Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кварацхелия, Безусловная сходимость гауссовских случайных рядов в банаховых пространствах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 1, 178–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 08:36:08

© 2000 г.

КВАРАЦЕЛИЯ В. В.*

БЕЗУСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ РЯДОВ
В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ¹⁾

Получено достаточное условие п.н. безусловной сходимости гауссовских рядов в банаховых пространствах с безусловным базисом, не содержащих l_∞^n равномерно. Под п.н. безусловной сходимостью случайных рядов понимается сходимость всех перестановок данного ряда на одном и том же множестве сходимости.

Ключевые слова и фразы: п.н. безусловная сходимость, гауссовский ряд, банахово пространство, не содержащее l_∞^n равномерно.

1. Введение. Пусть X — действительное банахово пространство, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство, $\xi_k, k = 1, 2, \dots$, — последовательность случайных элементов со значениями в X (под случайным элементом мы понимаем сепарабельно-значное измеримое по Борелю отображение Ω в X ; более подробно см. [1]). Говорят, что случайный ряд $\sum_{k=1}^\infty \xi_k$ сходится п.н. безусловно в пространстве X , если найдется множество $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ полной вероятности ($P(\Omega_0) = 1$) такое, что ряд $\sum_{k=1}^\infty \xi_k(\omega)$ сходится безусловно в пространстве X для всех $\omega \in \Omega_0$, т.е. для каждого $\omega \in \Omega_0$ сходится любая перестановка ряда $\sum_{k=1}^\infty \xi_k(\omega)$. Заметим, что сходимость подразумевается в сильной топологии пространства X .

Данное определение отличается от так называемой перестановочной сходимости, когда п.н. сходится любая перестановка данного ряда (т.е. множество сходимости зависит от перестановки). Например, ряд $\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k/k$, где $\varepsilon_k, k = 1, 2, \dots$, — независимые бернуллиевские случайные величины ($P\{\varepsilon_k = -1\} = P\{\varepsilon_k = 1\} = \frac{1}{2}$), сходится п.н. перестановочно, так как $\sum_{k=1}^\infty k^{-2} < \infty$, но не сходится п.н. безусловно (абсолютно), так как $\sum_{k=1}^\infty 1/k = \infty$.

Вообще говоря, в конечномерных банаховых пространствах п.н. безусловная и п.н. абсолютная сходимости случайных рядов суть эквивалентные понятия. А в каждом бесконечномерном банаховом пространстве, по известной теореме Дворецкого–Роджерса (см., например, [2, с. 80]), существует п.н. безусловно сходящийся ряд, который не сходится п.н. абсолютно. Поэтому содержательные задачи относительно п.н. безусловной сходимости возникают в бесконечномерных банаховых пространствах. Почти наверное безусловная сходимость случайных рядов рассматривалась автором ранее в работах [3]–[9].

Последовательность случайных элементов (ξ_k) со значениями в банаховом пространстве X называют гауссовской, если любая ее конечная подпоследовательность $(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \dots, \xi_{k_n})$, $n \geq 1$, является гауссовским случайным элементом в банаховом пространстве X^n — прямом произведении n банаховых пространств X . В частности, если $\xi_k, k = 1, 2, \dots$, — независимые гауссовские случайные элементы, то последовательность (ξ_k) будет гауссовской. Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^\infty \xi_k$ является гауссовским, если последовательность (ξ_k) является гауссовской.

Пусть E и F — изоморфные банаховы пространства, $d(E, F)$ — так называемое расстояние Банаха–Мазура между E и F , т.е. нижняя грань чисел $\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\|\}$ по всем изоморфизмам $T: E \rightarrow F$. Очевидно, $d(E, F) \geq 1$. Пусть, далее, l_∞^n — действительное n -мерное банахово пространство с максимум-нормой. Говорят, что банахово пространство X содержит l_∞^n равномерно, если для любого $\varepsilon > 0$ и натурального n

* Институт вычислительной математики им. Н.И. Мусхелишвили АН Грузии, ул. Акури, 8, 380093 Тбилиси, Грузия; e-mail: vk@scien.compmat.achet.ge

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке Академии Наук Грузии (грант № 1.16, 1998 г.).

