравнение, используя случайную величину $\zeta_1 = 1 - \xi_1$, принимающую целые неотрицательные значения, и ее производящую функцию $\varphi(t) = Et^{\zeta_1} = tP(t^{-1})$. Это приводит к равенствам

$$F(t) = t\varphi(F(t)), \quad F(0) = 0. \quad (1)$$

3. Соотношение (1) представляет собой частный случай ($x = 0$) классического уравнения Лагранжа (см., например, [2] или [3]):

$$u = x + t\varphi(u), \quad u|_{t=0} = x. \quad (2)$$

Существует довольно много различных подходов к решению уравнения (2), которые приводят в зависимости от используемых инструментов к различным формам представления получаемого решения. Интересные замечания исторического характера заинтересованный читатель может найти в работах [3] и [4]. В этой заметке мы будем следовать предложенному в [5] алгебраическому подходу, позволяющему свести к минимуму аналитические предположения и тем самым существенно расширить область применимости получаемых формул.

Прежде всего приведем два хорошо известных утверждения в необходимой для дальнейшего изложения форме.

Предположим, что $\varphi(\cdot)$ — произвольный формальный степенной ряд с коэффициентами из произвольной коммутативной и ассоциативной алгебры $\mathcal{F}$ над полем рациональных чисел. Тогда уравнение (2), где x и t — произвольные коммутирующие переменные, имеет единственное решение u в кольце $\mathcal{F}[t]$ формальных степенных рядов от переменной t . Более того, если u — решение уравнения (2), то для любого формального степенного ряда $\Phi(\cdot) \in \mathcal{F}[t]$ имеют место два (эквивалентных друг другу) представления:

$$\Phi(u) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} D^n [\Phi(x) \varphi^n(x) (1 - t\varphi'(x))], \quad D = ' = \frac{d}{dx}; \quad (3)$$

$$\Phi(u) = \Phi(x) + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} D^{n-1} [\Phi'(x) \varphi^n(x)]. \quad (4)$$

Алгебраическое доказательство этих соотношений было рассказано автором на Первом конгрессе общества Бернулли [6]. Этот подход к установлению справедливости (3) и (4), основные вехи которого представлены ниже, базируется на использовании алгебры Гейзенберга–Вейля, известной своими применениями в квантовой физике.

4. Предположим, что элементы a, b и c некоторой ассоциативной алгебры удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a, b] = ab - ba = c, \quad [a, c] = [b, c] = 0. \quad (5)$$

В квантовой механике равенства (5) часто называются каноническими коммутационными соотношениями, что отражает их фундаментальную роль в этой науке. Используя индуктивные рассуждения, легко показать, что из (5) следуют равенства $a^n b = ba^n + nca^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, откуда становится очевидным, что для любого полинома (или формального степенного ряда) $\Phi(\cdot)$

$$\Phi(a)b = b\Phi(a) + c\Phi'(a). \quad (6)$$

Здесь (и далее) $\Phi'(\cdot)$ означает производную $\Phi(\cdot)$. Точно так же устанавливается, что

$$a\Phi(b) = \Phi(b)a + c\Phi'(b). \quad (7)$$

В свою очередь, основываясь на равенстве (6) и снова используя индукцию, убеждаемся в справедливости следующего соотношения:

$$c^n \Phi^{(n)}(a) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-b)^m \Phi(a) b^{n-m}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} c^{n+1} \Phi^{(n+1)}(a) &= c \left(c^n \Phi^{(n)}(a) \right)' = c^n \Phi^{(n)} b - b c^n \Phi^{(n)} \\ &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-b)^m \Phi(a) b^{n+1-m} + \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-b)^{m+1} \Phi(a) b^{n-m} \\ &= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} (-b)^m \Phi(a) b^{n+1-m}, \end{aligned}$$

где последовательно использовались соотношения (6), (8) и определяющее треугольник Паскаля биномиальное тождество $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$.

