Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Макрушин, Неуллучшаемость моментных оценок, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 1, 159–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3378>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:34:33

Если мы положим здесь $q = 2^{-\theta_1}$ с $\theta_1 < \theta < \frac{1}{2}$, то $\log_2(1/q) = \theta_1$, и предыдущее неравенство влечет

$$|u((x, t) + \Delta) - u(x, t)| \leq 2K 2^{\theta_1} \Delta^{\theta_1} \leq 4K \Delta^{\theta_1}.$$

Следовательно, при всех $\omega \notin \mathcal{A}$: $\|u\|_{C^{\theta_1}(Q_T)} \leq 4K$. Принимая во внимание (22), из последней оценки выводим неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\|u\|_{C^{\theta_1}(Q_T)} > K\right\} \leq c(p, \theta_1) K^{-p},$$

справедливое при всех $p > 1$. Наконец, для произвольных $\theta_1 < \frac{1}{2}$ и $m \geq 1$ оценка $\mathbf{E}\|u\|_{C^{\theta_1}(Q_T)}^m \leq c(m, \theta_1)$ проверяется обычным образом, и мы можем сформулировать такое утверждение:

Лемма 5. Для любого $\theta < \frac{1}{2}$ решение $u(x, t)$ задачи (1) является п.н. C^θ -функцией. Более того, в каждом цилиндре Q^T при $m \geq 1$ справедливо неравенство $\mathbf{E}\|u\|_{C^\theta(Q^T)}^m \leq c(m, \theta)$.

Для завершения доказательства теоремы 1 теперь достаточно просто сослаться на леммы 3 и 5.

Другие утверждения работы могут быть доказаны аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krylov N. V. On L^p -theory of stochastic partial differential equations in the whole space. — SIAM J. Math. Anal., 1996, v. 27, № 2, p. 313–340.
2. Кукулин С. Б. Стохастическое нелинейное уравнение Шрёдингера. 1. Априорные оценки. — Труды МИРАН, 1999, т. 225, с. 232–256.
3. Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964, 347 p.
4. Aronson D. G. Bounds for the fundamental solutions of a parabolic equation. — Bull. Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, p. 890–896.
5. Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1977, 401 p.
6. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
7. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992, 454 p.

Поступила в редакцию
28.VIII.2000

© 2002 г.

МАКРУШИН А. В.*

НЕУЛУЧШАЕМОСТЬ МОМЕНТНЫХ ОЦЕНОК

Пусть η — неотрицательная случайная величина. А. М. Зубковым в [1] были получены верхние и нижние оценки для $\mathbf{P}\{\eta > 0\}$, имеющие вид отношений определителей, составленных из моментов η . При этом нижние оценки всегда неотрицательны, а верхние могут принимать значения из $[1, \infty)$. В заметке показано, что как нижние, так и верхние оценки неулучшаемы, т.е. для любой случайной величины $\eta \geq 0$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966, ГСП-1, Москва, Россия.

существуют случайные величины $\zeta \geq 0$ и $\xi \geq 0$ с такими же первыми моментами, что у η , для которых $\mathbf{P}\{\zeta > 0\}$ совпадает с нижней оценкой, а $\mathbf{P}\{\xi > 0\}$ — с минимумом из верхней оценки и 1.

Ключевые слова и фразы: неуплучшаемость оценок, моменты, проблема моментов, моментные оценки.

