Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Королев, Асимптотические свойства экстремумов обобщенных процессов Кокса и их применение к некоторым задачам финансовой математики, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 1, 182–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp335>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:48:53

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с.
2. Day M. M. Normed Linear Spaces. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1973, 211 p.
3. Кварацхелия В. В. О сходимости рядов из гауссовских случайных элементов. — Сообщ. АН ГССР, 1974, т. 76, № 1, с. 41–44.
4. Кварацхелия В. В. О безусловной сходимости в банаховом пространстве. — Сообщ. АН ГССР, 1978, т. 90, № 3, с. 533–536.
5. Кварацхелия В. В. Безусловная сходимость гауссовских рядов. — Труды ВЦ АН ГССР, 1978, т. 18, с. 71–79.
6. Kvaratskhelia V. V. On unconditional convergence of random series in Banach spaces. — Lecture Notes in Math., 1980, v. 828, p. 162–166.
7. Kvaratskhelia V. V. Some unconditionally convergent random series in Banach spaces. — Third International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics: Abstracts of communications. Vilnius, 1981, p. 182–183.
8. Kvaratskhelia V. V. Unconditional convergence of random series in some Banach spaces. — 14-th European Meeting of Statisticians: Abstracts of communications (supplement). Wrocław, 1981.
9. Kvaratskhelia V. V. Unconditional convergence of random series in Banach spaces. — 5-th Japan-USSR Symposium on Probability Theory: Abstracts of communications. 1986, p. 28.
10. Лич А. Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1967, 268 с.
11. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1977, 190 p.
12. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. О субгауссовских случайных величинах. — Укр. матем. журн., 1980, т. 32, № 6, с. 723–730.
13. Fukuda R. Exponential integrability of sub-Gaussian vectors. — Probab. Theory Relat. Fields, 1990, v. 85, № 4, p. 505–521.
14. Vakhania N. N. Probability Distributions on Linear Spaces. New York: North Holland, 1981, 123 p.
15. Ватания Н. Н., Кварацхелия В. В. О безусловной сходимости рядов в банаховых пространствах с безусловным базисом. — Матем. заметки (в печати).
16. Chobanyan S. A., Tarieladze V. I. Gaussian characterizations of certain Banach spaces. — J. Multivariate Anal., 1977, v. 7, № 1, p. 183–203.

Поступила в редакцию
16.XI.1998

Исправленный вариант
19.VIII.1999

© 2000 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.*

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭКСТРЕМУМОВ ОБОБЩЕННЫХ
ПРОЦЕССОВ КОКСА
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ
ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ¹⁾**

Приводятся необходимые и достаточные условия слабой сходимости одномерных распределений экстремумов обобщенных дважды стохастических пуассоновских процессов, в которых величины скачков имеют

* МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: vkorolev@smc.msk.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 97-01-00271, и Российского гуманитарного научного фонда, проект 97-02-02235.

нулевое математическое ожидание и конечную дисперсию. Указаны оценки скорости сходимости. Полученные результаты применяются к решению задачи о прогнозировании биржевых цен.

Ключевые слова и фразы: дважды стохастический пуассоновский процесс (процесс Кокса), обобщенный процесс Кокса, максимальные суммы независимых случайных величин.

1. Введение. Пусть $N_1(t)$, $t \geq 0$, — однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью, а $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, — независимый от $N_1(t)$ процесс, обладающий следующими свойствами: $\Lambda(0) = 0$, $P\{\Lambda(t) < \infty\} = 1$ для любого $t > 0$, траектории $\Lambda(t)$ не убывают и непрерывны справа. Дважды стохастический пуассоновский процесс $N(t)$, называемый также процессом Кокса, определяется как суперпозиция $N_1(t)$ и $\Lambda(t)$:

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)), \quad t \geq 0.$$

В этом случае будем говорить, что процесс Кокса $N(t)$ управляется процессом $\Lambda(t)$. Свойства процессов Кокса подробно описаны в [1].

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — одинаково распределенные случайные величины (с.в.). Предположим, что при каждом $t \geq 0$ с.в. $N(t), X_1, X_2, \dots$ независимы. Процесс

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

назовем обобщенным процессом Кокса (при этом для определенности считаем, что $\sum_{j=1}^0 = 0$). Процессы вида (1.1) играют чрезвычайно важную роль во многих прикладных задачах. Достаточно сказать, что при $\Lambda(t) \equiv \lambda t$ с $\lambda > 0$ $S(t)$ превращается в классический обобщенный пуассоновский процесс, широко используемый при моделировании многих явлений в физике, теории надежности, финансовой и актуарной деятельности, биологии и т.д. Большое число разнообразных прикладных задач, приводящих к обобщенным пуассоновским процессам, описано в [2].

Общие процессы $S(t)$ вида (1.1) со случайной интенсивностью $\Lambda'(t)$ являются более адекватными моделями реальных процессов, в которых свойство однородности является скорее исключением, нежели правилом, в частности, процессов страховых выплат или же изменений цен на биржах, где реальная интенсивность существенно изменчива. Поэтому обобщенные процессы Кокса находят весьма широкое применение в актуарной и финансовой математике, см., например, [3], [4]. Примеры физических задач, приводящих к процессам Кокса, мы привели в [5]. В разделе 5 мы более подробно рассмотрим пример использования обобщенных процессов Кокса в качестве моделей процессов биржевых цен.

Обозначим $\bar{S}(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} S(\tau)$, $\underline{S}(t) = \min_{0 \leq \tau \leq t} S(\tau)$.

