Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Куксин, Н. С. Надирашвили, А. Л. Пятницкий, Оценки гёльдеровских норм для решений стохастических уравнений в частных производных, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 1, 152–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 09:54:45

$$\begin{aligned}
&= O\left(T^{4k} N^{-kT} N^{2(k+1)} \left(\frac{N^{T-3}}{T}\right)^{k-1} N^{T-2} T^{-2}\right) \\
&= O\left(\left(\frac{T}{N}\right)^k T^{-1}\right) = O(T^{-1}) = o(1).
\end{aligned}$$

Соотношение (5) и тем самым лемма 2 доказаны.

В силу леммы 2 для случайной величины $\zeta_R(T, N)$ выполнены условия теоремы Б. А. Севастьянова, следовательно, $\zeta_R(T, N)$ (а значит, в силу леммы 1 и $\zeta(T, N)$) имеет в пределе пуассоновское распределение с параметром λ . Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976, 223 с.
2. Aldous D. Probability Approximation via the Poisson Clumping Heuristic. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1989, 269 p.
3. Севастьянов Б. А. Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 4, с. 733–738.

Поступила в редакцию
12.III.2001

© 2002 г.

КУКСИН С. Б.*, НАДИРАШВИЛИ Н. С.,
ПЯТНИЦКИЙ А. Л.*****

ОЦЕНКИ ГЁЛЬДЕРОВСКИХ НОРМ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В работе рассмотрены стохастические уравнения с частными производными второго порядка с аддитивным шумом, заданные в ограниченной области пространства $\mathbf{R}^d$. В предположении, что коэффициенты при шуме являются L^p -функциями с достаточно большим p , мы доказываем, что решения непрерывны по Гёльдеру п.н., и что соответствующие гёльдеровские нормы имеют конечные моменты любого порядка.

Ключевые слова и фразы: стохастические уравнения, непрерывность по Гёльдеру.

* Heriot-Watt University, Edinburgh, EH14 4AS, UK; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: S.B.Kuksin@ma.hw.ac.uk

** University of Chicago, Department of Mathematics, 5734 University Avenue, Chicago, IL 60637, U.S.A.; e-mail: nicholas@math.uchicago.edu

*** Narvik University College, HiN, Postbox 385, 8505, Narvik, Norway; Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Ленинский проспект, 53, 117333 Москва, Россия; e-mail: andrey@sci.lebedev.ru

1. Введение. В данной работе для параболических стохастических уравнений с частными производными, заданных в ограниченных областях, получены оценки L^∞ - и гёльдеровских норм решений при минимальных условиях гладкости коэффициентов. В последние годы было опубликовано несколько работ, посвященных L^p - и $W^{l,p}$ -теории для параболических стохастических уравнений с частными производными, однако в этих работах $W^{l,p}$ -оценки были получены в предположении достаточной регулярности коэффициентов. В то же время во многих прикладных задачах, а также в задачах качественной теории, большую роль приобретают оценки решений, опирающиеся только на L^∞ - или даже L^p -нормы коэффициентов. Значительный прогресс в этой области был достигнут Н. В. Крыловым в его работе [1], где условия гладкости коэффициентов были существенно ослаблены для уравнений, заданных во всем пространстве $\mathbf{R}^d$.

Метод, предлагаемый в настоящей работе, позволяет ослабить условия регулярности коэффициентов и рассмотреть начально-краевые задачи в ограниченных областях для случая стохастических уравнений в частных производных с аддитивным шумом. Хотя этот класс уравнений уступает в общности уравнениям, рассмотренным в [1], все же он является достаточно широким и содержит многие важные операторы. Наш подход существенно отличается от подхода, развитого в [1]. В частности, он позволяет дать короткие и простые доказательства основных результатов.