1. Введение. А. М. Зубковым в [1] были получены следующие оценки для распределения неотрицательной случайной величины η . Положим

$$D(a_0, a_1, \dots, a_{2n}) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1. Пусть случайная величина η , $\mathbf{P}\{\eta \geq 0\} = 1$, такова, что

$$\mathbf{E}\eta^k = m_k < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, 2r.$$

Если $D(m_2, m_3, \dots, m_{2r}) \neq 0$, то

$$\mathbf{P}\{\eta > 0\} \geq -\frac{D(0, m_1, m_2, \dots, m_{2r})}{D(m_2, m_3, \dots, m_{2r})} \geq 0, \quad r \geq 1, \quad (1)$$

а если, кроме того, $\mathbf{E}\eta^{2r+1} = m_{2r+1} < \infty$ и $\mathbf{P}\{0 < \eta < 1\} = 0$, то $\mathbf{P}\{\eta \geq 1\} \leq m_1$ и при $D(\Delta m_3, \Delta m_4, \dots, \Delta m_{2r+1}) \neq 0$

$$\mathbf{P}\{\eta \geq 1\} \leq m_1 + \frac{D(0, \Delta m_2, \Delta m_3, \dots, \Delta m_{2r+1})}{D(\Delta m_3, \Delta m_4, \dots, \Delta m_{2r+1})}, \quad r \geq 1, \quad (2)$$

где $\Delta m_i = m_i - m_{i-1}$.

Если η принимает только целые неотрицательные значения, то случайную величину η можно интерпретировать как число одновременно происходящих (зависимых) событий, и тогда для $\mathbf{P}\{\eta > 0\} = \mathbf{P}\{\eta \geq 1\}$ справедливы неравенства Бонферрони (см. [6]), которые также выражаются через моменты η . В отличие от неравенств Бонферрони, нижняя оценка (1) всегда неотрицательна. В [1] показано, что неравенства (1) и (2) превращаются в равенства для распределений, состоящих из r атомов, и распределений из r атомов и атома в нуле соответственно. Правая часть (2) может принимать значения, большие 1. Цель данной работы — доказать, что оценки (1) и (2) неуплучшаемы в следующем смысле: для любой случайной величины η , удовлетворяющей условиям утверждения 1, существуют случайные величины ζ и ξ , удовлетворяющие тем же условиям с теми же значениями моментов m_k , такие, что $\mathbf{P}\{\zeta > 0\}$ совпадает с правой частью (1), а $\mathbf{P}\{\xi > 0\}$ совпадает с минимумом из 1 и правой части (2). В п. 2 приведены основные результаты работы, а п. 3 посвящен доказательству теорем из п. 2.

2. Задача об условиях существования распределения с заданными моментами известна как проблема моментов. Приведенное ниже утверждение можно найти в [5].

Утверждение 2. Для того, чтобы проблема моментов на $F = [0, \infty)$ была разрешима, необходимо, чтобы при любом $n = 0, 1, 2, \dots$

$$D_n = D(m_0, m_1, m_2, \dots, m_{2n}) = \det \|m_{i+j}\|_{i,j=0}^n \geq 0,$$

$$D_n^{(1)} = D(m_1, m_2, m_3, \dots, m_{2n+1}) = \det \|m_{i+j+1}\|_{i,j=0}^n \geq 0.$$

Для существования решения проблемы моментов с носителем, содержащим бесконечное множество, необходимо и достаточно, чтобы

$$D_n > 0, \quad D_n^{(1)} > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для существования решения проблемы моментов с носителем, состоящим ровно из $k+1$ точек, отличных от нуля, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} D_0 > 0, \dots, D_k > 0, & D_{k+1} = D_{k+2} = \dots = 0, \\ D_0^{(1)} > 0, \dots, D_k^{(1)} > 0, & D_{k+1}^{(1)} = D_{k+2}^{(1)} = \dots = 0. \end{cases}$$

Для существования решения проблемы моментов с носителем, состоящим ровно из $k+1$ точек, одна из которых лежит в нуле, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} D_0 > 0, \dots, D_k > 0, & D_{k+1} = D_{k+2} = \dots = 0, \\ D_0^{(1)} > 0, \dots, D_{k-1}^{(1)} > 0, & D_{k+1}^{(1)} = D_{k+2}^{(1)} = \dots = 0. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. В последних двух заключениях утверждения 2 проблема моментов — определенная, т.е. имеет единственное решение.

Воспользовавшись этим утверждением, мы можем построить случайные величины, отличные от η , но с такими же моментами.