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что $EX_1 = 0$, $0 < \sigma^2 = DX_1 < \infty$. В данной заметке мы приведем необходимые и достаточные условия слабой сходимости одномерных распределений экстремумов $\bar{S}(t)$ и $\underline{S}(t)$ обобщенных процессов Кокса со скачками, обладающими указанными свойствами, и укажем оценки скорости этой сходимости. В заключительном разделе мы покажем, как эти теоретические результаты могут быть использованы при решении задачи о прогнозировании биржевых цен.

Символы $\Rightarrow$, $\xrightarrow{P}$ и $\stackrel{d}{=}$ всюду далее обозначают соответственно слабую сходимость, сходимость по вероятности и совпадение распределений. Стандартную нормальную функцию распределения (ф.р.) и ее плотность мы будем обозначать Φ и φ соответственно. Функция распределения максимума стандартного винеровского процесса на отрезке $[0, 1]$ будет обозначаться $G(\cdot)$, $G(x) = 2\Phi(\max\{0, x\}) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Вспомогательные результаты. Перед тем как перейти к формулировке основных результатов, мы приведем несколько вспомогательных утверждений, которые мы оформим в виде лемм, хотя они могут представлять и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть $N(t)$ — процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(t)$. Тогда $N(t) \xrightarrow{P} \infty$, если и только если $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$.

Доказательство см. в [6].

Лемма 2. Пусть $N(t)$ — процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(t)$. Пусть $d(t) > 0$ — функция такая, что $d(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$). Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

I. Одномерные распределения нормированного процесса Кокса слабо сходятся к распределению некоторой с.в. Z :

$$\frac{N(t)}{d(t)} \Rightarrow Z \quad (t \rightarrow \infty). \quad (2.1)$$

II. Одномерные распределения нормированного управляющего процесса $\Lambda(t)$ слабо сходятся к тому же распределению:

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Rightarrow Z \quad (t \rightarrow \infty). \quad (2.2)$$

Доказательство см. в [5] и [6].

Рассмотрим независимые не обязательно одинаково распределенные с.в. $Y_1, Y_2, \dots$ с $EY_i = 0$ и $0 < \sigma_i^2 = DY_i < \infty$, $i \geq 1$. Обозначим $S_k = Y_1 + \dots + Y_k$, $k \geq 1$, $\bar{S}_k = \max_{1 \leq i \leq k} S_i$, $\underline{S}_k = \min_{1 \leq i \leq k} S_i$, $B_k^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2$. Предположим, что с.в. $Y_1, Y_2, \dots$ удовлетворяют условию Линдеберга: для любого $\alpha > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{B_k^2} \sum_{i=1}^k \int_{|x| \geq \alpha B_k} x^2 dP\{Y_i < x\} = 0. \quad (2.3)$$

Хорошо известно, что при этих условиях

$$P\left\{\frac{\bar{S}_k}{B_k} < x\right\} \Rightarrow G(x), \quad P\left\{\frac{\underline{S}_k}{B_k} < x\right\} \Rightarrow 1 - G(-x), \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

(это одно из проявлений принципа инвариантности) (см., например, [7]). Следующее утверждение может рассматриваться как обобщение соотношений (2.4) на случайные суммы.

Пусть каждая из с.в. $\{N_k\}_{k \geq 1}$ принимает целые неотрицательные значения и при каждом k с.в. $N_k, Y_1, Y_2, \dots$ независимы.

Лемма 3. Пусть $N_k \xrightarrow{P} \infty$ ($k \rightarrow \infty$), а с.в. $Y_1, Y_2, \dots$ удовлетворяют условию (2.3). Для того чтобы при некоторых $d_k > 0$, $d_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), имела место сходимость экстремальных случайных сумм

$$\frac{\bar{S}_{N_k}}{d_k} \Rightarrow \bar{Z}, \quad \frac{\underline{S}_{N_k}}{d_k} \Rightarrow \underline{Z} \quad (k \rightarrow \infty)$$

к некоторым с.в. $\bar{Z}$ и $\underline{Z}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная с.в. U такая, что

$$\frac{B_{N_k}}{d_k} \Rightarrow U \quad (k \rightarrow \infty).$$

При этом

$$P\{\bar{Z} < x\} = \int_0^\infty G\left(\frac{x}{y}\right) dP\{U < y\},$$

$$P\{\underline{Z} < x\} = 1 - \int_0^\infty G\left(-\frac{x}{y}\right) dP\{U < y\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство этого утверждения относительно $\bar{S}_{N_k}$ приведено в [8] (см. теорему 11 в [8]). Утверждение леммы относительно $\underline{S}_{N_k}$ доказывается точно так же.

З а м е ч а н и е 1. Сходимость распределений с.в. $\bar{S}_{N_k}$ и $\underline{S}_{N_k}$ к ф.р. $G(x)$ и $1 - G(-x)$ соответственно рассматривалась в монографии [16] (см. § 3.2 в [16]). В частности, без предположения о справедливости условия Линдеберга (2.3) в [16] показано, что такая сходимость эквивалентна асимптотической нормальности с.в. S_{N_k} .

3. Условия сходимости одномерных распределений экстремумов обобщенных процессов Кокса. В этом разделе мы опишем необходимые и достаточные условия слабой сходимости одномерных распределений максимумов обобщенных процессов Кокса. Пусть $d(t)$ — положительная функция, неограниченно возрастающая при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Предположим, что $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ ($t \rightarrow \infty$). Для того чтобы имела место слабая сходимость одномерных распределений нормированных экстремумов обобщенного процесса Кокса:

$$\frac{\bar{S}(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} \Rightarrow \bar{Z}, \quad \frac{\underline{S}(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} \Rightarrow \underline{Z} \quad (t \rightarrow \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная с.в. U такая, что

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Rightarrow U \quad (t \rightarrow \infty).$$