найдется n -мерное подпространство $X_n \subset X$ такое, что $d(X_n; l_\infty^n) \leq 1 + \varepsilon$. Примерами таких пространств являются пространства $c_0, l_\infty, C([0, 1]), \oplus_{l_2} l_\infty^n$. Пространства $l_p, L_p([0, 1]), 1 \leq p < \infty$, — представляют собой примеры пространств, не содержащих l_∞^n равномерно.

Напомним некоторые известные факты, нужные для дальнейшего изложения.

Ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k$ безусловно сходится в банаховом пространстве X тогда и только тогда, когда

$$(a) \quad \sum_{k=1}^\infty |\langle x^*, a_k \rangle| < \infty \quad \text{для всех } x^* \in X^*,$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} \sum_{k=n}^\infty |\langle x^*, a_k \rangle| = 0,$$

где X^* — сопряженное пространство, а $\|\cdot\|_{X^*}$ — норма пространства X^* (см. [10, с. 46]).

В пространствах, не содержащих подпространства, изоморфного c_0 , (и только в них) условие (b) является следствием условия (a) (см., например, [1, с. 102]), т.е. в таких пространствах для безусловной сходимости ряда $\sum_{k=1}^\infty a_k$ необходима и достаточна его слабая абсолютная сходимость. В пространствах, не содержащих l_∞^n равномерно, можно дать структурную характеристику безусловно сходящихся рядов.

Теорема 1 ([4], [6]). В банаховом пространстве X следующие утверждения эквивалентны.

1⁰. X не содержит l_∞^n равномерно.

2⁰. Ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k$ сходится безусловно в X тогда и только тогда, когда существуют число $p \geq 2$, зависящее только от пространства X , последовательность положительных чисел (α_k) , $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^p < \infty$, и линейный ограниченный оператор A , отображающий пространство l_p в X следующим образом: $Ae_k = \alpha_k^{-1} a_k$, $k = 1, 2, \dots$, где (e_k) — естественный базис пространства l_p .

Таким образом, в банаховых пространствах, не содержащих l_∞^n равномерно, (и только в них) каждый безусловно сходящийся ряд является линейным ограниченным образом ряда вида $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k e_k$ в пространстве l_p , $p \geq 2$.

Если X — банахово пространство с безусловным базисом (φ_i) , то для всех последовательностей чисел (α_i) , для которых сходится ряд $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i \varphi_i$, и для всех ограниченных последовательностей чисел (λ_i) имеем

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \alpha_i \varphi_i \right\| \leq K \sup_i |\lambda_i| \left\| \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \varphi_i \right\|,$$

где константа $K > 0$ зависит только от базиса (φ_i) (см. [11, с. 19]).

2. Безусловная сходимость гауссовских рядов в пространствах с безусловным базисом. Пусть $\sum_{k=1}^\infty \xi_k$ — гауссовский ряд в пространстве X , где ξ_k — центрированный гауссовский случайный элемент с ковариационным оператором $R_k: X^* \rightarrow X^*$, $k = 1, 2, \dots$.

Докажем основной результат настоящей статьи.

Теорема 2. Пусть банахово пространство X с безусловным базисом (φ_i) не содержит l_∞^n равномерно. Если ряд

$$\sum_{i=1}^\infty \left[\sum_{k=1}^\infty \langle R_k \varphi_i^*, \varphi_i^* \rangle^{1/2} \right] \varphi_i \quad \text{сходится}^2) \quad \text{в } X, \quad (1)$$

то ряд $\sum_{k=1}^\infty \xi_k$ сходится п.н. безусловно в пространстве X , где (φ_i^*) — последовательность биортгональных функционалов базиса (φ_i) ($\langle \varphi_i^*, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots$).