Теорема 1. Если носитель распределения случайной величины η , удовлетворяющей условиям первой части утверждения 1, содержит более r точек, то существует неотрицательная случайная величина ξ с такими же моментами $m_1, m_2, \dots, m_{2r}$, для которой неравенство (1) превращается в равенство.

Если носитель распределения случайной величины η , удовлетворяющей условиям второй части утверждения 1, содержит более r ненулевых точек, то существует положительная случайная величина ξ с такими же моментами $m_1, m_2, \dots, m_{2r+1}$ и носителем, состоящим ровно из $r+1$ точек.

Как видно из теоремы 1, оценка (1) неулучшаема. Чтобы доказать неулучшаемость оценки (2) в остальных случаях, установим связь атомов случайной величины ξ с корнями некоторого многочлена. В [3] приведено следующее утверждение

Утверждение 3. Если система

$$\begin{cases} p_1 & + & p_2 & + & \dots & + & p_{r+1} & = & m_0, \\ p_1 x_1 & + & p_2 x_2 & + & \dots & + & p_{r+1} x_{r+1} & = & m_1, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ p_1 x_1^k & + & p_2 x_2^k & + & \dots & + & p_{r+1} x_{r+1}^k & = & m_k, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ p_1 x_1^{2r+1} & + & p_2 x_2^{2r+1} & + & \dots & + & p_{r+1} x_{r+1}^{2r+1} & = & m_{2r+1}, \end{cases}$$

имеет решение $p_1, p_2, \dots, p_{r+1}, x_1, x_2, \dots, x_{r+1}, x_i \neq x_j \forall i \neq j$, то $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$ являются корнями многочлена

$$P_{r+1}(m_0, \dots, m_{2r+1}, x) = P_{r+1}(m_0, x) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & x^{r+1} \\ m_0 & m_1 & \dots & m_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_r & m_{r+1} & \dots & m_{2r+1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда верхняя оценка (2) не меньше единицы, т.е.

$$h_{r+1} = m_1 + \frac{D(0, \Delta m_2, \Delta m_3, \dots, \Delta m_{2r+1})}{D(\Delta m_3, \Delta m_4, \dots, \Delta m_{2r+1})} \geq 1.$$

Это возможно в двух случаях: когда случайная величина η не имеет атома в нуле и когда η имеет атом в нуле и как минимум $r+1$ ненулевых атомов. В первом случае $P\{\eta \geq 1\} = 1$, т.е. случайная величина η является искомой, а во втором случае по теореме 1 существует $(r+1)$ -атомная случайная величина ξ , сосредоточенная на $(0, \infty)$ и имеющая те же первые $2r+1$ моментов, что и η . Далее будет доказано, что если $h_{r+1} \geq 1$, то у ξ нет атомов, лежащих левее единицы. Согласно утверждению 3, нам достаточно показать, что у многочлена (3), построенного по моментам ξ , нет корней левее единицы.

Теорема 2. Если числа $m_1, m_2, \dots, m_{2r+1}$ — моменты случайной величины η , сосредоточенной на $0 \cup [1, \infty)$, носитель которой содержит более r ненулевых точек, и $h_{r+1} \geq 1$, то корни многочлена

$$P_{r+1}(1, x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & x^{r+1} \\ 1 & m_1 & \dots & m_{r+1} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_r & m_{r+1} & \dots & m_{2r+1} \end{pmatrix}$$

принадлежат полуинтервалу $[1, \infty)$.

Доказательство теоремы 2 основано на следующем утверждении.