При этом

$$\begin{aligned} P\{\bar{Z} < x\} &= \int_0^\infty G\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dP\{U < y\}, \\ P\{\underline{Z} < x\} &= 1 - \int_0^\infty G\left(-\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dP\{U < y\}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим процесс $\bar{S}(t)$. Во-первых, заметим, что, поскольку траектории процесса $S(t)$ кусочно-постоянны, имеет место представление $\bar{S}(t) = \max_{1 \leq i \leq N(t)} \sum_{j=1}^i X_j$. Во-вторых, из условий теоремы немедленно вытекает, что $d(t) \rightarrow \infty$. В третьих, по лемме 1 условие $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ влечет $N(t) \xrightarrow{P} \infty$. В-четвертых, свойства с.в. X_j гарантируют, что

$$P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{k}} \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^i X_j < x\right\} \Rightarrow G(x) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Пусть $\{t_k\}_{k \geq 1}$ — произвольная неограниченно возрастающая последовательность моментов времени. В рассматриваемой ситуации $B_k = \sigma\sqrt{k}$. Положим $N_k = N(t_k)$, $d_k = \sigma\sqrt{d(t_k)}$. Тогда по лемме 3 для того чтобы

$$\frac{\bar{S}(t_k)}{\sigma\sqrt{d(t_k)}} = \frac{1}{d_k} \max_{1 \leq i \leq N_k} \sum_{j=1}^i X_j \Rightarrow Z \quad (k \rightarrow \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная с.в. U такая, что

$$\left(\frac{B_{N_k}}{d_k}\right)^2 = \frac{N_k}{d(t_k)} \Rightarrow U \quad (k \rightarrow \infty), \quad (3.1)$$

$$P\{Z < x\} = EG\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Но по лемме 2 для (3.1) необходимо и достаточно, чтобы $\Lambda(t_k)/d(t_k) \Rightarrow U$ ($k \rightarrow \infty$). Заметим, что семейство масштабных смесей ф.р. G идентифицируемо, поскольку если

бы это было не так, то нашлись бы ф.р. $F(x)$, все точки роста которой сосредоточены на неотрицательной полуоси, и две с.в. U_1 и U_2 с разными распределениями, для которых

$$F(x) = 2\mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{U_1}\right) - 1 = 2\mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{U_2}\right) - 1, \quad x \geq 0.$$

Но тогда ф.р. $H(x) = \frac{1}{2}(\text{sign}(x)F(|x|) + 1)$ можно было бы представить и как $H(x) = \mathbb{E}\Phi(x/U_1)$, и как $H(x) = \mathbb{E}\Phi(x/U_2)$, что невозможно в силу идентифицируемости масштабных смесей нормальных ф.р. с нулевыми средними. Поэтому замечание о произвольности последовательности $\{t_k\}_{k \geq 1}$ и совпадении распределений с.в. U в (3.2) для всех последовательностей $\{t_k\}_{k \geq 1}$, обусловленном установленной выше идентифицируемостью масштабных смесей ф.р. G , завершает доказательство утверждения теоремы о процессе $\bar{S}(t)$. Утверждение о процессе $\underline{S}(t)$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие 1. В условиях теоремы 1

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\bar{S}(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x\right\} \Rightarrow G(x) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}\left\{\frac{\underline{S}(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x\right\} \Rightarrow 1 - G(-x) \quad (t \rightarrow \infty)$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Rightarrow 1 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Данное утверждение немедленно вытекает из теоремы 1 и идентифицируемости семейства масштабных смесей ф.р. $G(x)$ и $1 - G(-x)$.

4. Скорость сходимости одномерных распределений максимумов обобщенных процессов Кокса. Цель данного раздела — указать оценку скорости сходимости в теореме 1. В этом разделе мы будем предполагать, что $\mathbb{E}\Lambda(t) \equiv t$. Поэтому мы теперь можем считать, что в теореме 1 и следствии 1 $d(t) \equiv t$.

Из теоремы 1 следует, что распределение с.в. $\bar{S}(t)/(\sigma\sqrt{t})$ близко к предельному тогда и только тогда, когда близки распределения с.в. $\Lambda(t)/t$ и U или, что в определенном смысле то же самое, когда близки распределения с.в. $\Lambda(t)$ и Ut . Пусть $N^*(t)$ — процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda^*(t) = Ut$, и

$$\begin{aligned} S^*(t) &= \sum_{j=1}^{N^*(t)} X_j, \\ \bar{S}^*(t) &= \max_{0 \leq \tau \leq t} S^*(\tau). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Обозначим через $F_t(x)$ и $F_t^*(x)$ соответственно ф.р. с.в. $\bar{S}(t)/(\sigma\sqrt{t})$ и $\bar{S}^*(t)/(\sigma\sqrt{t})$. Тогда из тождества

$$F_t(x) = (F_t(x) - F_t^*(x)) + F_t^*(x) \quad (4.2)$$

вытекает, что, зная приемлемую оценку точности приближения распределения максимума обобщенного процесса Кокса $\bar{S}(t)$ распределением $\bar{S}^*(t)$ и скорость сходимости при $t \rightarrow \infty$ распределений процесса $\bar{S}^*(t)$ к предельному, мы получим приемлемую оценку скорости сходимости максимума обобщенного процесса Кокса $\bar{S}(t)$. Найдем оценку для

$$\Delta_t \equiv \sup_x |F_t(x) - F_t^*(x)|.$$

Лемма 4. Пусть $\bar{S}_1(t)$ и $\bar{S}_2(t)$ — случайные процессы, представляющие собой максимумы на $[0, t]$ соответственно двух обобщенных процессов Кокса, порожденных одной и той же последовательностью с.в. $\{X_j\}_{j \geq 1}$, но управляемых соответственно процессами $\Lambda_1(t)$ и $\Lambda_2(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\sup_x \left| \mathbb{P}\{\bar{S}_1(t) < x\} - \mathbb{P}\{\bar{S}_2(t) < x\} \right| \\ &\leq \int_0^\infty \min\left(2, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \left| \mathbb{P}\{\Lambda_1(t) < \lambda\} - \mathbb{P}\{\Lambda_2(t) < \lambda\} \right| d\lambda. \end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим

$$\Psi_t(\lambda) = P\{\Lambda_1(t) < \lambda\} - P\{\Lambda_2(t) < \lambda\}.$$

По формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} & \sup_x \left| P\{\bar{S}_1(t) < x\} - P\{\bar{S}_2(t) < x\} \right| \\ &= \sup_x \left| \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} \left[P\{N^{(1)}(t) = k\} - P\{N^{(2)}(t) = k\} \right] \right| \\ &= \sup_x \left| \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} d\Psi_t(\lambda) \right| \\ &= \sup_x \left| \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} d\Psi_t(\lambda) \right|, \end{aligned}$$

где $N^{(1)}(t)$ и $N^{(2)}(t)$ — процессы Кокса, управляемые соответственно процессами $\Lambda_1(t)$ и $\Lambda_2(t)$. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & \sup_x \left| P\{\bar{S}_1(t) < x\} - P\{\bar{S}_2(t) < x\} \right| \\ &= \sup_x \left| \int_0^{\infty} \Psi_t(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{k-1}}{k!} (k - \lambda) d\lambda \right| \\ &\leq \sup_x \left| \int_0^{1/4} \Psi_t(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{k-1}}{k!} (k - \lambda) d\lambda \right| \\ &\quad + \sup_x \left| \int_{1/4}^{\infty} \Psi_t(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{k-1}}{k!} (k - \lambda) d\lambda \right| \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим I_1 . Пусть $E_0(x)$ — ф.р. вырожденного в нуле вероятностного закона. Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \sup_x \left| - \int_0^{1/4} \Psi_t(\lambda) E_0(x) \exp(-\lambda) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{1/4} \Psi_t(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{k-1}}{k!} (k - \lambda) d\lambda \right| \\ &\leq \int_0^{1/4} |\Psi_t(\lambda)| d\lambda + \int_0^{1/4} |\Psi_t(\lambda)| \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} d\lambda \\ &= 2 \int_0^{1/4} |\Psi_t(\lambda)| d\lambda. \end{aligned}$$

В то же время с помощью неравенства Ляпунова мы убеждаемся, что

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sup_x \int_{1/4}^{\infty} |\Psi_t(\lambda)| \left| \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{k-1}}{k!} (k - \lambda) \right| d\lambda \\ &\leq \int_{1/4}^{\infty} |\Psi_t(\lambda)| \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} \left| \frac{k}{\lambda} - 1 \right| d\lambda \leq \int_{1/4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} |\Psi_t(\lambda)| d\lambda. \end{aligned}$$

Объединяя оценки для I_1 и I_2 , получим требуемый результат. Лемма доказана.

Обозначим

$$\delta(t) \equiv \int_0^\infty \min\left(2, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \left| \mathbf{P}\{\Lambda(t) < \lambda\} - \mathbf{P}\{Ut < \lambda\} \right| d\lambda. \quad (4.3)$$

Тогда из леммы 4 следует оценка

$$\Delta_t \leq \delta(t). \quad (4.4)$$

В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда $\Lambda(t)$ имеет геометрическое распределение с параметром $1/t$. Для такой ситуации $\mathbf{P}\{U < x\} = 1 - \exp(-x)$, $x \geq 0$. Положим в лемме 4 $\Lambda_1(t) = \Lambda(t)$, $\Lambda_2(t) = tU$. В этом случае известна следующая оценка для $|\Psi_t(\lambda)|$ при $t \geq 0$:

$$|\Psi_t(\lambda)| \leq \frac{1}{t-1} \left(\frac{\lambda}{t} + 1 \right) \exp\left(-\frac{\lambda}{t}\right)$$

(см. [9], [10]). Тогда, как легко видеть, по лемме 4

$$\begin{aligned} \Delta_t &\leq \delta(t) \leq \frac{1}{t-1} \int_0^\infty \min\left(2, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \left(\frac{\lambda}{t} + 1 \right) \exp\left(-\frac{\lambda}{t}\right) d\lambda \\ &\leq \frac{1}{t-1} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\lambda}{t} + 1 \right) \exp\left(-\frac{\lambda}{t}\right) d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{t(t-1)} \right) \int_0^\infty \sqrt{\lambda} \exp\left(-\frac{\lambda}{t}\right) d\lambda + \frac{1}{t-1} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \exp\left(-\frac{\lambda}{t}\right) \lambda \\ &= \frac{\sqrt{t}}{t-1} \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{2\sqrt{\pi t}}{t-1}, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, т.е. в рассматриваемом примере $\Delta_t = O(1/\sqrt{t})$. Этот пример позволяет судить о точности аппроксимации распределений максимумов обобщенных процессов Кокса с геометрическим управляющим процессом при помощи распределений максимумов обобщенных процессов Пойа (процессами Пойа называют процессы Кокса с гамма-распределенными управляющими процессами, см. [11]).

З а м е ч а н и е 2. Очевидно, что если $\Lambda(t) \equiv Ut$, то $\delta(t) \equiv 0$.

Лемма 5. Пусть $\mu_3 = \mathbf{E}|X_1|^3 < \infty$ и N_λ — пуассоновская с.в. с параметром $\lambda > 0$, независимая от последовательности $\{X_j\}_{j \geq 1}$. Тогда существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что при всех $\lambda \geq 1$

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{\lambda}} \max_{1 \leq i \leq N_\lambda} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} - G(x) \right| \leq \frac{C\mu_3}{\sqrt{\lambda}\sigma^3}.$$

Данное утверждение является частным случаем теоремы 3 в [12].