²⁾ Выполнение условия (1), очевидно, означает, что $\sum_{k=1}^\infty \langle R_k \varphi_i^*, \varphi_i^* \rangle^{1/2} < \infty$ для всех $i = 1, 2, \dots$.

Сначала докажем следующий вспомогательный факт.

Лемма. Пусть банахово пространство X удовлетворяет требованиям теоремы 2, и пусть (ζ_i) — последовательность числовых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$(E|\zeta_i|^p)^{1/p} \leq C_p E|\zeta_i| \quad \text{для всех } p \geq 1, i = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где константа C_p зависит только от p . Тогда если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} E|\zeta_i| \varphi_i$ сходится в X , то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \varphi_i$ сходится п.н. (безусловно) в пространстве X .

Доказательство. Как известно, условию (2) удовлетворяют, в частности, бернуллиевские, центрированные гауссовские, а также так называемые строго субгауссовские случайные величины [12], [13].

Сначала предположим, что $E|\zeta_i| > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Так как (φ_i) — безусловный базис, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} E|\zeta_i| \varphi_i$ сходится безусловно в X . Тогда, по теореме 1, существует линейный ограниченный оператор A , действующий из l_p в X следующим образом: $Ae_i = \alpha_i^{-1} E|\zeta_i| \varphi_i$, $i = 1, 2, \dots$, где (e_i) — естественный базис пространства l_p , $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^p < \infty$ и $p \geq 2$.

Рассмотрим в l_p случайный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (E|\zeta_i|)^{-1} \zeta_i e_i, \quad (3)$$

который сходится п.н. безусловно. В самом деле, пользуясь определением пространства l_p , достаточно показать п.н. сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i (E|\zeta_i|)^{-1} \zeta_i|^p$. Применяя неравенство (2), получаем

$$E \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i (E|\zeta_i|)^{-1} \zeta_i|^p \leq C_p^p \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^p < \infty.$$

Очевидно, что линейный ограниченный образ п.н. безусловно сходящегося ряда является п.н. безусловно сходящимся рядом. Учитывая это и рассматривая образ ряда (3) при отображении A , мы получаем доказываемую п.н. безусловную сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \varphi_i$.

Аналогичным образом проходит доказательство в случае, когда $E|\zeta_i| = 0$ для некоторого i . В самом деле, если $E|\zeta_i| = 0$ для некоторого i , то, очевидно, $\zeta_i = 0$ п.н. Рассматривая теперь в l_p вместо (3) случайный ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \zeta'_i e_i$, где $\zeta'_i = (E|\zeta_i|)^{-1} \zeta_i$, если $E|\zeta_i| > 0$, и $\zeta'_i = 0$, если $E|\zeta_i| = 0$, легко видеть, что $A(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \zeta'_i e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \varphi_i$, и, тем самым, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \varphi_i$ сходится безусловно в пространстве X . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Так как X не содержит l_{∞}^n равномерно, оно, тем самым, не содержит подпространства, изоморфного c_0 , и для доказательства теоремы 2 достаточно найти множество $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ полной вероятности такое, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x^*, \xi_k(\omega) \rangle| < \infty$ для всех $x^* \in X^*$ и $\omega \in \Omega_0$.

Для каждого φ_i^* рассмотрим последовательность $\eta_i = (\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle, k = 1, 2, \dots)$. Очевидно, η_i — гауссовская числовая последовательность, и для каждого i , в силу условия теоремы, η_i п.н. принадлежит пространству l_1 (см. [14, с. 32]). Отсюда следует, что для каждого i существует множество $\Omega_0^{(i)} \in \mathcal{A}$ полной вероятности, на котором

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \varphi_i^*, \xi_k(\omega) \rangle| = \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} < \infty, \quad \omega \in \Omega_0^{(i)}, i = 1, 2, \dots$$