Фиксируем теперь произвольный формальный степенной ряд $\varphi(\cdot)$ и подставим в (8) $\Phi(\cdot) \varphi^n(\cdot)$ вместо $\Phi(\cdot)$. Это приводит к тождеству

$$c^n t^n (\Phi(a) \varphi^n(a))^{(n)} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-b)^m t^n \varphi^m(a) \Phi(a) \varphi^{n-m}(a) b^{n-m} t^{n-m}, \quad (9)$$

где, чтобы упростить дальнейшее изложение, обе части равенства помножены на t^n (t — произвольная переменная, коммутирующая с a, b и c). Суммирование (9) по всем целым неотрицательным n приводит к следующему равенству формальных степенных рядов от переменной t :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{c^n t^n}{n!} (\Phi(a) \varphi^n(a))^{(n)} = V \Phi(a) U, \quad (10)$$

где

$$V = \sum_{n \geq 0} \frac{(-b)^n t^n}{n!} \varphi^n(a), \quad U = \sum_{n \geq 0} \varphi^n(a) \frac{b^n t^n}{n!}. \quad (11)$$

Оказывается, что формальные степенные ряды (11) обладают замечательными коммутационными свойствами. В самом деле, последовательное повторное использование тождеств (7) и (11) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} aV &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} (ab^n) \varphi^n(a) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} (b^n a + ncb^{n-1}) \varphi^n(a) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} b^n \varphi^n(a) a - tc \sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!} b^{n-1} \varphi^n(a) V(a - tc\varphi(a)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$aV = V(a - tc\varphi(a)). \quad (12)$$

Аналогичные аргументы доказывают справедливость двойственного к (12) соотношения

$$Ua = (a - tc\varphi(a))U. \quad (13)$$

Итерируя (12) и (13), без труда убеждаемся, что для произвольного формального степенного ряда $\Phi(\cdot)$ выполняются следующие равенства:

$$\Phi(a) V = V \Phi(a - tc\varphi(a)), \quad U \Phi(a) = \Phi(a - tc\varphi(a)) U. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь в кольце формальных степенных рядов от переменной t уравнение

$$u = a + tc\varphi(u), \quad (15)$$

где $\varphi(\cdot)$ — заданный формальный степенной ряд. Очевидно, соотношение (15) однозначно определяет формальный степенной ряд u (по степеням t), и поэтому, выбрав в (14) в качестве $\Phi(\cdot)$ ряд u , где u — решение (15), находим, что

$$uV = Va, \quad aU = Uu.$$

Итерация этих равенств доказывает справедливость тождеств

$$\Phi(u)V = V\Phi(a), \quad \Phi(a)U = U\Phi(u) \quad (16)$$

для любого формального степенного ряда $\Phi(\cdot)$. С учетом (16) равенство (10) может быть переписано в одной из следующих форм:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{t^n c^n}{n!} (\Phi(a) \varphi^n(a))^{(n)} = \Phi(u) VU = VU \Phi(u). \quad (17)$$

Полагая здесь $\Phi(a) \equiv 1$, получаем

$$VU = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n c^n}{n!} (\varphi^n(a))^{(n)}. \quad (18)$$

Сравнение (17) с (18) приводит к следующей форме формулы обращения:

$$\Phi(u) = \frac{\sum_{n \geq 0} t^n c^n (\Phi(a) \varphi^n(a))^{(n)} / n!}{\sum_{n \geq 0} t^n c^n (\varphi^n(a))^{(n)} / n!}. \quad (19)$$

К сожалению, полученная форма (19) формулы обращения требует производить деление на ряд (18). Этот недостаток можно легко устранить, если заметить, что

$$\begin{aligned} VU &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n c^n}{n!} (n \varphi^{n-1}(a) \varphi'(a))^{(n-1)} \\ &= 1 + tc \sum_{n \geq 0} \frac{t^n c^n}{n!} (\varphi^n(a) \varphi'(a))^{(n)} = 1 + tc V \varphi'(a) U. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств сначала используется определение (11), затем производится дифференцирование, а последний шаг основывается на тождестве (10). Таким образом, $1 = V(1 - tc \varphi'(a))U$, что и приводит к желаемым формам формулы обращения:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n c^n}{n!} (\varphi^n(1 - tc \varphi'(a)) \Phi(a))^{(n)} \\ &= \Phi(a) + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n c^n}{n!} [\Phi'(a) \varphi^n(a)]^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что последнее равенство здесь является простым следствием предыдущего (и наоборот, конечно). Итак, установлена справедливость формул обращения (3) и (4).