Теорема 2. Пусть

$$\mu_3 = \mathbf{E}|X_1|^3 < \infty \quad \text{и} \quad \kappa = \mathbf{E}U^{-1/2} < \infty.$$

Тогда

$$\sup_x \left| F_t(x) - \mathbf{E}G\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right) \right| \leq \frac{C\kappa\mu_3}{\sqrt{t}\sigma^3} + \mathbf{P}\left\{U \leq \frac{1}{t}\right\} + \delta(t),$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная из леммы 5, а $\delta(t)$ определяется в (4.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} &\sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\bar{S}^*(t)}{\sigma\sqrt{t}} < x \right\} - \mathbf{E}G\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right) \right| \\ &= \sup_x \left| \sum_{k=0}^\infty \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} \mathbf{P}\{N^*(t) = k\} - \mathbf{E}G\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_x \left| \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - G\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) \right) d\mathbf{P}\{U < \lambda\} \right| \\
&\leq \int_0^\infty \sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{\lambda t}} \max_{1 \leq i \leq N_{\lambda t}} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} - G(x) \right| d\mathbf{P}\{U < \lambda\} \\
&\leq \mathbf{P} \left\{ U \leq \frac{1}{t} \right\} + \int_{1/t}^\infty \sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{\lambda t}} \max_{1 \leq i \leq N_{\lambda t}} \sum_{j=1}^i X_j < x \right\} - G(x) \right| d\mathbf{P}\{U < \lambda\},
\end{aligned}$$

где $N_{\lambda t}$ — пуассоновская с.в. с параметром λt , независимая от $\{X_j\}_{j \geq 1}$. Оценив подынтегральное выражение в правой части последнего соотношения с помощью леммы 5, получим

$$\begin{aligned}
\sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\bar{S}^*(t)}{\sigma\sqrt{t}} < x \right\} - EG\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right) \right| &\leq \mathbf{P} \left\{ U \leq \frac{1}{t} \right\} + \frac{C\mu_3}{\sqrt{t}\sigma^3} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} d\mathbf{P}\{U < \lambda\} \\
&= \frac{C\mu_3}{\sqrt{t}\sigma^3} + \mathbf{P} \left\{ U \leq \frac{1}{t} \right\}.
\end{aligned}$$

Теперь требуемое вытекает из (4.2) и леммы 4. Теорема доказана.

В частности, если $\Lambda(t)$, как в рассмотренном выше примере, имеет геометрическое распределение с параметром $1/t$, то предельное распределение $EG(x/\sqrt{U})$, как несложно видеть, будет экспоненциальным с параметром $1/\sqrt{2}$, определяемым плотностью, равной нулю при $x < 0$ и равной $(1/\sqrt{2}) \exp\{-x/\sqrt{2}\}$ при $x \geq 0$. При этом из теоремы 2 вытекает, что в этом случае с учетом оценки для $\delta(t)$, полученной выше,

$$\sup_x \left| F_t(x) - EG\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

5. Применение к задаче о прогнозировании биржевых цен. В этом разделе мы применим результаты, полученные выше, к задаче прогнозирования биржевых цен. Для простоты мы будем говорить о ценах акций, хотя рассматриваемая ниже конструкция с некоторыми оговорками применима и к другим объектам торговли на бирже. Следуя идеям, изложенным в [4], мы более детально рассмотрим процесс цены акции на интервале времени малой длины. Мы считаем, что формальное выражение цены акции существует только в заключенном на бирже контракте (сделке). Поэтому на интервалах времени между последовательными заключениями контрактов цена акции остается постоянной и равной той цене, которая указана в последнем заключенном до рассматриваемого момента времени контракте. Тогда изменение цены акции может быть описано маркированным точечным процессом $\{(T_j, P_j)\}_{j \geq 1}$, где T_j — момент заключения j -го контракта, а P_j — цена акции, указанная в j -м контракте (контракты нумеруются в хронологическом порядке). Таким образом, если $P(\tau)$ — цена акции в момент τ , то

$$P(\tau) = P_j \quad \text{при } T_j \leq \tau < T_{j+1}.$$

Пусть $N(\tau)$ — число контрактов, заключенных к моменту τ (мы считаем, что отсчет начинается с $\tau = 0$). Как отмечено в [13], ключевым моментом формирования цен акций и стратегии игры на бирже является то, что инвесторы, главным образом, заинтересованы в прибыли, выраженной в процентах от стоимости акций (т.е. в относительной прибыли) и не зависящей от самой цены. Поэтому с учетом сказанного выше мы будем рассматривать следующее представление процесса $P(\tau)$:

$$\frac{P(\tau)}{P(0)} = \prod_{j=1}^{N(\tau)} \frac{P_j}{P_{j-1}}, \quad P_0 = P(0). \quad (5.1)$$

Обозначим

$$S(\tau) = \ln P(\tau) - \ln P(0), \quad X_j = \ln P_j - \ln P_{j-1}.$$

Тогда из (5.1) вытекает, что

$$S(\tau) = \sum_{j=1}^{N(\tau)} X_j.$$

Поскольку биржевое время неоднородно, что проявляется в стохастичности интенсивности торгов, разумно считать $N(\tau)$ процессом Кокса, управляемым процессом $\Lambda(\tau)$, производная которого по τ характеризует интенсивность торгов. Одними из основных характеристик, интересующих тех, кто играет на бирже, являются максимальная и минимальная цены за определенный интервал времени, например, биржевой день. Информация об этих характеристиках существенно определяет стратегию поведения того или иного игрока на следующем интервале времени. Обозначим

$$\underline{P}(t) = \min_{0 \leq \tau \leq t} P(\tau), \quad \bar{P}(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} P(\tau). \quad (5.2)$$