Теперь, учитывая известное неравенство для сильных моментов гауссовских случайных элементов (см. [1, с. 263]), легко видеть, что последовательность случайных величин $(\|\eta_i\|_{l_1})$ удовлетворяет условию (2) доказанной леммы и, следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_i\|_{l_1} \varphi_i$ сходится п.н. безусловно в X , как только $\sum_{i=1}^{\infty} E\|\eta_i\|_{l_1} \varphi_i \in X$. Но $E\|\eta_i\|_{l_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_k \varphi_i^*, \varphi_i^* \rangle^{1/2}$, $i = 1, 2, \dots$, и, значит, ввиду условия (1) теоремы 2, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_i\|_{l_1} \varphi_i$ сходится п.н. безусловно в X . Обозначим множество его сходимости через Ω_0' . Мы теперь покажем, что на множестве полной вероятности $\Omega_0 = \Omega_0' \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_0^{(i)}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega)$, $\omega \in \Omega_0$, сходится безусловно в пространстве X .

В самом деле, пусть $x^* \in X^*$ — произвольный линейный ограниченный функционал. Пользуясь тем, что базис (φ_i) безусловный, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x^*, \xi_k(\omega) \rangle| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \varphi_i^*, \xi_k(\omega) \rangle| |\langle x^*, \varphi_i \rangle| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} |\langle x^*, \varphi_i \rangle| \\ &= \left\langle x^*, \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i(x^*) \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} \varphi_i \right\rangle \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i(x^*) \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} \varphi_i \right\| \cdot \|x^*\| \\ &\leq K \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} \varphi_i \right\| \cdot \|x^*\| < \infty \end{aligned}$$

для всех $x^* \in X^*$ и $\omega \in \Omega_0$, где $\vartheta_i(x^*) = 1$, если $\langle x^*, \varphi_i \rangle \geq 0$, и $\vartheta_i(x^*) = -1$, если $\langle x^*, \varphi_i \rangle < 0$, $i = 1, 2, \dots$. Теорема 2 доказана.

Заметим, что если базис (φ_i) не безусловный, то из условия (1) не вытекает даже обычная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ п.н. по норме пространства X . Это можно показать так же, как показывается в [15] для неслучайных рядов.

Пусть банахово пространство X с безусловным базисом (φ_i) не содержит l_{∞}^n равномерно. Известно, что гауссовский ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$, $E\xi_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, сходится п.н. абсолютно в пространстве X тогда и только тогда, когда (см. [3] и [16])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle R_k \varphi_i^*, \varphi_i^* \rangle^{1/2} \varphi_i \right\| < \infty. \quad (4)$$

А если ξ_k , $k = 1, 2, \dots$, — независимые центрированные гауссовские случайные элементы, то гауссовский ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ сходится п.н. по норме пространства X тогда и только тогда, когда (см. [16])

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle R_k \varphi_i^*, \varphi_i^* \rangle \right)^{1/2} \varphi_i \text{ сходится в } X. \quad (5)$$

Очевидно, что условие (1), вообще говоря, слабее условия (4) и сильнее условия (5). Здесь же следует отметить, что в случае пространства $X = l_1$ условия (1) и (4) совпадают и такое совпадение имеет место только в пространствах, изоморфных l_1 . В самом деле, если X не изоморфно l_1 , то существует такая последовательность чисел (α_i) , что $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i \in X$ и $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| = \infty$. Теперь в пространстве X рассмотрим гауссовский ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$, где ковариационный оператор R_k случайного элемента ξ_k имеет вид $\langle R_k \varphi_i^*, \varphi_j^* \rangle = \alpha_k^2$ при $i = j = k$ и $\langle R_k \varphi_i^*, \varphi_j^* \rangle = 0$ в остальных случаях, $i, j, k = 1, 2, \dots$. Тогда очевидно, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ сходится п.н. безусловно, но не сходится п.н. абсолютно.

Отметим некоторые следствия доказанной теоремы.

Пусть банахово пространство X удовлетворяет требованиям теоремы 2, и пусть $\xi_k = a_k \gamma_k$, где $a_k \in X$, $k = 1, 2, \dots$, и (γ_k) — гауссовская последовательность стандартных гауссовских случайных величин.