Лемма 1. Если выполнены условия теоремы 2, то справедливо тождество

$$P_{r+1}(1, x) = a(x-1) A_{r+1}(x) + (h_{r+1} - 1) x B_{r+1}(x),$$

где $a < 0$ и

$$A_{r+1}(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & x^r \\ \Delta m_2 & \Delta m_3 & \cdots & \Delta m_{r+2} \\ \Delta m_3 & \Delta m_4 & \cdots & \Delta m_{r+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta m_{r+1} & \Delta m_{r+2} & \cdots & \Delta m_{2r+1} \end{pmatrix},$$

$$B_{r+1}(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & x^r \\ m_2 & m_3 & \cdots & m_{r+2} \\ m_3 & m_4 & \cdots & m_{r+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{r+1} & m_{r+2} & \cdots & m_{2r+1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если случайная величина η удовлетворяет условиям второй части утверждения 1 и $h_{r+1} \geq 1$, то существует случайная величина ξ с такими же моментами $m_1, m_2, \dots, m_{2r+1}$, сосредоточенная на $[1, \infty)$. Тем самым завершается обоснование основного результата статьи.

Теорема 3. Оценки (1) и (2) неумлучаемы.

3. Доказательство теоремы 1. Докажем первую часть теоремы 1. Так как случайная величина η принимает только неотрицательные значения, то для нее справедливы результаты утверждения 2. Носитель η содержит более r точек и в силу утверждения 2

$$\begin{cases} D_0 > 0, \dots, D_r > 0, \\ D_0^{(1)} > 0, \dots, D_{r-1}^{(1)} > 0. \end{cases}$$

Функция D_r линейна по m_0 :

$$D_r(m_0, \dots, m_{2r}) = m_0 D_{r-1}(m_2, \dots, m_{2r}) + D_r(0, m_1, \dots, m_{2r}).$$

При $m_0 = 1$ из приведенных неравенств следует, что $D_r(1, \dots, m_{2r}) > 0$. В [2] показано, что $D_{r-1}(m_2, \dots, m_{2r}) > 0$, $D_r(0, m_1, \dots, m_{2r}) < 0$. Поэтому существует такое число $m_0^* \in (0, 1)$, что $D_r(m_0^*, m_1, \dots, m_{2r}) = 0$. Далее будем рассматривать $D_r^{(1)}$ как функцию от m_{2r+1} при фиксированных $m_0^*, m_1, \dots, m_{2r}$. Так как $D_r^{(1)}(m_{2r+1})$ линейна по m_{2r+1} , то существует такое число m_{2r+1}^* , что $D_r^{(1)}(m_1, \dots, m_{2r+1}^*) = 0$. По той же причине существует такое число m_{2r+2}^* , что $D_{r+1}(m_0^*, m_1, \dots, m_{2r+1}^*, m_{2r+2}^*) = 0$. Построим последовательность $m_0^*, m_1, \dots, m_{2r}, m_{2r+1}^*, m_{2r+2}^*, \dots$ такую, что $D_k^{(1)}(m_1, \dots, m_{2k+1}^*) = 0$, $D_{k+1}(m_0^*, m_1, \dots, m_{2k+2}^*) = 0$, $k \geq r$. Из утверждения 2 следует, что существует распределение с r атомами на $(0, \infty)$ и моментами $m_0^*, m_1, \dots, m_{2r}, m_{2r+1}^*, m_{2r+2}^*, \dots$ такое, что

$$\begin{cases} D_0 > 0, \dots, D_{r-1} > 0, & D_r = D_{r+1} = \dots = 0, \\ D_0^{(1)} > 0, \dots, D_{r-1}^{(1)} > 0, & D_r^{(1)} = D_{r+1}^{(1)} = \dots = 0. \end{cases}$$

Дополним это распределение атомом в нуле с массой $1 - m_0^*$. Тогда мы получим распределение случайной величины ζ , сосредоточенное на $[0, \infty)$, с моментами $m_1, \dots, m_{2r}$. Для этой величины достигается равенство в оценке (1), так как по определению m_0^*

$$\mathbf{P}\{\zeta > 0\} = m_0^* = -\frac{D(0, m_1, m_2, \dots, m_{2r})}{D(m_2, m_3, \dots, m_{2r})}.$$

