Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, О вероятностных и моментных неравенствах для зависимых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 1, 194–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp338>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:43:45

11. Snyder D. L. Random Point Processes. New York: Wiley, 1975, 482 p.
12. Korolev V. Yu., Selivanova D. O. Convergence rate estimates in some limit theorems for maximum random sums. — J. Math. Sci., 1995, v. 76, № 1, p. 2163–2168.
13. Hull J. Options, Futures and Other Derivative Securities. New York–London: Prentice-Hall, 1989.
14. Бенинг В. Е., Королев В. Ю. Асимптотическое поведение обобщенных процессов Кокса. — Вестник Моск. ун-та, сер. вычисл. матем. кибернет., 1996, в. 3, с. 55–68.
15. Barndorff-Nielsen O. E. Gaussian Inverse Gaussian Processes and the Modeling of Stock Returns. Preprint. Aarhus: Aarhus University, 1994.
16. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
17. Ширяев А. Н. Вероятностно-статистические модели эволюции финансовых индексов. — Обзорение прикл. промышл. матем., сер. финансовая и страховая матем., 1995, т. 2, в. 4, с. 527–555.
18. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию
11.11.1998

© 2000 г.

НАГАЕВ С. В.*

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ И МОМЕНТНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Получена верхняя оценка того, что норма суммы зависимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве превзойдет заданный уровень. Эта оценка принципиально отличается от известных к настоящему времени вероятностных неравенств для сумм зависимых случайных величин как по форме, так и по методу доказательства. Прежде всего, в ней участвует только один из счетного числа коэффициентов перемешивания, причем односторонний. Благодаря введению квантили, она не содержит никаких моментов. Постоянные, входящие в оценку, явно вычислены. Как и в случае независимых слагаемых, с помощью полученной оценки выводятся моментные неравенства.

Ключевые слова и фразы: банахово пространство, гауссовский случайный вектор, гильбертово пространство, квантиль, коэффициент равномерного перемешивания, неравенство Хоффмана-Йоргенсена, неравенство Марцинкевича-Зигмунда, функция Эйлера.

1. Введение. Формулировка и обсуждение результатов. Пусть X_k , $k = 1, \dots, n$, — последовательность случайных величин со значениями в сепарабельном банаховом пространстве с нормой $|\cdot|$. Положим $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$, $S_{kn} = \sum_{i=1}^n X_i$.
Пусть

$$\phi(m) = \sup \left\{ \left| \frac{P(AB)}{P(A)} - P(B) \right|; 1 \leq k \leq n-m, A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{k+m}^n, P(A) \neq 0 \right\}$$

— коэффициент равномерного перемешивания. Здесь $\mathcal{F}_j^k$ означает σ -алгебру, порожденную случайной величиной X_l , $l = j, \dots, k$.

* Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: Nagaev@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01529).

Определим

$$\phi^+(m) = \sup \left\{ \frac{P(AB)}{P(A)} - P(B); 1 \leq k \leq n-m, A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{k+m}^n, P(A) \neq 0 \right\}.$$

Вообще говоря, $\phi^+(n) < \phi(n)$. Пусть $\phi^+(1) < 1$ и $\delta > 0$ удовлетворяет условию $\delta + \phi^+(1) < 1$. Положим $\rho = \delta + \phi^+(1)$. Пусть α — любое число такое, что $P\{2M_n > \alpha\} < \delta$. Определим $Q(r) = \sum_1^n P\{|X_j| > r\}$, $A_t = \sum_1^n E|X_j|^t$.

Сформулируем теперь верхнюю оценку для $P\{M_n > r\}$, полученную в работе.

Теорема 1. Для любых $r > \alpha$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$

$$P\{M_n > r\} < \frac{2}{\alpha \rho} \int_0^r Q\left(\frac{r\alpha \varepsilon^2}{2u}\right) \frac{du}{(1 + \varepsilon u/\alpha)^{s(\varepsilon)+1}} + \rho^{-1} \left(1 + \frac{\varepsilon r}{\alpha}\right)^{-s(\varepsilon)}, \quad (1)$$

где $s(\varepsilon) = -\ln \rho / \ln(1 + \varepsilon)$.