Мы будем изучать стохастические уравнения в частных производных следующего вида:

$$\begin{aligned} du &= Au dt + \sum_{j=1}^N f^j(x, t) dw_t^j, \quad (x, t) \in Q \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u|_{\partial Q} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где Q — гладкая ограниченная область в $\mathbf{R}^d$, w_t^j — стандартные независимые одномерные винеровские процессы и $f^j(x, t)$ — прогрессивно-измеримые L^∞ - или L^p -функции, причем в последнем случае p должно быть достаточно большим. Относительно оператора A мы делаем следующие предположения: либо это равномерно эллиптический оператор второго порядка общего вида с достаточно гладкими коэффициентами (точные условия гладкости будут даны позднее), либо это равномерно эллиптический оператор в дивергентной форме с измеримыми ограниченными коэффициентами.

В данной статье мы доказываем, что решения задачи (1) непрерывны по Гёльдеру почти наверное (п.н.) и что L^∞ - и гёльдеровские нормы решения имеют конечные моменты любого порядка.

Для стохастически возмущенного уравнения теплопроводности с периодическими краевыми условиями (т.е. в случае, когда уравнение (1) задано на торе, и $A = \Delta$) подобные оценки были получены одним из авторов в приложении к работе [2].

Следует заметить, что хотя результаты статьи сформулированы для случая конечномерного шума, они легко обобщаются на уравнения с бесконечномерным стохастическим членом вида $\sum_{j=1}^\infty f^j(x, t) dw_t^j$; при этом требуется сходимости ряда $\sum_{j=1}^\infty |f^j(x, t)|$ по норме L^∞ или норме L^p с достаточно большим p .

Оценки L^∞ -норм, полученные в данной работе, могут быть далее использованы для анализа регулярности решений некоторых нелинейных стохастических уравнений с частными производными и разрешимости этих уравнений в определенных функциональных классах (см., например, [2]). При анализе этих уравнений рассматриваемые L^∞ -оценки могут играть примерно ту же роль, что классический принцип максимума при анализе детерминированных уравнений.

В первой части работы мы занимаемся оценками гёльдеровских и L^∞ -норм для решений детерминированных параболических уравнений. В дальнейшем эти оценки используются как для вывода поточечных оценок приращений решений (1), так и для оценок соответствующих функциональных норм.

2. Постановка задачи. Технические оценки. Пусть w_t^j — это стандартные независимые броуновские движения, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, и пусть $(\mathcal{F}_t)$ — это соответствующая фильтрация σ -алгебр. Мы

предполагаем, что функции $f^j(x, t)$ являются $\mathcal{F} \times \mathcal{B}$ -измеримыми и $(\mathcal{F}_t)$ -адаптированными; здесь символом $\mathcal{B}$ обозначена обычная борелевская σ -алгебра. Мы также считаем, что выполнено хотя бы одно из следующих двух предположений:

$$\mathbf{B}^\infty: \quad |f(x, t)| \leq 1 \quad \text{почти наверное (п.н.) для всех } x \text{ и } t;$$

$$\mathbf{B}^p: \quad \|f(\cdot, t)\|_{L^p(Q)} \leq 1 \quad \text{п.н. для всех } t.$$

В ближайших двух теоремах будем предполагать, что A является эллиптическим оператором второго порядка вида

$$A = a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

с гладкими коэффициентами.

Теорема 1. Пусть выполнено условие $\mathbf{B}^\infty$. Тогда при перечисленных выше условиях

(а) для всех $k \geq 0$ и всех $T \geq 0$ решение задачи (1) удовлетворяет оценке

$$\mathbf{E}|u|_{L^\infty(Q_T)}^k \leq C_k \exp(\bar{c}T), \quad (2)$$

где $Q_T = Q \times [T, T+1]$ и $\bar{c} = \max(0, \max_Q c(x))$;

(б) решение $u(x, t)$ непрерывно по Гёльдеру п.н., и для всех $T \geq 0$, $k \geq 0$ и $\theta < \frac{1}{2}$ справедлива оценка свертку

$$\mathbf{E}|u|_{C^\theta(Q_T)}^k \leq C(k, \theta) \exp(\bar{c}T). \quad (3)$$

В формулах (2), (3) и далее для краткости пишем $|u|_{L^\infty(Q_T)}$ вместо $|(u|_{Q_T})|_{L^\infty(Q_T)}$; то же обозначение будет использовано для других функций.