Случайная величина, удовлетворяющая условиям второй части теоремы 1, также удовлетворяет условиям утверждения 2. Для нее выполняются условия

$$\begin{cases} D_0 > 0, \dots, D_r > 0, \\ D_0^{(1)} > 0, \dots, D_r^{(1)} > 0. \end{cases}$$

Действуя так же, как и в предыдущем случае, построим последовательность $m_{2r+2}^*, m_{2r+3}^*, \dots$ такую, что $D_k(1, m_1, \dots, m_{2k}^*) = 0$, $D_k^{(1)}(1, m_1, \dots, m_{2k+1}^*) = 0$, $k > r$. Для набора моментов $1, m_1, \dots, m_{2r+1}, m_{2r+2}^*, \dots$ выполняется

$$\begin{cases} D_0 > 0, \dots, D_r > 0, & D_{r+1} = D_{r+2} = \dots = 0, \\ D_0^{(1)} > 0, \dots, D_r^{(1)} > 0, & D_{r+1}^{(1)} = D_{r+2}^{(1)} = \dots = 0. \end{cases}$$

Из утверждения 2 следует существование случайной величины ξ с моментами $m_1, \dots, m_{2r+1}$, распределение которой состоит ровно из $r+1$ атомов, лежащих на $(0, \infty)$. Теорема доказана.

Доказательство леммы. Из линейности многочлена $P_{r+1}(\cdot, x)$ по первому аргументу следует

$$\begin{aligned} P_{r+1}(1, x) &= P_{r+1}(h_{r+1}, x) - (h_{r+1} - 1) \det \begin{pmatrix} 0 & x & \dots & x^{r+1} \\ 1 & m_1 & \dots & m_{r+1} \\ 0 & m_2 & \dots & m_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{r+1} & \dots & m_{2r+1} \end{pmatrix} \\ &= P_{r+1}(h_{r+1}, x) + (h_{r+1} - 1)x B_{r+1}(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя определение h_{r+1} , нетрудно проверить, что один из корней многочлена $P_{r+1}(h_{r+1}, x)$ равен 1:

$$\begin{aligned} &P_{r+1}(h_{r+1}, 1) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ h_{r+1} & m_1 & \dots & m_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_r & m_{r+1} & \dots & m_{2r+1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ h_{r+1} & m_1 - h_{r+1} & \dots & \Delta m_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_r & \Delta m_{r+1} & \dots & \Delta m_{2r+1} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{D(0, \Delta m_2, \dots, \Delta m_{2r+1})}{D(\Delta m_3, \dots, \Delta m_{2r+1})} D(\Delta m_3, \dots, \Delta m_{2r+1}) + D(0, \Delta m_2, \dots, \Delta m_{2r+1}) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразуем многочлен $P_{r+1}(h_{r+1}, x)$:

$$P_{r+1}(h_{r+1}, x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & x^{r+1} \\ h_{r+1} & m_1 & \dots & m_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_r & m_{r+1} & \dots & m_{2r+1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x-1 & \dots & x^r(x-1) \\ h_{r+1} & m_1 - h_{r+1} & \dots & \Delta m_{r+1} \\ m_1 & \Delta m_2 & \dots & \Delta m_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_r & \Delta m_{r+1} & \dots & \Delta m_{2r+1} \end{pmatrix}.$$

Любые $r+2$ векторов размерности $r+1$ линейно зависимы. Поэтому существуют такие числа $\alpha_0, \dots, \alpha_r, a$, что

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} h_{r+1} \\ m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} m_1 - h_{r+1} \\ \Delta m_2 \\ \vdots \\ \Delta m_{r+1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r \begin{pmatrix} \Delta m_r \\ \Delta m_{r+1} \\ \vdots \\ \Delta m_{2r} \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Коэффициент $\alpha_0 \neq 0$, так как последние $r+1$ векторов линейно независимы:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & m_1 - h_{r+1} & \dots & \Delta m_r \\ 0 & m_2 - m_1 & \dots & \Delta m_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_r - m_{r-1} & \dots & \Delta m_{2r} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \Delta m_1 & \dots & \Delta m_r \\ \Delta m_2 & \dots & \Delta m_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta m_r & \dots & \Delta m_{2r} \end{pmatrix} \neq 0.$$