Заметим, что интеграл в правой части (1) представляет собой свертку двух функций, заданных на мультипликативной группе положительных действительных чисел.

Доказательство оценки (1) основано на модификации известного неравенства Хоффмана-Йоргенсена [6] (см. также работу [4]). Неравенство (1) ближе всего примыкает к неравенству (3') из работы [2] (см. также [1, теорема 4] и [3, следствия 1.5 и 1.6]).

Если $\phi^+(1) = 1$, но $\phi^+(2) < 1$, то можно рассмотреть две подпоследовательности $X_1, X_3, \dots, X_{2k+1}, \dots$ и $X_2, X_4, \dots, X_{2k}, \dots$. Для каждой из них $\phi^+(1) < 1$. Если M'_n и M''_n определены соответственно для первой и второй подпоследовательности, то

$$P\{M_n > r\} < P\left\{M'_n > \frac{r}{2}\right\} + P\left\{M''_n > \frac{r}{2}\right\}.$$

Очевидно, этот подход можно применить и в случае $\phi^+(k) = 0, 1 \leq k < m, \phi^+(m) < 1$.

Следствие 1. Для любых $t > 0$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$ таких, что $s(\varepsilon) > t$,

$$EM_n^t < c_1(t) A_t + c_2(t) \alpha^t, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} c_1(t) &\leq \frac{2^{t+1}}{\varepsilon^{3t+1} \rho} B(t+1, s(\varepsilon) - t + 1), \\ c_2(t) &\leq \rho^{-1} \varepsilon^{-t} B(t+1, s(\varepsilon) - t) t + 1, \end{aligned} \quad (3)$$

$B(\cdot, \cdot)$ — функция Эйлера.

Неравенство (1) принципиально отличается от известных к настоящему времени вероятностных неравенств для сумм зависимых случайных величин как по форме, так и по методу доказательства. Прежде всего, в нем участвует только один из счетного числа коэффициентов перемешивания, причем односторонний. Благодаря введению квантили, оно не содержит никаких моментов. Постоянные, входящие в правую часть неравенства, явно вычислены. Сказанное вполне относится и к моментному неравенству (2).

Неравенство (2) универсально в том смысле, что оно позволяет охватить случай $0 < t < 2$, а также $EX_j \neq 0$.

Конечно, возникает проблема вычисления квантили α . Мы изложим один из возможных подходов к этой задаче, предполагая для простоты, что X_j принимают действительные значения.

Пусть τ_x — момент первого выхода блуждания S_k за уровень $x, x > 0$. Определим

$$\phi^-(k) = \sup \left\{ P(B) - \frac{P(AB)}{P(A)}; 1 \leq k \leq n-m, A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{k+m}^n, P(A) \neq 0 \right\}.$$

Очевидно, $\{S_n > x\} \supset \cup_1^{n-1} \{S_{kn} > -x, \tau_{2x} = k\} \cup \{\tau_{2x} = n\}$. Воспользуемся неравенством

$$P\{S_{kn} > -x, \tau_{2x} = k\} > (P\{S_{kn} > -x\} - \phi^-(1)) P\{\tau_{2x} = k\}.$$

Далее, $P\{S_{kn} > -x\} > 1 - B^2(k, n)/x^2$, где $B^2(k, n) = E|S_{kn}|^2$. В результате мы получаем

$$\frac{B^2(0, n)}{x^2} > P\{|S_n| > x\} > P\{M_n > 2x\} \left(1 - \sup_{0 \leq k \leq n-1} \frac{B^2(k, n)}{x^2} - \phi^-(1)\right). \quad (4)$$

Таким образом, задача сведена к оценке вторых моментов $B^2(k, n)$, $k = 0, \dots, n-1$.

Если $\sum_1^\infty \phi^{1/2}(k) < \infty$ и $EX_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, то

$$B^2(k, n) < \left(1 + 2 \sum_1^\infty \phi^{1/2}(k)\right) \sum_1^n EX_i^2. \quad (5)$$

Можно также оценить дисперсии $B^2(k, n)$, используя результаты работы [10]. Мы видим, что вся совокупность коэффициентов перемешивания может потребоваться только на этапе оценки квантили α .