Теорема 2. Если условие $\mathbf{B}^p$ выполнено для некоторого $p > d$, то

(а) для каждого $k \geq 0$ и $T \geq 0$ для решения задачи (1) справедлива оценка (2);

(б) решение $u(x, t)$ непрерывно по Гёльдеру п.н., и для каждого $T \geq 0$, $k \geq 0$ и $\theta < \frac{1}{2} - d/(2p)$ выполнено (3).

З а м е ч а н и е 1. Если младший коэффициент $c(x)$ оператора A неположителен, то экспоненциально растущий множитель исчезает во всех приведенных выше оценках (2), (3).

Общий случай задачи (1) сводится к частному случаю из замечания 1 посредством замены неизвестной функции $U = \exp(-\alpha t)u$, где константа α выбрана достаточно большой. Соответственно, всюду в дальнейшем мы предполагаем без ограничения общности, что $c(x) \leq 0$. В частности, неравенства (2), (3) будут доказаны с $\bar{c} = 0$.

Для равномерно эллиптических операторов A с измеримыми коэффициентами в дивергентной форме имеется следующий результат.

Теорема 3. Пусть A — равномерно эллиптический оператор в дивергентной форме с измеримыми ограниченными коэффициентами. Тогда при условии $\mathbf{B}^\infty$

(а) для любых $k \geq 0$ и $T \geq 0$ решение задачи (1) удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{E}|u|_{L^\infty(Q_T)}^k \leq C_k;$$

(б) решение $u(x, t)$ непрерывно по Гёльдеру п.н., и найдется константа $\alpha > 0$, зависящая только от верхней и нижней констант эллиптичности оператора A и от геометрии области Q , такая, что для любых $T \geq 0$, $k \geq 0$ и $\theta < \alpha$ справедлива оценка

$$\mathbf{E}|u|_{C^\theta(Q_T)}^k \leq C(k, \theta). \quad (4)$$

В предположении $\mathbf{B}^p$ при $p > d$

(с) найдется такое $\alpha_0 > 0$, что при всех $T \geq 0$, $k \geq 0$ и $\theta \leq \alpha_0$ выполняется оценка (4).

Доказательства сформулированных теорем опираются на набор вспомогательных утверждений. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Av = 0, \quad v|_{t=0} = F(x), \quad v|_{\partial Q} = 0, \quad (5)$$

и обозначим символом S_t соответствующую полугруппу операторов:

$$v(\cdot, t) = (S_t F)(\cdot), \quad F = F(\cdot).$$

Следующий результат формулируется для «гладких» операторов A .

Лемма 1. Пусть $|F(x)| < M$. Тогда для любого $\theta < 1$ выполнены оценки

$$\|v(\cdot, t)\|_{C^\theta(Q)} \leq c(\theta) M t^{-\theta/2} \exp(-ct), \quad (6)$$

$$|v(x, t + \delta) - v(x, t)| \leq c(\theta) M t^{-\theta} \delta^\theta \exp(-ct) \quad (7)$$

с некоторой константой $c > 0$. Если же $\|F\|_{L^q(Q)} \leq M$ с каким-то $q > 1$, то

$$\|v(\cdot, t)\|_{C^\theta(Q)} \leq c(\theta) M t^{-\theta/2-d/(2q)} \exp(-ct), \quad (8)$$

$$|v(x, t + \delta) - v(x, t)| \leq c(\theta) M t^{-\theta-d/(2q)} \delta^\theta \exp(-ct). \quad (9)$$

Доказательство. Обозначив $G(x, y, t)$ функцию Грина задачи (5), имеем (см., например, [3]):

$$\|G(x, \cdot, t)\|_{L^p(Q)} \leq c(p) t^{-d/(2q)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (10)$$

Отсюда следует, что для любой функции $F \in L^q(\mathbf{R}^d)$

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \leq c(p) t^{-d/(2q)} \|F\|_{L^q(\mathbf{R}^d)}. \quad (11)$$