Будем считать, что $E\Lambda(\tau) = \lambda\tau$, $\lambda > 0$. Мы будем строить предельные аппроксимации для распределений с.в. $\underline{P}(t)$ и $\bar{P}(t)$. Но по смыслу задачи разумно считать фиксированной длину t интервала времени, на котором мы рассматриваем экстремумы процесса цен. Поэтому мы будем изучать поведение с.в. $\underline{P}(t)$ и $\bar{P}(t)$ при неограниченно растущей средней интенсивности торгов, т.е. при $\lambda \rightarrow \infty$. Такой подход вполне оправдан, поскольку реально на крупных биржах за интервалы времени $[0, t]$, представляющие разумный интерес (часы, дни), заключается огромное число контрактов. Таким образом, в задачу вводится еще один параметр λ , и поэтому фактически

$$\Lambda(\tau) = \Lambda(\tau, \lambda), \quad P(\tau) = P(\tau, \lambda), \quad \underline{P}(t) = \underline{P}(t, \lambda), \quad \bar{P}(t) = \bar{P}(t, \lambda).$$

Предположим, что с.в. $X_j = \ln P_j - \ln P_{j-1}$, $j \geq 1$, независимы и одинаково распределены с $EX_j = 0$ и $0 < \sigma^2 = DX_j < \infty$.

Теорема 3. Предположим, что

$$\Lambda(\tau, \lambda) \xrightarrow{P} \infty \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $P\left\{\frac{\ln P(t, \lambda) - \ln P(0)}{\sigma\sqrt{t\lambda}} < x\right\} \Rightarrow F(x) \quad (\lambda \rightarrow \infty);$
- 2) $P\left\{\frac{\ln \underline{P}(t, \lambda) - \ln P(0)}{\sigma\sqrt{t\lambda}} < x\right\} \Rightarrow \underline{F}(x) \quad (\lambda \rightarrow \infty);$
- 3) $P\left\{\frac{\ln \bar{P}(t, \lambda) - \ln P(0)}{\sigma\sqrt{t\lambda}} < x\right\} \Rightarrow \bar{F}(x) \quad (\lambda \rightarrow \infty);$

4) существует неотрицательная с.в. U такая, что

$$\frac{\Lambda(t, \lambda)}{t\lambda} \Rightarrow U \quad (\lambda \rightarrow \infty). \quad (5.3)$$

При этом

$$F(x) = E\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right), \quad (5.4)$$

$$\bar{F}(x) = EG\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right) = 2E\Phi\left(\frac{\max\{0, x\}}{\sqrt{U}}\right) - 1, \quad (5.5)$$

$$\underline{F}(x) = 1 - EG\left(-\frac{x}{\sqrt{U}}\right) = 2\left[1 - E\Phi\left(\frac{-\min\{0, x\}}{\sqrt{U}}\right)\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Эквивалентность условий 2, 3 и 4 вытекает из теоремы 1. Эквивалентность условий 1 и 4 вытекает из работы [14]. Теорема доказана.

Таким образом, при больших λ справедливы следующие приближенные соотношения:

$$P\{\bar{P}(t, \lambda) < x\} \approx E\Phi\left(\frac{\ln x - \ln P(0)}{\sigma\sqrt{t\lambda U}}\right), \quad x > 0, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} P\{\underline{P}(t, \lambda) < x\} &\approx EG\left(\frac{\ln x - \ln P(0)}{\sigma\sqrt{t\lambda U}}\right) \\ &= 2E\Phi\left(\frac{\max\{0, \ln x - \ln P(0)\}}{\sigma\sqrt{t\lambda U}}\right) - 1, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} P\{\underline{P}(t, \lambda) < x\} &\approx 1 - EG\left(-\frac{\ln x - \ln P(0)}{\sigma\sqrt{t\lambda U}}\right) \\ &= 2\left[1 - E\Phi\left(-\frac{\min\{0, \ln x - \ln P(0)\}}{\sigma\sqrt{t\lambda U}}\right)\right], \quad x > 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Обратим внимание, что аппроксимирующие законы в соотношениях (5.6)–(5.8) имеют существенно более тяжелые хвосты по сравнению с лог-нормальным или лог- G распределениями. Для иллюстрации рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Выше мы уже рассматривали ситуацию, в которой управляющий процесс Λ имеет геометрическое распределение. Укажем конкретный вид аппроксимирующих распределений в правых частях (5.6)–(5.8) для этой ситуации. Данная модель оказывается весьма поучительной. Пусть $\Lambda(t, \lambda)$ имеет геометрическое распределение с параметром $(t\lambda)^{-1}$. Несложно видеть, что в этом случае предельная при $\lambda \rightarrow \infty$ с.в. U будет иметь стандартное показательное распределение, а из (5.6)–(5.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} P\{P(t, \lambda) < x\} &\approx \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{P(0)}\right)^{\sqrt{2}(\sigma\sqrt{\lambda t})^{-1}}, & \text{если } 0 \leq x \leq P(0), \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{P(0)}{x}\right)^{\sqrt{2}(\sigma\sqrt{\lambda t})^{-1}}, & \text{если } x > P(0), \end{cases} \\ P\{\bar{P}(t, \lambda) < x\} &\approx \begin{cases} 0, & \text{если } x < P(0), \\ 1 - \left(\frac{P(0)}{x}\right)^{(\sigma\sqrt{2\lambda t})^{-1}}, & \text{если } x \geq P(0). \end{cases} \end{aligned}$$

При достаточно больших λ у обоих этих распределений отсутствуют моменты какого бы то ни было положительного порядка!