Следствие 2. Пусть случайные величины X_j принимают действительные значения и $EX_j = 0$. Тогда для любых $t > 2$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$ таких, что $s(\varepsilon) > t$,

$$EM_n^t < c_1(t) A_t + c_2'(t) B_n^t, \quad (6)$$

где $B_n^2 = \sum_1^n EX_j^2$, $c_2'(t) = c_2(t)(32c(\phi)/((1 - \phi^-(1))(1 - \phi^+(1))))^{t/2}$, $c(\phi) = 1 + 2 \sum_1^\infty \phi^{1/2}(k)$, $c_1(t)$ и $c_2(t)$ удовлетворяют условиям (3).

В случае произвольного банахова пространства можно воспользоваться для оценки квантили α изложенным выше рецептом и придти в результате к неравенству типа (6) с $B_n^2 = \sum_1^n E|X_j|^2$ (естественно, нужно наложить ограничение $EX_j = 0$). Мы не будем здесь этим заниматься, а применим другой подход, основанный на редукции бесконечномерного случая к одномерному. Этот подход был предложен в работе [5]. Правда, он годится лишь для гильбертова пространства.

Пусть $\phi = \{\phi(k)\}_1^\infty$ и $\psi = \{\psi(k)\}_1^\infty$ — две последовательности коэффициентов равномерного перемешивания. Будем считать, что $\phi < \psi$, если $\phi(k) \leq \psi(k)$, $k = 1, \infty$, и хотя бы для одного k $\phi(k) < \psi(k)$.

Теорема 2. Пусть постоянные $c_1(t, \phi)$ и $c_2(t, \phi)$ монотонно зависят от последовательности $\phi = \{\phi(k)\}_1^\infty$ коэффициентов равномерного перемешивания, т.е. $c_i(t, \phi') < c_i(t, \phi'')$, если $\phi' < \phi''$, и при $t > 2$

$$EM_n^t < c_1(t, \phi) A_t + c_2(t, \phi) B_n^t \quad (7)$$

для любой последовательности одномерных случайных величин с $EX_j = 0$.

Тогда для любой последовательности случайных величин со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H , нулевыми средними и последовательностью коэффициентов равномерного перемешивания $\psi = \{\psi(k)\}_1^\infty \leq \phi$

$$EM_n^t < c_1(t, \phi) A_t + c_2(t, \phi) E|Y|^t \beta_t^{-1}, \quad t > 2,$$

где Y — гауссовская случайная величина в H с тем же ковариационным оператором, что и S_n , β_t — абсолютный момент порядка t одномерного стандартного гауссовского закона.

В силу неравенства Марцинкевича-Зигмунда при $t \geq 1$

$$E|Y|^t < a_t (E|Y|^2)^{t/2},$$

где a_t — постоянная, зависящая только от t , (см., например, [7, с. 78]). Однако справедлив более точный результат.

Теорема 3. Пусть Y — гауссовский случайный вектор в H и $EY = 0$. Тогда для любого $t > 2$

$$E|Y|^t \leq (E|Y|^2)^{t/2} \beta_t.$$

Последнее неравенство может рассматриваться как изопериметрическое. Оно показывает, что максимум абсолютного момента порядка $t \geq 1$ нормы гауссовского вектора при фиксированном втором моменте достигается на одномерном распределении. Ниже (см. п. 7) мы сравним теорему 3 с одним неравенством из недавно вышедшей монографии В.И. Богачева [14].