По аналогичной причине не равен нулю и коэффициент a :

$$\det \begin{pmatrix} h_{r+1} & m_1 & \cdots & m_r \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_r & m_{r+1} & \cdots & m_{2r} \end{pmatrix} \geq D_r(1, m_1, \dots, m_{2r}) > 0,$$

так как распределение η имеет более r ненулевых атомов и удовлетворяет условиям утверждения 2. Без ограничения общности можем считать, что $\alpha_0 = 1$. Обозначим

$$f(x) = 1 + \alpha_1(x-1) + \alpha_2x(x-1) + \cdots + \alpha_rx^{r-1}(x-1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{r+1}(h_{r+1}, x) &= \det \begin{pmatrix} f(x) & x-1 & \cdots & x^r(x-1) \\ -a & m_1 - h_{r+1} & \cdots & \Delta m_{r+1} \\ 0 & \Delta m_2 & \cdots & \Delta m_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \Delta m_{r+1} & \cdots & \Delta m_{2r+1} \end{pmatrix} \\ &= a(x-1) \det \begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & x^r \\ \Delta m_2 & \Delta m_3 & \cdots & \Delta m_{r+2} \\ \Delta m_3 & \Delta m_4 & \cdots & \Delta m_{r+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta m_{r+1} & \Delta m_{r+2} & \cdots & \Delta m_{2r+1} \end{pmatrix} = a(x-1)A_{r+1}(x) \end{aligned}$$

в силу формулы (5). Применив (4), получим:

$$P_{r+1}(1, x) = a(x-1)A_{r+1}(x) + (h_{r+1} - 1)xB_{r+1}(x).$$

Подставим в это тождество $x = 0$:

$$a = -\frac{P_{r+1}(1, 0)}{A_{r+1}(0)} = -\frac{\det \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_{r+1} \\ m_2 & m_3 & \cdots & m_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{r+1} & m_{r+2} & \cdots & m_{2r+1} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \Delta m_3 & \Delta m_4 & \cdots & \Delta m_{r+2} \\ \Delta m_4 & \Delta m_5 & \cdots & \Delta m_{r+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta m_{r+2} & \Delta m_{r+3} & \cdots & \Delta m_{2r+1} \end{pmatrix}}.$$

Из этого следует, что $a < 0$, так как и числитель, и знаменатель больше нуля. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Как было показано выше, для доказательства теоремы достаточно показать, что на полуинтервале $[0, 1)$ нет корней многочлена $P_{r+1}(1, x)$. Рассмотрим наиболее простой случай $r = 1$:

$$\begin{aligned} P_2(1, x) &= \det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = P_2(h_2, x) - (h_2 - 1) \det \begin{pmatrix} 0 & x & x^2 \\ 1 & m_1 & m_2 \\ 0 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \\ &= P_2(h_2, x) + (h_2 - 1)x(m_3 - m_2x). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$h_2 = m_1 + \frac{D(0, \Delta m_2, \Delta m_3)}{D(\Delta m_2)} = m_1 - \frac{(\Delta m_2)^2}{\Delta m_3},$$

находим после тождественных преобразований:

$$P_2(h_2, x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x-1 & x^2-x \\ h_2 & m_1-h_2 & \Delta m_2 \\ m_1 & \Delta m_2 & \Delta m_3 \end{pmatrix} = (x-1) \left(x - \frac{\Delta m_3}{\Delta m_2} \right) (m_1 m_3 - m_2^2) \frac{\Delta m_2}{\Delta m_3}.$$