5. Для дальнейшего нам потребуется еще одна (экспоненциальная) форма формулы обращения. С этой целью вернемся к уравнению Лагранжа (2) и продифференцируем обе части этого уравнения по t . В результате получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(u) + t \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\varphi(u)}{1 - t \varphi'(u)} = \frac{u - x}{t(1 - t \varphi'(u))}. \quad (20)$$

Однако из равенства (3) с $(1 - t \varphi'(x))^{-1}$, играющим роль $\Phi(x)$, находим, что

$$\frac{1}{1 - t \varphi'(u)} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n D^n}{n!} [\varphi^n(x)].$$

Поэтому уравнение (20) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \ln(u-x)}{\partial t} = \frac{1}{t} + \sum_{n \geq 1} \frac{t^{n-1}}{n!} D^n [\varphi^n(x)].$$

Из этого уравнения с очевидностью следует, что

$$\ln(u-x) = \ln At + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!n} D^n [\varphi^n(x)].$$

Ясно, что «постоянная интегрирования» равна $A = \varphi(x)$, поскольку, как это видно из уравнения Лагранжа (2), $(u-x)/t \rightarrow \varphi(u)|_{t=0} = \varphi(x)$, когда $t \rightarrow 0$.

Итак, если u — решение уравнения (2), справедливо следующее равенство:

$$\frac{u-x}{t\varphi(x)} = \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!n} D^n [\varphi^n(x)] \right\}. \quad (21)$$

6. Теперь все подготовлено для доказательства основных результатов настоящей заметки. Вернемся к уравнению (1) и, имея в виду соотношения (2), (3), (4) и (21), соберем вместе все необходимые результаты. Справедливо следующее утверждение.

Предложение. Пусть задан произвольный формальный степенной ряд $\varphi(\cdot)$ с коэффициентами из произвольной коммутативной и ассоциативной алгебры $\mathcal{F}$ над полем рациональных чисел, и пусть $\varphi(0) \neq 0$. Тогда уравнение

$$u = t\varphi(u), \quad u|_{t=0} = 0, \quad (22)$$

имеет единственное решение и такое, что

$$\frac{u}{t\varphi(0)} = \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!n} D^n [\varphi^n(x)]|_{x=0} \right\}, \quad D = ' = \frac{d}{dx}; \quad (23)$$

и для любого формального степенного ряда $\Phi(\cdot)$ справедливы равенства

$$\Phi(u) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} D^n [\Phi(x) \varphi^n(x) (1 - t\varphi'(x))] |_{x=0}, \quad (24)$$

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} D^{n-1} [\Phi'(x) \varphi^n(x)] |_{x=0}. \quad (25)$$

7. Сначала воспользуемся соотношением (25) для нахождения явного вида распределения момента τ_k первого выхода непрерывного вверх случайного блуждания на уровень k . Вспомним, что производящая функция $F_k(t)$ случайной величины τ_k в этой ситуации равна $F^k(t)$, где $F(t) = F_1(t)$ определяется как решение уравнения (1). Поэтому из (25) с $\Phi(u) = u^k$ и $\varphi(x) = Ex^{1-\xi_1}$ находим, что

$$Et^{\tau_k} = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} D^{n-1} [kx^{k-1} Ex^{n-S_n}] |_{x=0}. \quad (26)$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях t в обеих частях равенства (26) приводит к следующему (известному) соотношению:

$$P\{\tau_k = n\} = \frac{k}{n} P\{S_n = k\}, \quad k, n > 0. \quad (27)$$

Удобно переписать это соотношение в терминах неотрицательных случайных величин $\zeta_i = 1 - \xi_i$, $i = 1, 2, \dots$:

$$P\{\tau_k = n\} = \frac{k}{n} P\{\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n = n - k\}, \quad k, n > 0.$$

Последнее равенство возникает в теории ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона [8]. В этой обстановке независимые и одинаково распределенные случайные величины

$\zeta_i, i = 1, 2, \dots$, задают количество потомков делящихся частиц, а случайная величина τ_k характеризует общее количество частиц, участвующих в процессе, начавшемся с k исходных частиц, до момента его вырождения.

8. Воспользуемся теперь предложением п. 6 и покажем, что при любом положительном значении λ (не обязательно целочисленном) функцию $F^\lambda(t)$ можно рассматривать как производящую функцию некоторой (возможно, дефектной, т.е. с положительной вероятностью принимающей бесконечное значение) случайной величины. С этой целью удобно ввести производящую функцию $G(t) = F(t)/t$ случайной величины $\tau_1 - 1$. Из (25) и (23) соответственно, легко следует, что для положительного целого λ справедливы представления

$$G^\lambda(t) = \sum_{m \geq 0} \frac{t^m}{m!} \frac{\lambda}{\lambda + m} D^m [\varphi^{\lambda+m}(x)]|_{x=0}, \quad (28)$$

$$G^\lambda(t) = \exp \left\{ \lambda \left[\ln \varphi(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!n} D^n [\varphi^n(x)]|_{x=0} \right] \right\}. \quad (29)$$