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие 3. Если выполнены условия теоремы 2, то

$$EM_n^t \leq c_1(t, \phi) A_t + c_2(t, \phi) (E|Y|^2)^{t/2}, \quad t > 2.$$

Стандартный подход к выводу вероятностных неравенств основан на применении неравенств типа Розенталя. Для вывода последних используется прямой подход, основанный на представлении четного момента суммы или нормы суммы случайных величин в виде суммы смешанных моментов. При этом вместо A_t , как правило, фигурирует $\sum_1^n (E|X_j|^{t+\varepsilon})^{t/(t+\varepsilon)}$. Исключением является работа С.А. Утева [8]. В ней упомянутый выше прямой подход применяется в случае гильбертова пространства, однако A_t не заменяется на $\sum_1^n (E|X_j|^{t+\varepsilon})^{t/(t+\varepsilon)}$. Комбинаторные рассуждения Утева чрезвычайно сложны и запутаны, что порождает сомнения (на наш взгляд вполне справедливые) в корректности его доказательства (см. [9, сноска на с. 27]).

Неравенства, полученные в настоящей работе, позволят, в частности, усовершенствовать многие результаты, касающиеся оценки скорости сходимости в законах больших чисел для последовательностей случайных величин с равномерным перемешиванием.

Обзор вероятностных и моментных неравенств для случайных процессов и полей с перемешиванием и их приложений содержится, например, в [9]. Упомянем в этой связи также статью Рио [11], в которой неравенства Беннета–Хёффдинга и Нагаева–Фука переносятся на сумму случайных величин, удовлетворяющих условию сильного перемешивания Розенблата.

2. Доказательство теоремы 1. Нам понадобится следующая

Лемма. Для любых неотрицательных s, t, u

$$P\{M_n > t + s + u\} \leq P\{M_n > t\} (P\{\bar{M}_n > s\} + \phi^+(1)) + \sum_1^n P\{|X_j| > u\},$$

где $\bar{M}_n = \max_{0 \leq k < j \leq n} |S_{kj}|$.²⁾

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $P\{M_n > t\} > 0$. Нетрудно видеть, что

$$\{M_n > t + s + u\} \subset \{M_n > t + s + u, \max_{1 \leq j \leq n} |X_j| \leq u\} \cup \{\max_{1 \leq j \leq n} |X_j| > u\}. \quad (8)$$

Далее,

$$\{M_n > t + s + u, \max_{1 \leq j \leq n} |X_j| \leq u\} \subset \bigcup_1^n \{\tau = k, \max_{k < j \leq n} |S_{kj}| \geq s\}, \quad (9)$$

где $\tau = \inf\{k: |S_k| > t\}$. Согласно определению $\phi^+(\cdot)$,

$$P\{\tau = k, \max_{k < j \leq n} |S_{kj}| > s\} \leq P\{\tau = k\} (P\{\max_{k < j \leq n} |S_{kj}| \geq s\} + \phi^+(1)). \quad (10)$$

Комбинируя (8)–(10) и учитывая, что

$$P\{\max_{k < j \leq n} |S_{kj}| > s\} \leq P\{\bar{M}_n > s\}, \quad \bigcup_1^n \{\tau = k\} = \{M_n > t\},$$

мы приходим к утверждению леммы.

²⁾ Для вещественных случайных величин близкий результат получен Пелиград [12, лемма 3.1].

Доказанная лемма является обобщением леммы 4.4 из работы [6] (см. также [4, предложение 3]).

В силу леммы для любых $t > 0$, $s > 0$, $u > 0$

$$P\{M_n > t + s + u\} \leq P\{M_n > t\} \left(P\left\{M_n > \frac{s}{2}\right\} + \phi^+(1) \right) + \sum_1^n P\{|X_j| > u\}, \quad (11)$$

поскольку $\overline{M}_n \leq 2M_n$.

Рассмотрим рекуррентную последовательность $y_m = (1 + \varepsilon)y_{m-1} + \alpha$, $m \geq 1$, $y_0 = 0$. Очевидно,

$$y_m = \frac{(1 + \varepsilon)^m - 1}{\varepsilon} \alpha. \quad (12)$$

Полагая в (11) $t = y_{m-1}$, $s = \alpha$, $u = \varepsilon y_{m-1}$, при $m > 1$ имеем $P\{M_n > y_m\} < P\{M_n > y_{m-1}\} \rho + Q(\varepsilon y_{m-1})$. Отсюда

$$P\{M_n > y_m\} < \sum_1^{m-1} Q(\varepsilon y_{m-k}) \rho^{k-1} + \rho^m. \quad (13)$$