В некоторых случаях теорема 3 дает возможность довольно просто построить распределения с.в. $\bar{P}(t, \lambda)$ и $\underline{P}(t, \lambda)$ по распределению с.в. $P(t, \lambda)$. А именно, если распределение, аппроксимирующее распределение логарифма с.в. $P(t, \lambda)$ удастся представить в виде масштабной смеси нормальных законов, то распределения с.в. $\bar{P}$ и $\underline{P}$ оказываются масштабными смесями соответственно ф.р. $G(x)$ и $1 - G(-x)$ с тем же самым смешивающим распределением. Поясним сказанное примерами.

Пример 2. Лог-устойчивый тип. Устойчивые законы весьма популярны в качестве моделей распределений логарифмов приращений биржевых цен. Предположим, что распределение логарифма с.в. $P(t, \lambda)$ аппроксимируется устойчивым законом $G_\alpha(x)$ с характеристической функцией

$$g_\alpha(t) = \exp\{-|t|^\alpha\}, \quad 0 < \alpha \leq 2.$$

Тогда, согласно теореме 3.3.1 в [18], справедливо представление

$$G_\alpha(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dG_{\alpha/2,1}(y), \quad (5.9)$$

где $G_{\alpha/2,1}(y)$ — ф.р. строго устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha/2$, сосредоточенного на положительной полуоси и определяемого х.ф.

$$g_{\alpha/2,1}(t) = \exp \left\{ -|t|^{\alpha/2} \exp \left\{ -\frac{i\pi\alpha}{4} \operatorname{sign} t \right\} \right\}.$$

Представление (5.9) по форме совпадает с (5.4). Предполагая выполненными условия теоремы 3 (большая интенсивность торгов, конечность дисперсий логарифмов элементарных приращений и равенство нулю их ожиданий), с помощью соотношений (5.9) и (5.7) мы заключаем, что в данном случае

$$\begin{aligned} P\{\bar{P}(t, \lambda) < x\} &\approx \int_0^\infty G\left(\frac{\ln x - \ln P(0)}{\sigma\sqrt{t\lambda}u}\right) dG_{\alpha/2,1}(y) \\ &= 2 \int_0^\infty \Phi\left(\frac{\max\{0, \ln x - \ln P(0)\}}{\sigma\sqrt{t\lambda}y}\right) dG_{\alpha/2,1}(y) - 1 \\ &= 2G_\alpha\left(\frac{\max\{0, \ln x - \ln P(0)\}}{\sigma\sqrt{t\lambda}}\right) - 1, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$P\{\underline{P}(t, \lambda) < x\} \approx 2 \left[1 - G_\alpha\left(-\frac{\min\{0, \ln x - \ln P(0)\}}{\sigma\sqrt{t\lambda}}\right) \right], \quad x > 0.$$

Пример 3. Лог-симметричный GIG-тип. Согласно данным статистического анализа приращений цен на датских и немецких биржах, проведенного О. Барндорфф-Нильсеном и его коллегами [15], распределение логарифмов приращений биржевых цен хорошо аппроксимируется так называемым гауссовским\ обратным гауссовским (Gaussian\ Inverse Gaussian) или сокращенно GIG-распределением, определяемым плотностью

$$p(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = A(\alpha, \beta, \delta, \mu) \left[Q\left(\frac{x - \mu}{\delta}\right) \right]^{-1} K_1\left(\delta \alpha Q\left(\frac{x - \mu}{\delta}\right)\right) e^{\beta x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$A(\alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha}{\pi} \exp \left\{ \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta \mu \right\}, \quad Q(x) = \sqrt{1 + x^2},$$

K_1 — модифицированная функция Бесселя третьего рода с индексом 1. Соответствующую ф.р. обозначим $B(x; \alpha, \beta, \delta, \mu)$. Известно [15], что

$$B(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \mathbb{E} \Phi\left(\frac{x - \mu - \beta U}{\sqrt{U}}\right), \quad (5.10)$$

где U — с.в. с обратным нормальным распределением, определяемым плотностью

$$q\left(u; \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}u^3} \exp \left\{ \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(\alpha^2 - \beta^2)u + \frac{\delta^2}{u} \right] \right\}, \quad u > 0.$$

Из (5.10) вытекает, что для $B(x; \alpha, 0, \delta, 0)$ справедливо представление (5.4). Поэтому, предполагая, что в условиях теоремы 3 распределение логарифма с.в. $P(t, \lambda)$ аппроксимируется ф.р. $B(x; \alpha, 0, \delta, 0)$ из (5.10) и (5.6)–(5.8) мы заключаем, что

$$\begin{aligned} P\{\bar{P}(t, \lambda) < x\} &\approx 2B\left(\frac{\max\{0, \ln x - \ln P(0)\}}{\sigma\sqrt{t\lambda}}; \alpha, 0, \delta, 0\right) - 1; \\ P\{\underline{P}(t, \lambda) < x\} &\approx 2B\left[1 - B\left(-\frac{\min\{0, \ln x - \ln P(0)\}}{\sigma\sqrt{t\lambda}}; \alpha, 0, \delta, 0\right)\right], \quad x > 0. \end{aligned}$$

За дальнейшими сведениями о распределениях приращений биржевых цен мы отсылаем заинтересованного читателя к уже упоминавшейся работе [4] и превосходному обзору А. Н. Ширяева [17].

С помощью теоремы 3 можно в определенном смысле уточнить утверждения, объясняющие наблюдаемую ненормальность распределений логарифмов приращений биржевых цен (или «не лог-нормальность» распределений самих этих приращений) на интервалах времени умеренной длины, которая проявляется в более тяжелых хвостах у реальных распределений. В то же время, при увеличении длины интервала времени, приращения за который рассматриваются, наблюдается эффект сближения распределений логарифмов этих приращений с нормальным законом. При рассмотрении экстремумов процессов цен аналогом этого феномена должно быть сближение распределения максимума процесса цен с ф.р. $G(x)$, а распределение минимума этого процесса — с ф.р. $1 - G(-x)$. К объяснению и уточнению этого эффекта может быть привлечено следствие 1.

