Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Гамкредидзе, Об одном неравенстве для многомерной характеристической функции, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 1, 175–177

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 10:24:11

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feller W. Infinitely divisible distributions and Bessel functions associated with random walks. — J. SIAM Appl. Math., 1966, v. 14, p. 864–875.
2. Уиттекер Э. Е., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963.
3. Osgood W. F. Analytische Funktionen komplexer Größen. — Enzyklopädie d. Math. Wissensch. Leipzig: Teubner, 1901–1921, p. 5–114.
4. Good I. J. Generalization to several variables of Lagrange's expansion, with applications to stochastic processes. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1960, v. 56, p. 367–380.
5. Висков О. В. Некоммутативный подход к классическим задачам анализа. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1986, т. 177, с. 21–32.
6. Viskov O. V. The Lagrange formula and the Graves algebra. — First Bernoulli Congress: Abstracts, 1986, v. 2.
7. Dirac P. A. M. The Principle of Quantum Mechanics. Oxford: Clarendon Press, 1930.
8. Висков О. В. Несколько замечаний о ветвящихся процессах. — Матем. заметки, 1970, т. 8, с. 409–418.
9. Tanner J. C. A derivation of the Borel distribution. — Biometrika, 1961, v. 48, p. 222–224.
10. Borovkov K. A. On crossing times for multidimensional walks with skip-free components. — J. Appl. Probab., 1995, v. 32, p. 991–1006.
11. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
9.VII.1999

© 2000 г.

ГАМКРЕЛИДЗЕ Н. Г.*

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пусть случайный вектор ξ со значениями из $\mathbf{R}^s$ имеет s -мерную плотность распределения, которая «близка» к «стандартной» нормальной плотности. В указанных условиях доказывается некоторое неравенство для характеристической функции $f(t, \xi)$ случайного вектора ξ . Полученное неравенство представляет интерес в задаче нижней оценки скорости сходимости в локальной предельной теореме для плотностей. Аналогичное неравенство для решетчатых случайных величин изучалось автором в работе [1] и приведено в [2, с. 265] и [3, с. 192].

Ключевые слова и фразы: случайный вектор, плотность распределения, нормальная плотность, характеристическая функция случайной величины, локальная предельная теорема.

Примем следующие обозначения: $x = (x_1, \dots, x_s)$, $t = (t_1, \dots, t_s)$ — векторы s -мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^s$, $(t, x) = t_1 x_1 + \dots + t_s x_s$ — скалярное произведение векторов t и x , $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_s^2} = \sqrt{(x, x)}$ — евклидова норма вектора x ; $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ — случайный вектор со значениями из $\mathbf{R}^s$, $f(t, \xi) = \mathbf{E} e^{i(t, \xi)}$ — характеристическая функция случайного вектора ξ ; $\varphi(x) = (2\pi)^{-s/2} e^{-|x|^2/2}$ — плотность «стандартного» нормального распределения в $\mathbf{R}^s$.

* Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии, ул. М. Алексидзе, 1, 380093 Тбилиси, Грузия; Российский государственный университет нефти и газа, Ленинский просп., 65, 117917 Москва, ГСП-1, Россия.

Теорема. Пусть случайный вектор ξ имеет абсолютно интегрируемую характеристическую функцию: $\int_{\mathbf{R}^s} |f(t, \xi)| dt < \infty$, и пусть его плотность $p(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^s} |p(x) - \varphi(x)| \leq \lambda, \quad (1)$$

где λ — некоторое положительное число. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^s} \int_{|t| \geq 2s/\rho} |f(t, \xi)|^2 dt \leq 4\lambda + \frac{1}{2^s \pi^{s/2}} (1 - e^{-\rho^2/2}). \quad (2)$$

Доказательство. 1. Пусть ξ' — случайный вектор, ξ и ξ' независимы и распределение ξ' совпадает с распределением ξ .

Тогда плотность вероятности $q(x)$ разности $\xi - \xi'$ равна

$$q(x) = \int_{\mathbf{R}^s} p(x+z) p(z) dz. \quad (3)$$

Очевидно, $\int_{\mathbf{R}^s} \varphi(x+z) \varphi(z) dz = r(x)$, где

$$r(x) = \frac{1}{2^s \pi^{s/2}} e^{-|x|^2/4} = \frac{1}{2^{s/2}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (4)$$

Теперь $q(x) - r(x) = \int_{\mathbf{R}^s} p(x+z) (p(z) - \varphi(z)) dz + \int_{\mathbf{R}^s} (p(x+z) - \varphi(x+z)) \varphi(z) dz$, и поэтому

$$\sup_x |q(x) - r(x)| \leq \lambda \int_{\mathbf{R}^s} p(x+z) dz + \lambda \int_{\mathbf{R}^s} \varphi(z) dz = 2\lambda. \quad (5)$$

2. Обозначим A_ρ шар в $\mathbf{R}^s$ радиусом $\rho > 0$ с центром в начале координат, а символом $|A_\rho|$ обозначим его объем.