В силу (12) $k = [\ln(1 + \varepsilon y_k / \alpha)] / [\ln(1 + \varepsilon)]$. Следовательно,

$$\rho^k = \left(1 + \frac{\varepsilon y_k}{\alpha}\right)^{\ln \rho / \ln(1 + \varepsilon)}.$$

Подставляя это выражение в (13), получаем оценку

$$P\{M_n > y_m\} < \sum_1^{m-1} \frac{Q(\varepsilon y_{m-k})}{(1 + \varepsilon y_{k-1} / \alpha)^{s(\varepsilon)}} + \left(1 + \frac{\varepsilon y_m}{\alpha}\right)^{-s(\varepsilon)}, \quad (14)$$

где $s(\varepsilon) = -\ln \rho / \ln(1 + \varepsilon)$.

Далее,

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{(1 + \varepsilon y_{k-1} / \alpha)^{s(\varepsilon)}} Q(\varepsilon y_{m-k}) < \frac{1}{\rho} \int_{y_{k-1}}^{y_k} Q\left(\frac{y_{m+1} \varepsilon^2 \alpha}{2u}\right) \frac{du}{(1 + \varepsilon u / \alpha)^{s(\varepsilon)}}, \quad (15)$$

поскольку $(1 + \varepsilon)^{k-1} \alpha < y_k < (1 + \varepsilon)^k \alpha / \varepsilon$, и, следовательно, при $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$

$$\frac{y_{k-1} y_{m-k}}{y_{m+1}} > \frac{\alpha \varepsilon}{(1 + \varepsilon)^4} > \frac{\alpha \varepsilon}{2}.$$

Заметим, что

$$y_k - y_{k-1} = \varepsilon y_{k-1} + \alpha, \quad \frac{1 + \varepsilon y_k / \alpha}{1 + \varepsilon y_{k-1} / \alpha} = \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon) y_{k-1} / \alpha + 2}{\varepsilon y_{k-1} / \alpha + 1} < 2.$$

Поэтому для $y_{k-1} \leq u \leq y_k$

$$\frac{1}{y_k - y_{k-1}} \leq \frac{2}{\alpha(1 + \varepsilon u / \alpha)}. \quad (16)$$

Из (14)–(16) следует

$$P\{M_n > y_m\} < \frac{2}{\alpha \rho} \int_0^{y_{m-1}} Q\left(\frac{y_{m+1} \varepsilon^2 \alpha}{2u}\right) \frac{du}{(1 + \varepsilon u / \alpha)^{s(\varepsilon)+1}} + \rho^{-1} \left(1 + \frac{\varepsilon y_{m+1}}{\alpha}\right)^{-s(\varepsilon)}.$$

Для любого y выберем m так, чтобы $y_m \leq y < y_{m+1}$. В результате мы получаем, что для $y > \alpha$

$$P\{M_n > y\} < \frac{2}{\alpha \rho} \int_0^y Q\left(\frac{y \varepsilon^2 \alpha}{2u}\right) \frac{du}{(1 + \varepsilon u / \alpha)^{s(\varepsilon)+1}} + \rho^{-1} \left(1 + \frac{\varepsilon y}{\alpha}\right)^{-s(\varepsilon)},$$

что и требовалось доказать.

3. Доказательство следствия 1. Заметим, прежде всего, что

$$t \int_0^\infty r^{t-1} \mathbf{P}\{M_n > r\} dr = \mathbf{E} M_n^t. \quad (17)$$

Умножая обе части (1) на r^{t-1} и интегрируя затем по r , имеем

$$\rho \int_\alpha^\infty r^{t-1} \mathbf{P}\{M_n > r\} dr \leq \frac{2}{\alpha} I_1 I_2 + \int_0^\infty \frac{r^{t-1} dr}{(1 + \varepsilon r/\alpha)^{s(\varepsilon)}}, \quad (18)$$

где

$$I_1 = \int_1^\infty r^{t-1} Q\left(\frac{\alpha \varepsilon^2}{2} r\right) dr, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{r^t dr}{(1 + \varepsilon r/\alpha)^{s(\varepsilon)+1}}.$$