Теперь, в дополнение к (5), мы рассмотрим начально-краевую задачу в области $Q_\gamma = \gamma Q = \{\gamma x: x \in Q\}$, $\gamma \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} - A_\gamma V &= 0, \quad x \in Q_\gamma, \\ V|_{t=0} &= F(\gamma x), \quad V|_{\partial Q_\gamma} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$A_\gamma = a_{ij}(\gamma x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \gamma^{-1} b_i(\gamma x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \gamma^{-2} c(\gamma x).$$

Благодаря гладкости коэффициентов оператора A и области Q , в силу стандартных эллиптических оценок имеем:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} V(x, 1) \right| + \left| \nabla_x V(x, 1) \right| \leq c \left\| V\left(\cdot, \frac{1}{2}\right) \right\|_{L^\infty(Q_\gamma)} \quad (13)$$

равномерно по $x \in Q_\gamma$, причем константа c не зависит от γ (см. [6], [5]). После подходящего перемасштабирования координат эта оценка принимает вид

$$t \left| \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \right| + t^{1/2} \left| \nabla_x v(x, t) \right| \leq c \left\| v\left(\cdot, \frac{t}{2}\right) \right\|_{L^\infty(Q)} \quad (14)$$

при всех t , $0 < t \leq 1$. Из (11) и (14) теперь следует, что при всех $t \leq 1$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \right| \leq c t^{-1-d/(2q)} \|F\|_{L^q(Q)}, \quad (15)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) \right| \leq c t^{-(1/2)-d/(2q)} \|F\|_{L^q(Q)}. \quad (16)$$

Наконец, для того чтобы вывести соотношения (6), (7) и (8), (9) из (11), (15) и (16), мы используем интерполяционное неравенство¹⁾

$$\|v\|_{C^\theta} \leq 2\|v\|_{L^\infty}^{1-\theta} \|v\|_{C^1}^\theta.$$

Для больших t требуемые оценки являются следствием экспоненциального убывания функции Грина. Это завершает доказательство леммы.

В случае, когда оператор A имеет измеримые коэффициенты, справедлив такой результат.

Лемма 2. Пусть A — равномерно эллиптический оператор в дивергентной форме с измеримыми ограниченными коэффициентами. Тогда существует $\alpha > 0$, зависящее только от констант эллиптичности A и области Q , такое, что для всех $\theta < \alpha$ решение v задачи (5) удовлетворяет всем оценкам леммы 1.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы, поэтому мы приводим лишь его краткий набросок. Согласно [4], неравенство (10) (а с ним и (11)) по-прежнему справедливо. Оценка (13) в данном случае не выполняется, но вместо нее мы будем использовать оценки Нэша для гёльдеровских норм решения $V(x, t)$ (см. [5], [6]), что дает нам

$$\|V\|_{C^\alpha(Q_\gamma \times [1, 2])} \leq c \left\| V\left(\cdot, \frac{1}{2}\right) \right\|_{L^\infty(Q)}$$

для некоторых $\alpha > 0$ и c , не зависящих от γ . Завершить доказательство можно так же, как в предыдущей лемме.

Теперь мы переходим к задаче (1) в «гладком» случае. Ее решение существует, единственно и может быть записано в следующем виде (см. [7, гл. 5], [1]):

$$u(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^N S_{t-\tau} f^j(x, \tau) d\omega_\tau.$$

В действительности, эта формула является определением мягкого решения. Очевидно, что для наших целей достаточно рассмотреть только один член суммы, поэтому в дальнейшем мы опускаем знак суммирования по j .

Начнем с получения поточечных оценок для приращений решения по переменной x . С этой целью обозначим выражение $[S_{t-\tau} f(x_1, \tau) - S_{t-\tau} f(x_2, \tau)]$ через $g(t, \tau)$ и введем случайную величину

$$U = u(t, x_1) - u(t, x_2) = \int_0^t g(t, \tau) d\omega_\tau.$$

Квадратичная характеристика этого стохастического интеграла равна $X(t) = \int_0^t g^2(t, \tau) d\tau$. С помощью леммы 1 мы получаем оценку

$$X(t) \leq M^2 c(\theta) |x_1 - x_2|^{2\theta} \int_0^t \tau^{-\theta} \exp(-2c\tau) d\tau \leq M^2 c'(\theta) |x_1 - x_2|^{2\theta},$$