В противоположность тем рассуждениям, которые привели нас к теореме 3, сейчас мы не будем фиксировать длину интервала времени t , а напротив, считая, что она измеряется в каких-либо *целых* единицах (например, биржевых днях), будем устремлять ее к бесконечности при постоянной средней интенсивности торгов λ . Итак, пусть $t = n = 1, 2, \dots$. Мы будем изучать поведение распределений с.в. $P(n) = P(n, \lambda)$ и $\bar{P}(n) = \bar{P}(n, \lambda)$, определяемых соотношением (5.2) с заменой t на n , при $n \rightarrow \infty$. В этой ситуации разумно считать, что управляющий процесс $\Lambda(n, \lambda)$ имеет вид

$$\Lambda(n, \lambda) = \sum_{i=1}^n \Lambda_i,$$

где $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные с.в. с $E\Lambda_i = \lambda$, $i \geq 1$. Тогда в силу закона больших чисел

$$\frac{\Lambda(n, \lambda)}{n\lambda} = \frac{1}{n\lambda} \sum_{i=1}^n \Lambda_i \Rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

т.е. распределение с.в. U в (5.3) вырождено в единице. Поэтому в силу теоремы 1 в этом случае

$$\bar{F}(x) = G(x), \quad F(x) = 1 - G(-x).$$

Именно эта ситуация описывается следствием 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grandell J. Doubly Stochastic Poisson Processes. — Lect. Notes Math., 1976, v. 529, p. 1–234.
2. Bening V. E., Korolev V. Yu., Shorgin S. Ya. On approximations to generalized Poisson processes. — J. Math. Sci., 1997, v. 83, № 3, p. 360–373.
3. Grandell J. Mixed Poisson Processes. London: Chapman & Hall, 1997, 268 p.
4. Королев В. Ю. Построение моделей распределений биржевых цен при помощи методов асимптотической теории случайного суммирования. — Обзорение прикл. промышл. матем., сер. финансовая и страховая матем., 1997, т. 4, в. 1, с. 86–102.
5. Королев В. Ю. О сходимости распределений обобщенных процессов Кокса к устойчивым законам. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 4, с. 786–792.
6. Korolev V. Yu. A general theorem on the limit behavior of superpositions of independent random processes with applications to Cox processes. — J. Math. Sci., 1996, v. 81, № 5, p. 2951–2956.
7. Круглов В. М. К принципу инвариантности. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 2, с. 239–261.
8. Королев В. Ю. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 2, с. 313–333.
9. Королев В. Ю., Селиванова Д. О. Условно геометрические и условно экспоненциальные модели роста надежности. Деп. ВИНТИ 12.05.1994, № 1188-B94.
10. Gnedenko B. V., Korolev V. Yu. Random Summation: Limit Theorems and Applications. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996, 267 p.

11. Snyder D. L. Random Point Processes. New York: Wiley, 1975, 482 p.
12. Korolev V. Yu., Selivanova D. O. Convergence rate estimates in some limit theorems for maximum random sums. — J. Math. Sci., 1995, v. 76, № 1, p. 2163–2168.
13. Hull J. Options, Futures and Other Derivative Securities. New York–London: Prentice-Hall, 1989.
14. Бенинг В. Е., Королев В. Ю. Асимптотическое поведение обобщенных процессов Кокса. — Вестник Моск. ун-та, сер. вычисл. матем. кибернет., 1996, в. 3, с. 55–68.
15. Barndorff-Nielsen O. E. Gaussian Inverse Gaussian Processes and the Modeling of Stock Returns. Preprint. Aarhus: Aarhus University, 1994.
16. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
17. Ширяев А. Н. Вероятностно-статистические модели эволюции финансовых индексов. — Обзорение прикл. промышл. матем., сер. финансовая и страховая матем., 1995, т. 2, в. 4, с. 527–555.
18. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию
11.11.1998

© 2000 г.

НАГАЕВ С. В.*

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ И МОМЕНТНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Получена верхняя оценка того, что норма суммы зависимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве превзойдет заданный уровень. Эта оценка принципиально отличается от известных к настоящему времени вероятностных неравенств для сумм зависимых случайных величин как по форме, так и по методу доказательства. Прежде всего, в ней участвует только один из счетного числа коэффициентов перемешивания, причем односторонний. Благодаря введению квантили, она не содержит никаких моментов. Постоянные, входящие в оценку, явно вычислены. Как и в случае независимых слагаемых, с помощью полученной оценки выводятся моментные неравенства.

Ключевые слова и фразы: банахово пространство, гауссовский случайный вектор, гильбертово пространство, квантиль, коэффициент равномерного перемешивания, неравенство Хоффмана-Йоргенсена, неравенство Марцинкевича-Зигмунда, функция Эйлера.

1. Введение. Формулировка и обсуждение результатов. Пусть X_k , $k = 1, \dots, n$, — последовательность случайных величин со значениями в сепарабельном банаховом пространстве с нормой $|\cdot|$. Положим $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$, $S_{kn} = \sum_{i=1}^n X_i$.
Пусть

$$\phi(m) = \sup \left\{ \left| \frac{P(AB)}{P(A)} - P(B) \right|; 1 \leq k \leq n-m, A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{k+m}^n, P(A) \neq 0 \right\}$$

— коэффициент равномерного перемешивания. Здесь $\mathcal{F}_j^k$ означает σ -алгебру, порожденную случайной величиной X_l , $l = j, \dots, k$.

* Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: Nagaev@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01529).