Тогда, как известно (см. [6, с. 83]),

$$\int_{A_\rho} e^{i(t, x)} dx = \left(\frac{2\pi\rho}{|t|}\right)^{s/2} J_{s/2}(\rho|t|), \quad (6)$$

где $J_{s/2}(z)$ — функция Бесселя порядка $s/2$, и $|A_\rho| = \pi^{s/2} \rho^s / \Gamma(s/2 + 1)$.

Следовательно,

$$\frac{1}{|A_\rho|} \int_{A_\rho} e^{i(t, x)} dx = \frac{2^{s/2} \Gamma(s/2 + 1)}{(\rho|t|)^{s/2}} J_{s/2}(\rho|t|) = h(|t| \rho),$$

$h(|t| \rho)$ является характеристической функцией распределения, равномерного в шаре A_ρ .

Применим теперь неравенство (см. [4, с. 493]) $|J_\nu(z)| \leq \sqrt{2/(\pi z)} (1 - \nu^2/z^2)^{-1/4}$ при $z \geq \nu \geq \frac{1}{2}$.

Полагая, что

$$\rho|t| \geq 2s, \quad (7)$$

имеем $|J_{s/2}(\rho|t|)| \leq 1,0163 \sqrt{2/(\pi \rho|t|)}$.

Соответственно, при условии (7)

$$h(|t| \rho) \leq \frac{1,0163 \Gamma(s/2 + 1) 2^{(s+1)/2}}{\sqrt{\pi} (\rho|t|)^{s/2+1/2}} \leq 1,0163 \frac{\Gamma(s/2 + 1)}{\pi^{1/2} s^{(s+1)/2}} = 1,0163 a_s,$$

где $a_s = \Gamma(s/2 + 1) / (\pi^{1/2} s^{(s+1)/2})$, $s = 1, 2, 3, \dots$

Заметим теперь, что с ростом s числа a_s убывают. В самом деле, полагая $u = s/2$, мы можем представить a_s в виде $a_{2u} = \Gamma(u) / (\sqrt{2\pi} u^{u-1/2} 2^u)$.

Множитель 2^{-u} с ростом u убывает.

Множитель $\Gamma(u)/u^{u-1/2}$ также убывает с ростом u , так как при $u > 0$ (см. [5, с. 84, формула 6.1.50])

$$\ln \Gamma(u) - \left(u - \frac{1}{2}\right) \ln u = -u + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 2 \int_0^\infty \frac{\arctg(t/u)}{e^{2\pi t} - 1} dt.$$

Правая часть последнего равенства, очевидно, убывает с ростом u .

Таким образом, установлено, что a_s убывает с ростом s и, в частности, $a_s \leq a_1 = \Gamma(\frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}$.

Тем самым доказано, что при условии (7)

$$|h(|t|\rho)| < 0,5082. \quad (8)$$

3. Обозначим теперь $\Delta_\rho = q(0) - |A_\rho|^{-1} \int_{A_\rho} q(x) dx$. Характеристическая функция для плотности $q(x)$ равна $|f(t, \xi)|^2$. Поэтому по формуле обращения для преобразования Фурье имеем

$$q(0) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{\mathbf{R}^s} |f(t, \xi)|^2 dt,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|A_\rho|} \int_{A_\rho} q(x) dx &= \frac{1}{|A_\rho|} \int_{A_\rho} \left(\frac{1}{(2\pi)^s} \int_{\mathbf{R}^s} e^{-i(t, x)} |f(t, \xi)|^2 dt \right) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{\mathbf{R}^s} |f(t, \xi)|^2 h(|t|\rho) dt, \end{aligned}$$

и

$$\Delta_\rho = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{\mathbf{R}^s} |f(t, \xi)|^2 (1 - h(|t|\rho)) dt.$$

Из (8) следует неравенство

$$\Delta_\rho \geq 0,4918 \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{|t| \geq 2s/\rho} |f(t, \xi)|^2 dt. \quad (9)$$

4. В соответствии с (5)

$$\begin{aligned} \Delta_\rho &\leq r(0) + 2\lambda - \frac{1}{|A_\rho|} \int_{A_\rho} r(x) dx + 2\lambda \leq r(0) + 4\lambda - \frac{1}{|A_\rho|} \int_{A_\rho} r(x) dx \\ &= 4\lambda + r(0) - r(\rho) = 4\lambda + \frac{1}{2^s \pi^s / 2} (1 - e^{-\rho^2/4}). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9) и (10) вытекает утверждение теоремы.

Автор благодарен акад. Ю. В. Прохорову за советы, способствовавшие улучшению изложения настоящей заметки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гамкрелидзе Н. Г. Об одной нижней оценке для скорости сходимости в локальной теореме. — Литов. матем. сб., 1968, т. 7, № 3, с. 405–408.
2. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
3. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.) М.: Наука, 1987.
4. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949.
5. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
6. Esseen C. G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. — Acta Math., 1945, v. 77, p. 1–125.

Поступила в редакцию
16.X.1999