Мы использовали здесь формулу

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{t-1} dr \int_0^r g\left(\frac{r}{u}\right) f(u) du &= \int_0^\infty f(u) du \int_u^\infty r^{t-1} g\left(\frac{r}{u}\right) dr \\ &= \int_0^\infty u^t f(u) du \int_1^\infty v^{t-1} g(v) dv. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$I_1 \leq \left(\frac{2}{\alpha \varepsilon^2}\right)^t \frac{A_t}{t}. \quad (19)$$

Далее,

$$I_2 \leq \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{t+1} B\left(t+1, s(\varepsilon) - t + 1\right), \quad (20)$$

где $B(\cdot, \cdot)$ — функция Эйлера (см. [13, с. 309, формула 11]). Аналогично

$$\int_0^\infty \frac{r^{t-1} dr}{(1 + \varepsilon r/\alpha)^{s(\varepsilon)}} \leq \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^t B\left(t, s(\varepsilon) - t\right). \quad (21)$$

Наконец,

$$\int_0^\alpha r^{t-1} \mathbf{P}\{M_n > r\} dr \leq \frac{\alpha^t}{t}. \quad (22)$$

Комбинируя равенство (17) и оценки (18)–(22), получаем желаемый результат.

4. Доказательство следствия 2. Пусть x_0 — положительный корень уравнения

$$\frac{c(\phi) B_n^2}{x^2} = \frac{1 - \phi^-(1)}{2}.$$

Если $x > x_0$, то $1 - c(\phi) B_n^2/x^2 - \phi^-(1) > (1 - \phi^-(1))/2$. Отсюда в силу (4) и (5) при $x > x_0$

$$\mathbf{P}\{M_n > 2x\} < \frac{2c(\phi) B_n^2}{x^2(1 - \phi^-(1))}.$$

Если

$$\frac{32c(\phi) B_n^2}{x^2(1 - \phi^-(1))} < 1 - \phi^+(1), \quad (23)$$

то $\mathbf{P}\{2M_n > x\} < 1 - \phi^+(1)$. Полагая в (2) α равным минимальному из x , удовлетворяющих неравенству (23), мы получаем нужный результат.

5. Доказательство теоремы 2. Не нарушая общности, можно считать $H = l_2$. Пусть γ_N — гауссовский случайный вектор в l_2 , у которого первые N координат образуют стандартный гауссовский вектор в $\mathbf{R}_N$, а остальные координаты равны нулю. В [5] доказано, что для любого случайного вектора X со значениями в H

$$\mathbf{E}|X|^t = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_t^{-1} \mathbf{E}_{\gamma_N} \mathbf{E}_X |(X, \gamma_N)|^t, \quad (24)$$

если γ_N и X независимы. Здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение. Запись $E_\xi f(\xi, \eta)$ означает, что математическое ожидание берется относительно ξ при фиксированном η .

Согласно нашему предположению (7), при фиксированном γ_N

$$E_{S_n} |(S_n, \gamma_N)|^t < c_1(t, \phi) \sum_1^n E_{X_j} |(X_j, \gamma_N)|^t + c_2(t, \phi) \left(\sum_1^n E_{X_j} (X_j, \gamma_N)^2 \right)^{t/2}. \quad (25)$$

В силу (24)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_{\gamma_N} E_{X_j} |(X_j, \gamma_N)|^t = E|X_j|^t \beta_t. \quad (26)$$

Далее,

$$\sum_1^n E_{X_j} (X_j, \gamma_N)^2 = E_{S_n} (S_n, \gamma_N)^2 = (T_n \gamma_N, \gamma_N), \quad (27)$$

где T_n — ковариационный оператор S_n .

Не нарушая общности, можно считать оператор T_n диагональным. С другой стороны,

$$(T_n \gamma_N, \gamma_N) = (T_n^{1/2} \gamma_N, T_n^{1/2} \gamma_N) = |Y_N|^2, \quad (28)$$

где $Y_N = T_n^{1/2} \gamma_N$.