Корнями многочлена $P_2(h_2, x)$ являются числа $\Delta m_3 / \Delta m_2$ и 1. Так как

$$\Delta m_3 - \Delta m_2 = \int_1^\infty (x-1)^2 x dF(x) \geq 0,$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины η , то у многочлена $P_2(h_2, x)$ нет корней, лежащих левее единицы. Далее, $P_2(h_2, 0) = m_1 m_3 - m_2^2 > 0$, следовательно, $P_2(h_2, x) > 0$, $x \in [0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} P_2(1, x) &= P_2(h_2, x) + (h_2 - 1)x(m_3 - m_2x) > (h_2 - 1)x(m_3 - m_2x) \\ &\geq (h_2 - 1)x^2(m_3 - m_2) = (h_2 - 1)x^2 \int_1^\infty (t-1)t^2 dF(t) \geq 0, \end{aligned}$$

если $h_2 \geq 1$, $x \in [0, 1)$. Из утверждения 3 и доказанного выше следует, что если случайная величина η , сосредоточенная на $\{0\} \cup [1, \infty)$, имеет первые 3 момента m_1, m_2, m_3 и $h_2 \geq 1$, то корни многочлена $P_2(1, x)$ принадлежат полуинтервалу $[1, \infty)$, т.е. существует положительная случайная величина ξ с $\mathbf{E}\xi = m_1$, $\mathbf{E}\xi^2 = m_2$, $\mathbf{E}\xi^3 = m_3$ такая, что $\mathbf{P}\{\xi \geq 1\} = 1$.

Далее воспользуемся индукцией. Предположим, что утверждение теоремы 2 верно для некоторого натурального r , т.е., что если $m_1, m_2, \dots, m_{2r-1}$ — первые $2r-1$ моментов случайной величины η с носителем на $\{0\} \cup [1, \infty)$ и $h_r \geq 1$, то корни многочлена $P_r(1, m_1, \dots, m_{2r-1}, x)$ лежат на $[1, \infty)$ и $P_r(1, m_1, \dots, m_{2r-1}, x) > 0$ при $0 \leq x < 1$.

Выведем из этого индуктивного предположения, что если $m_1, m_2, \dots, m_{2r+1}$ — первые $2r+1$ моментов случайной величины η с носителем на $\{0\} \cup [1, \infty)$ и $h_{r+1} \geq 1$, то корни многочлена $P_{r+1}(1, m_1, \dots, m_{2r+1}, x)$ также лежат на $[1, \infty)$ и $P_{r+1}(1, m_1, \dots, m_{2r+1}, x) > 0$ при $0 \leq x < 1$.

Рассмотрим случайные величины ξ_1 и ξ_2 с функциями распределения

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leq y\} = \int_1^y \frac{(t^2 - t)}{\Delta m_2} dF(t), \quad \mathbf{P}\{\xi_2 \leq y\} = \int_1^y \frac{t^2}{m_2} dF(t), \quad y \in [1, \infty).$$

Тогда $\mathbf{P}\{\xi_1 \geq 1\} = 1$, $\mathbf{P}\{\xi_2 \geq 1\} = 1$ и $\mathbf{E}\xi_1^k = \Delta m_{k+2} / \Delta m_2$, $\mathbf{E}\xi_2^k = m_{k+2} / m_2$, $k = 1, \dots, 2r-1$. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 удовлетворяют предположениям индукции, поэтому построенные для них многочлены

$$\begin{aligned} P_r\left(1, \frac{\Delta m_3}{\Delta m_2}, \dots, \frac{\Delta m_{2r+1}}{\Delta m_2}, x\right) &= \frac{1}{(\Delta m_2)^r} A_{r+1}(x), \\ P_r\left(1, \frac{m_3}{m_2}, \dots, \frac{m_{2r+1}}{m_2}, x\right) &= \frac{1}{(m_2)^r} B_{r+1}(x) \end{aligned}$$