Из вида правых частей (28) и (29) понятно, что функция $G^\lambda(t)$ является абсолютно монотонной функцией λ , и поэтому, как хорошо известно, она однозначно определяется своими значениями в целых точках. Таким образом, (28) и (29) при любых положительных λ задают одну и ту же функцию, т.е. справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{m \geq 0} \frac{t^m}{m!} \frac{\lambda}{\lambda + m} D^m [\varphi^{\lambda+m}(x)]|_{x=0} \\ &= \exp \left\{ \lambda \left[\ln \varphi(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!n} D^n [\varphi^n(x)]|_{x=0} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Справедливость этого тождества можно установить и не обращаясь к теории абсолютно монотонных функций. В самом деле, из (22) и (25) с $\Phi(\cdot) = \varphi^\lambda(\cdot)$ получаем

$$\left(\frac{u}{t}\right)^\lambda = \varphi^\lambda(0) + \sum_{m \geq 1} \frac{t^m}{m!} D^{m-1} [\lambda \varphi^{m+\lambda-1}(x) \varphi'(x)]|_{x=0}.$$

Но

$$\frac{\lambda}{\lambda + m} D^m [\varphi^{\lambda+m}(x)] = \frac{\lambda}{\lambda + m} D^{m-1} [(\lambda + m) \varphi^{\lambda+m-1}(x) \varphi'(x)],$$

что и доказывает тождественность (28) и (29).

Соотношение (29) представляет собой каноническую форму производящей функции целочисленной безгранично делимой случайной величины. Впрочем, можно не обращаться к общей теории, поскольку факт безграничной делимости становится очевидным, если просто переписать (29) в виде

$$G^\lambda(t) = \exp(\lambda \ln \varphi(0)) \sum_{n \geq 0} \frac{(-\lambda \ln \varphi(0))^n}{n!} h^n(t), \quad (30)$$

где

$$h(t) = -\frac{1}{\ln \varphi(0)} \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!n} D^n [\varphi^n(x)]|_{x=0}. \quad (31)$$

Из этих соотношений видно, что существует сложный пуассоновский процесс T_λ , $\lambda > 0$, такой, что его производящая функция Et^{T_λ} задается (30) и (31). Более того, соотношение (28) позволяет выписать распределение процесса T_λ (возможно, имеющего положительную массу на бесконечности) в явном виде, именно,

$$P\{T_\lambda = m\} = \frac{\lambda}{m!(\lambda + m)} D^m [\varphi^{\lambda+m}(x)]|_{x=0}.$$

Следует иметь в виду, что для целых положительных $\lambda = k$ распределение T_k совпадает с распределением случайной величины $\tau_k - k$, где τ_k — момент первого выхода случайного блуждания на уровень k . Интересно было бы найти вероятностную интерпретацию T_λ также и для нецелых значений λ , скажем, для $\lambda = \frac{1}{2}$.

9. Приведем несколько иллюстративных примеров, дополнив тем самым не очень богатую коллекцию выписываемых в явном виде безгранично делимых распределений.

Для симметричного случайного блуждания Бернулли $\varphi(x) = (1 + x^2)/2$ и, как легко видеть,

$$D^m [\varphi^{m+\lambda}(x)]|_{x=0} = 2^{-m-\lambda} \sum_r \binom{m+\lambda}{r} \binom{2r}{m} m! \delta_{m,2r},$$

где $\delta_{i,j}$ — дельта Кронекера. Следовательно, распределение случайной величины T_λ в этом случае задается соотношением (см. (3.2) в [1])

$$P\{T_\lambda = 2k\} = \frac{\lambda}{\lambda + 2k} \binom{\lambda + 2k}{k} 2^{-\lambda-2k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Более того, в силу (28) и (29) справедливо следующее тождество:

$$\sum_{k \geq 0} t^{2k} \frac{\lambda}{\lambda + 2k} \binom{\lambda + 2k}{k} 2^{-\lambda-2k} = \exp \left\{ \lambda \left[-\ln 2 + \sum_{k \geq 1} t^{2k} \frac{1}{2k} \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} \right] \right\}.$$

Распределение Пуассона с параметром $\mu > 0$, производящая функция которого равна $\varphi(x) = \exp[\mu(x-1)]$, приводит к распределению Бореля-Таннера [9]. В этом случае имеем

$$P\{T_\lambda = k\} = \frac{\lambda \mu^k (\lambda + k)^k}{(\lambda + k)k!} \exp[-\mu(\lambda + k)], \quad k = 0, 1, \dots$$