справедливую для всех $\theta < 1$. Отсюда на основании неравенства Буркхольдера–Дэвиса–Ганди следует, что

$$\mathbf{E} |U|^p \leq c_1(p) \mathbf{E} X^{p/2} \leq c(p, \theta) M^p |x_1 - x_2|^{p\theta}, \quad \theta < 1. \quad (17)$$

Аналогичным образом, для приращений по времени мы определяем

$$\begin{aligned} R &= u(x, t + \delta) - u(x, t) = \int_t^{t+\delta} S_{t+\delta-\tau} f(x, \tau) d\omega_\tau \\ &+ \int_0^t (S_{t+\delta-\tau} f(x, \tau) - S_{t-\tau} f(x, \tau)) d\omega_\tau = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

¹⁾ Обозначив $\|v\|_{L^\infty}$ через γ_0 и $\|v\|_{C^1}$ через γ_1 , имеем $|v(x+y) - v(x)| \leq 2\gamma_0$ и $|v(x+y) - v(x)| \leq \gamma_1|y|$. Возводя эти неравенства в степени $(1-\theta)$ и θ соответственно и перемножая полученные соотношения, получаем $|v(x+y) - v(x)| \leq 2^{1-\theta} \gamma_0^{1-\theta} \gamma_1^\theta |y|^\theta$, что влечет требуемое неравенство.

Первый интеграл I_1 может быть оценен следующим образом:

$$\mathbf{E} |I_1|^p \leq c \delta^{p/2} M^p. \quad (18)$$

Действительно, используя обозначение $h_1(t, \tau)$ для $S_{t+\delta-\tau} f(x, \tau)$, имеем

$$\int_t^{t+\delta} h_1^2(t, \tau) d\tau \leq M^2 \delta,$$

и требуемая оценка (18) немедленно следует из неравенства Буркхольдера–Дэвиса–Ганди.

Для того чтобы оценить интеграл I_2 , определим

$$h_2(t, \tau) = S_{t+\delta-\tau} f(x, \tau) - S_{t-\tau} f(x, \tau).$$

Согласно лемме 1, $|h_2(t, \tau)| \leq c(\theta) M(t - \tau)^{-\theta} \delta^\theta \exp(-c(t - \tau))$ для каждого $\theta < \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\int_0^t h_2^2(t, \tau) d\tau \leq M^2 \delta^{2\theta} \int_0^t (t - \tau)^{-2\theta} \exp(-2c(t - \tau)) d\tau \leq c(\theta) M^2 \delta^{2\theta}$$

и по неравенству Буркхольдера–Дэвиса–Ганди имеем

$$\mathbf{E} |I_2|^p \leq c(\theta) \delta^{\theta p} M^p, \quad \theta < \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Объединяя (17), (18) и (19), получаем

$$\mathbf{E} |u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)|^p \leq c(\theta) (|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|)^{\theta p} \quad (20)$$

для всех $p > 1$ и $\theta < \frac{1}{2}$.

3. Ограниченность и непрерывность по Гёльдеру решений. Высшие моменты. Этот пункт посвящен оценкам L^∞ - и C^θ -норм решений задачи (1). Сформулируем первый результат.

Лемма 3. Пусть функция $f^j(x, t)$ удовлетворяет условию $\mathbf{B}^\infty$ предыдущего пункта. Тогда

- (а) решение $u(x, t)$ задачи (1) допускает непрерывную п.н. модификацию;
- (б) для выбранного $u(x, t)$ при всех $T \geq 0$ и $p \geq 1$ выполнена оценка

$$\mathbf{E} \|u\|_{L^\infty(Q \times [T, T+1])}^p \leq c(p) < \infty.$$

Доказательство. Первое утверждение леммы немедленно следует из (20) по теореме Колмогорова, надо только выбрать p достаточно большим.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим цилиндр $Q^T = Q \times [T, T+1]$ и определим последовательность множеств

$$\mathcal{K}_n = \{k \in \mathbf{Z}^{d+1} \mid k 2^{-n} \in Q^T\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Далее, для произвольного вектора $e \in \mathbf{Z}^{d+1}$ такого, что $|e|_1 \sim \max_{1 \leq j \leq d} |e_j| = 1$, положим $\xi_k^{n,e} = |u((k+e)2^{-n}) - u(k2^{-n})|$. В силу леммы 1

$$\mathbf{E} |\xi_k^{n,e}|^p \leq c(\theta) 2^{-np\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}, \quad (21)$$