Очевидно, Y_N можно рассматривать как гауссовскую величину в R_N с ковариационным оператором $T_n(N)$, являющимся ограничением T_n на R_N . Нетрудно видеть, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E|Y_N|^t = E|Y|^t, \quad (29)$$

где Y — гауссовская случайная величина в l_2 с ковариационным оператором T_n . Из (27)–(29) следует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_{\gamma_N} \left(\sum_1^n E_{X_j} (X_j, \gamma_N)^2 \right)^{t/2} = E|Y|^t. \quad (30)$$

Сопоставляя (24)–(26) и (30), мы заключаем, что

$$E|S_n|^t = \beta_t^{-1} \lim_{N \rightarrow \infty} E_{\gamma_N} E_{S_n} |(S_n, \gamma_N)|^t < c_1(t, \phi) A_t + c_2(t, \phi) E|Y|^t \beta_t^{-1},$$

что и требовалось доказать.

6. Доказательство теоремы 3. Не нарушая общности, можно считать, что $H = l_2$ и $Y = (\sigma_1 \xi_1, \sigma_2 \xi_2, \dots, \sigma_n \xi_n, \dots)$, где ξ_j — независимые одномерные стандартные нормальные случайные величины.

Рассмотрим конечномерную гауссовскую случайную величину Y со значениями в R_N . Легко видеть, что в этом случае

$$E|Y|^t = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_1^N \sigma_j^2 x_j^2 \right)^{t/2} \exp \left\{ - \sum_1^N \frac{x_j^2}{2} \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_N.$$

Докажем, что

$$E|Y|^t \leq E|\hat{Y}|^t, \quad (31)$$

где $\hat{Y} = (\sigma_1 \xi_1, \sigma_2 \xi_2, \dots, \sigma_{N-2} \xi_{N-2}, \eta)$, η не зависит от ξ_j , $j = 1, \dots, N-2$, и имеет нормальное распределение, $E\eta^2 = \sigma_{N-1}^2 + \sigma_N^2$, $E\eta = 0$.

С этой целью рассмотрим функцию

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_1^{N-2} \sigma_j^2 x_j^2 + u x_{N-1}^2 + (b^2 - u) x_N^2 \right)^{t/2} \exp \left\{ - \sum_1^N \frac{x_j^2}{2} \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_N,$$

где $b^2 = \sigma_{N-1}^2 + \sigma_N^2$, $0 \leq u \leq b^2$.

Очевидно, $f(b^2) = f(0) = (2\pi)^{N/2} \mathbf{E}|\hat{Y}|^t$.

Нетрудно показать, что при $t > 2$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} f(u) &= \frac{t(t-2)}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_1^{N-2} \sigma_j^2 x_j^2 + u x_{N-1}^2 + (b^2 - u) x_N^2 \right)^{t/2-2} \\ &\quad \times (x_{N-1}^2 - x_N^2)^2 \exp \left\{ - \sum_1^N \frac{x_j^2}{2} \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_N \geq 0 \end{aligned}$$

(интеграл конечен для $0 \leq u \leq b^2$). Таким образом, при $t > 2$ функция $f(u)$ является выпуклой в интервале $(0, b^2)$ и, следовательно, достигает максимума на его концах. Итак, мы доказали неравенство (31). Последовательно применяя (31), мы приходим к выводу, что

$$\mathbf{E}|Y|^t \leq \left(\sum_1^N \sigma_j^2 \right)^{t/2} \beta_t,$$

если Y имеет размерность N .

В общем случае достаточно заметить, что $\mathbf{E}|Y|^t = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}|Y_N|^t$, где $Y_N = (\sigma_1 \xi_1, \sigma_2 \xi_2, \dots, \sigma_N \xi_N, 0, \dots)$.

7. Замечания. В [14] получено неравенство

$$\|I_n(f)\|_p \leq (p-1)^{n/2} \|f\|_2, \quad p \geq 2, \quad (32)$$

(с. 207, следствие 5.63). Здесь $f \in L_2(\gamma)$, γ — гауссовская мера на локально выпуклом пространстве, $\|\cdot\|$ — норма в $L_p(\gamma)$, $I_n(\cdot)$ — проекция на χ_n , где χ_n — ортогональные подпространства $L_2(\gamma)$, описываемые в терминах полиномов Эрмита.