Выпишем также представление Леви этого распределения:

$$Et^{T_\lambda} = \exp \left\{ \lambda \left(-\mu + \sum_{n \geq 1} \frac{(tn\mu)^n}{n!n} e^{-n\mu} \right) \right\}.$$

Для геометрического распределения $\varphi(x) = q/(1 - px); 0 < p < 1, q = 1 - p$, получаем

$$P\{T_\lambda = k\} = \frac{\lambda}{\lambda + k} q^{\lambda+k} p^k \binom{\lambda + 2k - 1}{k} \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$Et^{T_\lambda} = \exp \left\{ \lambda \left(\ln q + \sum_{n \geq 1} \frac{(tqp)^n}{n} \binom{2n-1}{n} \right) \right\}.$$

Конечно, список иллюстраций может быть продолжен, особенно, если иметь в виду следующее соображение. Если $\psi(\cdot)$ — произвольная производящая функция, а $g(\cdot)$ — производящая функция безгранично делимого распределения, то $g(\psi(\cdot))$ — снова производящая функция безгранично делимого распределения.

10. В [1] приводится еще один способ замены случайного блуждания Бернулли стохастическим процессом с непрерывным временем. На этот раз новый процесс получается из случайного блуждания рандомизацией моментов его скачков: именно, предполагается, что изменения состояния случайного блуждания происходят в пуассоновские моменты времени. Покажем, что если несколько изменить точку зрения, то изложенные выше аргументы могут быть использованы и для изучения процессов такого сорта, причем при более широких предположениях. Например, вовсе не обязательно предполагать независимость случайного блуждания и рандомизирующего (моменты его скачков) процесса.

В самом деле, рассмотрим многомерное случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\xi_i = (\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$, $i = 1, 2, \dots$, — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных векторов. Предположим, что первая координата $\xi_i^{(1)}$ вектора ξ_i принимает лишь целые значения, причем выполняется условие

$$P\{\xi_1^{(1)} > 1\} = 0. \quad (*)$$

Будем предполагать также, что вторая координата $\xi_i^{(2)}$ вектора ξ_i принимает значения в произвольном линейном нормированном пространстве, наделенном σ -алгеброй A борелевских множеств. Никаких специальных ограничений на взаимную зависимость компонент случайного вектора $\xi_i = (\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$ не делается. Снова, как и раньше, для положительного целого k рассмотрим тот случайный момент времени $\tau_k^{(1)}$, когда первая координата $S_i^{(1)}$ случайного блуждания $S_n = (S_n^{(1)}, S_n^{(2)})$, $n = 0, 1, \dots$, впервые окажется равной k , т.е.

$$\tau_k^{(1)} = \min\{n; S_n^{(1)} \geq k\} \quad k = 0, 1, \dots$$

Для произвольного множества $A \in A$ обозначим

$$F_k(t, A) = \sum_{m \geq k} t^m P\{\tau_k^{(1)} = m, S_m^{(2)} \in A\}. \quad (32)$$

Удобно смотреть на $F_k(t, A)$ из (32) как на формальный степенной ряд по степеням t , коэффициентами которого являются элементы коммутативной и ассоциативной алгебры $\mathcal{F}$ σ -аддитивных мер на A с обычным сложением и операцией свертки в качестве умножения. Повторяя рассуждения, изложенные в п. 2, легко убедиться, что справедливы соотношения

$$F_k(t, A) = F^k(t, A), \quad F_1(t, A) = F(t, A),$$

а ряд $F(t, A)$ удовлетворяет уравнению

$$F(t, A) = t\varphi(F(t, A), A),$$

где $\varphi(t, A) = \sum_m t^{1-m} P\{\xi_1^{(1)} = m; \xi_1^{(2)} \in A\}$. Следовательно, приведенные ранее соотношения, опиравшиеся на предложение п. 6, остаются справедливыми, меняется лишь алгебра коэффициентов рассматриваемых формальных степенных рядов. Ограничимся лишь рассмотрением многомерного аналога равенства (27), которое имеет вид (см. [10])

$$P\{\tau_k^{(1)} = n; S_n^{(2)} \in A\} = \frac{k}{n} P\{S_n^{(1)} = k; S_n^{(2)} \in A\}, \quad k, n > 0. \quad (33)$$