при каждом $p \geq 1$. Введем следующие события:

$$\mathcal{A}_{k,q}^{n,e} = \{\omega \in \Omega \mid \xi_k^{n,e} \geq K q^n\}.$$

Из (21) с помощью неравенства Чебышева получаем

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}_{k,q}^{n,e}) \leq \frac{\mathbf{E} |\xi_k^{n,e}|^p}{K^p q^{np}} \leq c(\theta) \frac{2^{-np\theta}}{K^p q^{np}},$$

где подходящее значение q будет выбрано позднее. Для каждого n общее число событий $\mathcal{A}_{k,q}^{n,e}$ не превосходит $2^{\bar{c}(d,Q)n}$. Таким образом, для объединения $\mathcal{A}_q^n = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} (\bigcup_{|e|_1=1} \mathcal{A}_{k,q}^{n,e})$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}_q^n) \leq c(\theta) K^{-p} q^{-pn} 2^{\bar{c}(d,Q)n - \theta pn} = c(\theta) K^{-p} \alpha^n,$$

где $\alpha = 2^{\bar{c}(d,Q)/(2^9 q)^p}$. Если выбрать $\theta = \frac{1}{3}$, $q = 2^{-1/6}$, то $\alpha = 2^{\bar{c}(d,Q)/2^{p/6}}$. Окончательно, взяв $p > 6\bar{c}(d,Q) + 1$, получим $\alpha < \frac{1}{2}$. Таким образом, для вероятности события $\mathcal{A} = \bigcup_{n>1} \mathcal{A}_q^n$ выполнена следующая оценка:

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}) \leq c(\theta) K^{-p}. \quad (22)$$

В дальнейшем мы можем предполагать без ограничения общности, что Q — это d -мерный куб $(0,1)^d$. В самом деле, продолжая функцию $u(x,t)$ нулем во внешность области и сжимая, если потребуется, аргументы, мы всегда можем свести случай общей области к кубу.

Далее, любая точка из Q представима в виде

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} e(j) 2^{-j}, \quad |e(j)|_1 \leq 1.$$

Обозначим $x(m) = \sum_{j=1}^m e(j) 2^{-j}$ (как обычно, $x(0) = 0$). Ясно, что $u(x(0), t) = 0$. По определению множества $\mathcal{A}_{k,q}^{n,e}$ для каждого $\omega \notin \mathcal{A}$

$$|u(x(m), t) - u(x(m+1), t)| \leq K q^m = K 2^{-m/6}.$$

Следовательно,

$$|u(x, t)| \leq K \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m/6} = K 2^{1/6} (2^{1/6} - 1). \quad (23)$$

Теперь из (22) и (23) следует, что для каждого $p > \bar{c}(d, Q)$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}\left\{\|u\|_{L^\infty(Q^T)} \geq K\right\} \leq c_p (K+1)^{-p}.$$

Наконец, обозначив $U_T = \|u\|_{L^\infty(Q^T)}$, получаем, что

$$\mathbf{E} U_T^s = \int_0^\infty x^s d\mathbf{P}\{U_t \leq x\} = s \int_0^\infty x^{s-1} \mathbf{P}\{U_t \leq x\} dx \leq s c_p \int_0^\infty x^{s-1} (x+1)^{-p} dx < \infty$$

для $p > s+1$. Лемма доказана.

Для того чтобы оценить нормы Гёльдера функции $u(x, t)$, сформулируем сначала следующий простой результат.

Лемма 4. Пусть функция $g(y)$ удовлетворяет оценке

$$\text{osc}_J \leq \gamma_n \quad (24)$$

в каждом маленьком кубике J , являющемся ячейкой решетки $2^{-n} \mathbf{Z}^{d+1}$, т.е. $J = 2^{-n} j + [0, 2^{-n}]^{d+1}$, причем $j \in \mathbf{Z}^{d+1}$. Тогда для каждого $\Delta \in \mathbf{R}^{d+1}$ имеем

$$|g(y + \Delta) - g(y)| \leq 2\gamma_{\lfloor \log_2(1/|\Delta|) \rfloor},$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть.