положительны на $[0, 1)$. Поэтому из леммы и условия $h_{2r+1} \geq 1$ получим

$$\begin{aligned} P_{r+1}(1, m_1, \dots, m_{2r+1}, x) &= a(x-1) A_{r+1}(x) + (h_{r+1} - 1)x B_{r+1}(x) \\ &= \Delta m_2^r a(x-1) P_r\left(1, \frac{\Delta m_3}{\Delta m_2}, \dots, \frac{\Delta m_{2r+1}}{\Delta m_2}, x\right) \\ &\quad + m_2^r (h_{r+1} - 1)x P_r\left(1, \frac{m_3}{m_2}, \dots, \frac{m_{2r+1}}{m_2}, x\right) > 0, \quad x \in [0, 1), \end{aligned}$$

из чего следует утверждение индукции. Таким образом, $P_{r+1}(1, x)$ не имеет корней на $[0, 1)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Неулучшаемость нижней оценки непосредственно следует из теоремы 1.

Неулучшаемость верхней оценки в случае, когда $h_{r+1} \geq 1$, доказана в теореме 2. Если $h_{r+1} < 1$, то η имеет ненулевой атом в нуле. Рассмотрим вспомогательную случайную величину η' такую, что

$$\mathbf{P}\{\eta' = 0\} = 1 - \frac{1 - \mathbf{P}\{\eta = 0\}}{h_{r+1}} \geq 0, \quad \mathbf{P}\{\eta' > x\} = \frac{\mathbf{P}\{\eta > x\}}{h_{r+1}}.$$

Из определения η' следует, что $E\eta'^k = E\eta^k/h_{r+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Оценка (2) для $P\{\eta' \geq 1\}$ имеет вид

$$\frac{m_1}{h_{r+1}} + \frac{1}{h_{r+1}} \frac{D(0, \Delta m_2, \Delta m_3, \dots, \Delta m_{2r+1})}{D(\Delta m_3, \Delta m_4, \dots, \Delta m_{2r+1})} = 1.$$

Из теоремы 1 и теоремы 2 следует, что существует случайная величина ξ' с такими же первыми $2r+1$ моментами, как и у η' , сосредоточенная на $[1, \infty)$:

$$P\{\xi' \geq 1\} = 1, \quad E\xi'^k = \frac{E\eta^k}{h_{r+1}}, \quad k = 1, \dots, 2r+1.$$

А значит, существует случайная величина ξ , сосредоточенная на $[1, \infty)$, такая, что

$$P\{\xi > x\} = P\{\xi' > x\} h_{r+1}, \quad P\{\xi = 0\} = 1 - h_{r+1}, \quad x \geq 1.$$

Здесь мы проделали операцию, обратную описанной в начале доказательства. По построению первые $2r+1$ моментов ξ и η совпадают. Кроме того, неравенство (2) выполняется для ξ как равенство. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубков А. М.* Неравенства для распределения числа одновременно происходящих событий. — Обозрение прикл. промышл. матем., сер. вероятн. статист., 1994, т. 1, в. 4, с. 638–666.
2. *Зубков А. М.* Неравенства для моментов отношения случайных величин. — Обозрение прикл. промышл. матем., сер. вероятн. статист., 1996, т. 3, в. 4, с. 549–566.
3. *Ахмезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Физматгиз, 1961, 310 с.
4. *Казьмин Ю. А.* Моментов проблема. — Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Советская Энциклопедия, 1984, с. 793–799.
5. *Стилтьес Т. И.* Исследования о непрерывных дробях. Харьков–Киев: ОНТИ НКТП УССР, 1936, 155 с.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.

Поступила в редакцию
10.IV.2001

© 2002 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

ЗАМЕЧАНИЕ К ЗАКОНУ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА КОЛМОГорова¹⁾

В заметке приводится некоторое дополнение к теореме Колмогорова о законе повторного логарифма для суммы независимых ограниченных случайных величин.

Ключевые слова и фразы: независимые ограниченные случайные величины, закон повторного логарифма.

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия; e-mail: math@spsra.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00724 и гранта ведущих научных школ № 00-15-96019.