Естественно попытаться вывести из (32) неравенство того же типа, что и в теореме 3, выбрав подходящим образом функцию f . Если γ — одномерное гауссовское распределение, то пространство χ_n порождается многочленом Эрмита $H_n(x)$. Полагая $f(x) = x$ и $n = 1$, мы приходим к оценке

$$\mathbf{E}|Y|^p \leq (p-1)^{p/2} (\mathbf{E}|Y|^2)^{p/2}.$$

Эта оценка несколько завышена.

Пусть теперь γ — стандартное гауссовское распределение в $\mathbf{R}^N$. Положим

$$f(x) = \sum_1^N \sigma_j^2 x_j^2, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_N),$$

и вычислим $I_2 f$. Нетрудно видеть, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_2(x_j) d\gamma = \sigma_j^2 (\beta_4 - \beta_2) / \sqrt{2}$. С другой стороны, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_1(x_j) H_1(x_k) d\gamma = 0$, $j \neq k$. Поэтому

$$I_2 f = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta_4 - \beta_2) \sum_1^N \sigma_j^2 H_2(x_j).$$

Пусть $Y = (\sigma_1 \xi_1, \sigma_2 \xi_2, \dots, \sigma_N \xi_N)$, где ξ_j независимы и нормальны $\mathcal{N}(0, 1)$. В терминах Y $I_2 f$ записывается следующим образом:

$$I_2 f = \frac{\beta_4 - \beta_2}{\sqrt{2}} (|Y|^2 - \mathbf{E}|Y|^2). \quad (33)$$

В силу (32) и (33)

$$\frac{\beta_4 - \beta_2}{\sqrt{2}} \mathbf{E}^{1/p} (|Y|^2 - \mathbf{E}|Y|^2)^p < (p-1) \mathbf{E}^{1/2} |Y|^4. \quad (34)$$

Полученное неравенство предельным переходом распространяется на бесконечномерный случай. Это не совсем то, к чему мы стремились, хотя неравенство (34), конечно, интересно само по себе.

Если, с целью заменить четвертый момент в правой части (34) на второй, положить

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j^2 x_j^2 \right)^{1/2},$$

то возникают трудности, связанные с вычислением $I_2 f$.

В заключение автор выражает признательность рецензенту, который обратил его внимание на монографию [14] и сделал замечания, способствовавшие улучшению рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фук Д. Х., Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 4, с. 660–675.
2. Нагаев С. В., Пинелис И. Ф. Некоторые неравенства для сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 2, с. 254–263.
3. Nagaev S. V. Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
4. Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве. — Труды ин-та математики СО АН СССР, 1982, т. 1, с. 159–167.
5. Nagaev S. V. On a new approach to the study of the distribution of a norm of a random element in Hilbert space. — Proceedings of the Fifth Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Ed. by B. Grigelionis et al. Vilnius/Utrecht: Mokslas/VSP, 1990, p. 214–226.
6. Hoffman-Jørgensen J. Probability in B-Spaces. Aarhus: Aarhus Univ., Matematisk Inst., 1977, 185 p. (Lecture Notes Ser., № 48.)
7. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
8. Утев С. А. Неравенства для сумм слабовзависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности. — Труды ин-та математики СО АН СССР, 1984, т. 3, с. 50–77.
9. Doukhan P. Mixing. Properties and Examples. New York: Springer-Verlag, 1994, 142 p.
10. Rio E. Covariance inequalities for strongly mixing processes. — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 1993, v. 29, № 4, p. 587–597.
11. Rio E. The functional law of the iterated logarithm for stationary strongly mixing sequences. — Ann. Probab., 1995, v. 23, № 3, p. 1188–1203.
12. Peligrad M. An invariance principle for ϕ -mixing sequences. — Ann. Probab., 1985, v. 13, p. 1304–1313.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
14. Богачев В. И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997.

Поступила в редакцию
10.III.1998