Следствие 1. Если $\sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \varphi_i^*, a_k \rangle|) \varphi_i$ сходится в X , то гауссовский ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k$ сходится п.н. безусловно в пространстве X .

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 2, если учесть, что $\langle R_k \varphi_i^*, \varphi_i^* \rangle = \langle \varphi_i^*, a_k \rangle^2$, $i, k = 1, 2, \dots$.

Следующее утверждение при более общих предположениях на X доказано в [15].

Следствие 2. Если $\sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \varphi_i^*, a_k \rangle|) \varphi_i$ сходится в X , то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится безусловно в пространстве X .

Доказательство очевидно, учитывая [4] и предыдущее следствие.

Пусть $X = l_p$, $1 \leq p < \infty$, и пусть $(r_{i,j}(k))$ — матричное представление ковариационного оператора R_k , $i, j, k = 1, 2, \dots$. Тогда теорема 2 принимает вид:

Следствие 3 (см. [5]). Если $\sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} r_{i,i}^{1/2}(k))^p < \infty$, то гауссовский ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ сходится п.н. безусловно в пространстве l_p , $1 \leq p < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с.
2. Day M. M. Normed Linear Spaces. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1973, 211 p.
3. Кварацхелия В. В. О сходимости рядов из гауссовских случайных элементов. — Сообщ. АН ГССР, 1974, т. 76, № 1, с. 41–44.
4. Кварацхелия В. В. О безусловной сходимости в банаховом пространстве. — Сообщ. АН ГССР, 1978, т. 90, № 3, с. 533–536.
5. Кварацхелия В. В. Безусловная сходимость гауссовских рядов. — Труды ВЦ АН ГССР, 1978, т. 18, с. 71–79.
6. Kvaratskhelia V. V. On unconditional convergence of random series in Banach spaces. — Lecture Notes in Math., 1980, v. 828, p. 162–166.
7. Kvaratskhelia V. V. Some unconditionally convergent random series in Banach spaces. — Third International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics: Abstracts of communications. Vilnius, 1981, p. 182–183.
8. Kvaratskhelia V. V. Unconditional convergence of random series in some Banach spaces. — 14-th European Meeting of Statisticians: Abstracts of communications (supplement). Wroclaw, 1981.
9. Kvaratskhelia V. V. Unconditional convergence of random series in Banach spaces. — 5-th Japan-USSR Symposium on Probability Theory: Abstracts of communications. 1986, p. 28.
10. Лич А. Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1967, 268 с.
11. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1977, 190 p.
12. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. О субгауссовских случайных величинах. — Укр. матем. журн., 1980, т. 32, № 6, с. 723–730.
13. Fukuda R. Exponential integrability of sub-Gaussian vectors. — Probab. Theory Relat. Fields, 1990, v. 85, № 4, p. 505–521.
14. Vakhania N. N. Probability Distributions on Linear Spaces. New York: North Holland, 1981, 123 p.
15. Ватания Н. Н., Кварацхелия В. В. О безусловной сходимости рядов в банаховых пространствах с безусловным базисом. — Матем. заметки (в печати).
16. Chobanyan S. A., Tarieladze V. I. Gaussian characterizations of certain Banach spaces. — J. Multivariate Anal., 1977, v. 7, № 1, p. 183–203.

Поступила в редакцию
16.XI.1998

Исправленный вариант
19.VIII.1999

© 2000 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.*

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭКСТРЕМУМОВ ОБОБЩЕННЫХ
ПРОЦЕССОВ КОКСА
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ
ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ¹⁾**

Приводятся необходимые и достаточные условия слабой сходимости одномерных распределений экстремумов обобщенных дважды стохастических пуассоновских процессов, в которых величины скачков имеют

* МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: vkorolev@smc.msk.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 97-01-00271, и Российского гуманитарного научного фонда, проект 97-02-02235.