Доказательство. Для $n = \lfloor \log_2(1/|\Delta|) \rfloor$ рассмотрим семейство замкнутых кубиков, построенных выше. Очевидным образом, точки y и $y + \Delta$ либо принадлежат одному и тому же кубу, либо расположены в соседних кубах, имеющих хотя бы одну общую точку. Отсюда следует утверждение леммы.

Далее, для решения задачи (1) при каждом $\omega \notin \mathcal{A}$ справедливо неравенство (24) с $\gamma_n = K q^n$. Поэтому

$$\begin{aligned} |u((x, t) + \Delta) - u(x, t)| &\leq 2K q^{\lfloor \log_2(1/|\Delta|) \rfloor} \leq 2K q^{\log_2(1/|\Delta|) - 1} \\ &= 2K q^{-1} 2^{\log_2 q \log_2(1/|\Delta|)} = 2K q^{-1} |\Delta|^{\log_2(1/q)}. \end{aligned}$$

Если мы положим здесь $q = 2^{-\theta_1}$ с $\theta_1 < \theta < \frac{1}{2}$, то $\log_2(1/q) = \theta_1$, и предыдущее неравенство влечет

$$|u((x, t) + \Delta) - u(x, t)| \leq 2K 2^{\theta_1} \Delta^{\theta_1} \leq 4K \Delta^{\theta_1}.$$

Следовательно, при всех $\omega \notin \mathcal{A}$: $\|u\|_{C^{\theta_1}(Q_T)} \leq 4K$. Принимая во внимание (22), из последней оценки выводим неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\|u\|_{C^{\theta_1}(Q_T)} > K\right\} \leq c(p, \theta_1) K^{-p},$$

справедливое при всех $p > 1$. Наконец, для произвольных $\theta_1 < \frac{1}{2}$ и $m \geq 1$ оценка $\mathbf{E}\|u\|_{C^{\theta_1}(Q_T)}^m \leq c(m, \theta_1)$ проверяется обычным образом, и мы можем сформулировать такое утверждение:

Лемма 5. Для любого $\theta < \frac{1}{2}$ решение $u(x, t)$ задачи (1) является п.н. C^θ -функцией. Более того, в каждом цилиндре Q^T при $m \geq 1$ справедливо неравенство $\mathbf{E}\|u\|_{C^\theta(Q^T)}^m \leq c(m, \theta)$.

Для завершения доказательства теоремы 1 теперь достаточно просто сослаться на леммы 3 и 5.

Другие утверждения работы могут быть доказаны аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krylov N. V. On L^p -theory of stochastic partial differential equations in the whole space. — SIAM J. Math. Anal., 1996, v. 27, № 2, p. 313–340.
2. Кукулин С. Б. Стохастическое нелинейное уравнение Шрёдингера. 1. Априорные оценки. — Труды МИРАН, 1999, т. 225, с. 232–256.
3. Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964, 347 p.
4. Aronson D. G. Bounds for the fundamental solutions of a parabolic equation. — Bull. Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, p. 890–896.
5. Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1977, 401 p.
6. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
7. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992, 454 p.

Поступила в редакцию
28.VIII.2000

© 2002 г.

МАКРУШИН А. В.*

НЕУЛУЧШАЕМОСТЬ МОМЕНТНЫХ ОЦЕНОК

Пусть η — неотрицательная случайная величина. А. М. Зубковым в [1] были получены верхние и нижние оценки для $\mathbf{P}\{\eta > 0\}$, имеющие вид отношений определителей, составленных из моментов η . При этом нижние оценки всегда неотрицательны, а верхние могут принимать значения из $[1, \infty)$. В заметке показано, что как нижние, так и верхние оценки неулучшаемы, т.е. для любой случайной величины $\eta \geq 0$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966, ГСП-1, Москва, Россия.