В частности, распределение второй координаты рассматриваемого случайного блуждания в момент достижения его первой координатой уровня k имеет вид

$$P\{S_{\tau_k^{(1)}}^{(2)} \in A\} = \sum_n \frac{k}{n} P\{S_n^{(1)} = k; S_n^{(2)} \in A\}, \quad k > 0. \quad (34)$$

Из (34) видно, что если моменты скачков случайного блуждания $S_n^{(1)}$, $n = 0, 1, \dots$, управляются независимым от него пуассоновским процессом единичной интенсивности, то момент первого выхода этого блуждания на уровень k имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$f_k(x) = e^{-x} \sum_n \frac{k}{n} P\{S_n^{(1)} = k\} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad k > 0. \quad (35)$$

Например, для симметричного блуждания Бернулли (35) принимает вид (см. соотношение (7.9) в [1])

$$f_k(x) = e^{-x} I_k(x) \frac{k}{x}, \quad k > 0,$$

где (см. формулу 9.6.10 в [11])

$$I_k(x) = \sum_{m \geq 0} \frac{(x/2)^{2m+k}}{m! \Gamma(m+k+1)}$$

— функция Бесселя чисто мнимого аргумента.

11. Изложенные выше результаты частично были доложены на Втором Нордическо-Российском симпозиуме по стохастическому анализу (Норвегия, август 1999 года). Я глубоко благодарен всем, кто сделал возможным мое участие в работе этого форума. Мне приятно также выразить признательность Э. Л. Пресману за конструктивную критику первоначального варианта этой заметки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feller W. Infinitely divisible distributions and Bessel functions associated with random walks. — J. SIAM Appl. Math., 1966, v. 14, p. 864–875.
2. Уиттекер Э. Е., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963.
3. Osgood W. F. Analytische Funktionen komplexer Größen. — Enzyklopädie d. Math. Wissensch. Leipzig: Teubner, 1901–1921, p. 5–114.
4. Good I. J. Generalization to several variables of Lagrange's expansion, with applications to stochastic processes. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1960, v. 56, p. 367–380.
5. Висков О. В. Некоммутативный подход к классическим задачам анализа. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1986, т. 177, с. 21–32.
6. Viskov O. V. The Lagrange formula and the Graves algebra. — First Bernoulli Congress: Abstracts, 1986, v. 2.
7. Dirac P. A. M. The Principle of Quantum Mechanics. Oxford: Clarendon Press, 1930.
8. Висков О. В. Несколько замечаний о ветвящихся процессах. — Матем. заметки, 1970, т. 8, с. 409–418.
9. Tanner J. C. A derivation of the Borel distribution. — Biometrika, 1961, v. 48, p. 222–224.
10. Borovkov K. A. On crossing times for multidimensional walks with skip-free components. — J. Appl. Probab., 1995, v. 32, p. 991–1006.
11. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
9.VII.1999

© 2000 г.

ГАМКРЕЛИДЗЕ Н. Г.*

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пусть случайный вектор ξ со значениями из $\mathbf{R}^s$ имеет s -мерную плотность распределения, которая «близка» к «стандартной» нормальной плотности. В указанных условиях доказывается некоторое неравенство для характеристической функции $f(t, \xi)$ случайного вектора ξ . Полученное неравенство представляет интерес в задаче нижней оценки скорости сходимости в локальной предельной теореме для плотностей. Аналогичное неравенство для решетчатых случайных величин изучалось автором в работе [1] и приведено в [2, с. 265] и [3, с. 192].

Ключевые слова и фразы: случайный вектор, плотность распределения, нормальная плотность, характеристическая функция случайной величины, локальная предельная теорема.

Примем следующие обозначения: $x = (x_1, \dots, x_s)$, $t = (t_1, \dots, t_s)$ — векторы s -мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^s$, $(t, x) = t_1 x_1 + \dots + t_s x_s$ — скалярное произведение векторов t и x , $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_s^2} = \sqrt{(x, x)}$ — евклидова норма вектора x ; $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ — случайный вектор со значениями из $\mathbf{R}^s$, $f(t, \xi) = \mathbf{E} e^{i(t, \xi)}$ — характеристическая функция случайного вектора ξ ; $\varphi(x) = (2\pi)^{-s/2} e^{-|x|^2/2}$ — плотность «стандартного» нормального распределения в $\mathbf{R}^s$.

* Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии, ул. М. Алексидзе, 1, 380093 Тбилиси, Грузия; Российский государственный университет нефти и газа, Ленинский просп., 65, 117917 Москва, ГСП-1, Россия.