Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, Оценка снизу остаточного члена в центральной предельной теореме для суммы независимых случайных величин с конечными моментами высокого порядка, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 1, 169–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3380>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:51:02

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
2. Tomkins R. J. On the law of the iterated logarithm. — Ann. Probab., 1978, v. 2, p. 162–168.
3. Розовский Л. В. Одно обобщение теоремы Колмогорова о законе повторного логарифма. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 1, с. 134–143.
4. Розовский Л. В. Об одной теореме Феллера. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 1, с. 128–132.

Поступила в редакцию
3.XI.1998

© 2002 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

ОЦЕНКА СНИЗУ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С КОНЕЧНЫМИ МОМЕНТАМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА¹⁾

В статье найдены оптимальные оценки снизу для расстояния между функцией распределения суммы независимых случайных величин с конечными моментами высокого порядка и стандартной нормальной функцией распределения.

Ключевые слова и фразы: сумма независимых случайных величин, центральная предельная теорема, оценка снизу.

1. Введение и результаты. Рассмотрим независимые случайные величины $X_1, \dots, X_n$ ($1 \leq n \leq \infty$) с нулевыми средними и конечными дисперсиями. Мы будем также предполагать, что

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{D}X_j = 1. \quad (1)$$

Обозначим через $F_n(x)$ и $\Phi(x)$ функции распределения суммы $\sum_{j=1}^n X_j$ и стандартной нормальной случайной величины Z соответственно и положим

$$\Delta_n(x) = F_n(x) - \Phi(x), \quad \Delta_n = \sup_x |\Delta(x)|, \quad \theta_n(x) = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\{X_j < x\}. \quad (2)$$

В предположении, что $\mathbf{E}|X_j|^k < \infty$ при некотором целом $k \geq 2$ и $1 \leq j \leq n$, обозначим также

$$\begin{aligned} \alpha_n(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k \theta_n(dx), & \bar{\alpha}_n(k) &= \int_{|x| \leq 1} x^k \theta_n(dx), \\ \hat{\alpha}_n(k) &= \int_{|x| > 1} x^k \theta_n(dx), \\ \psi_n(k) &= |\hat{\alpha}_n(k)| + |\bar{\alpha}_n(k+1)| + |\bar{\alpha}_n(k+2)|, \\ \nu_n(k) &= \sum_{j=1}^n \mathbf{E}X_j^2 \mathbf{E}X_j^k. \end{aligned} \quad (3)$$

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия; e-mail: math@spcra.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований гранта №99-01-00724 и гранта ведущих научных школ №96-15-96199.

Для функции ограниченной вариации $u(x)$ положим

$$\begin{aligned}\rho(u(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1} |u(x)| dx, \\ \tilde{\rho}(u(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1} |du(x)|, \\ \tilde{\rho}(u(x)) &= \min(\rho(u(x)), \tilde{\rho}(u(x))).\end{aligned}\quad (4)$$

Заметим, что $\rho(u(x)) \leq \|(1+x^2)^{-1}\|_q \|u(x)\|_p$, $p \geq 1$, $1/p + 1/q = 1$, где $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве L_p .

Всюду в дальнейшем посредством $c, c(s)$ с индексами или без них будут обозначаться положительные постоянные, абсолютные или зависящие от s соответственно.

В [1, (25)–(28)] было, в частности, показано, что найдется достаточно малая постоянная c_0 такая, что

$$\rho(\Delta_n(x)) + \nu_n(2) \geq c_0 \psi_n(2) \quad (5)$$

при условии, что $\psi_n(2) \leq c_0$. В [2] аналогичное утверждение с Δ_n вместо $\rho(\Delta_n(x))$ (см. (2)) было получено без каких-либо априорных моментных предположений вообще (естественно, вместо $\nu_n(2)$ и $\psi_n(2)$ были использованы близкие к ним характеристики, содержащие урезанные моменты).

В [3] было доказано, что

$$\Delta_n + \nu_n(2) \geq c_0 \psi_n(2). \quad (6)$$

Оценка (6), с одной стороны, проигрывает в сравнении с (5), поскольку метрика ρ слабее равномерной метрики. С другой стороны, для справедливости (6) не требуется предположение $\psi_n(2) \leq c_0$. Более существенно, что в [3] использовался метод Стейна (см. [4]), в то время как в [1] и [2] применялась методика Ибрагимова [5], имеющая дело с характеристическими функциями.

Наконец, в [6] было показано, что оценка (5) справедлива без каких-либо дополнительных предположений и, кроме того, имеет место неравенство

$$\tilde{\rho}(\Delta_n(x)) + \nu_n(2) \geq c_0 \psi_n(2), \quad (7)$$

которое, в частности, позволяет получить нижнюю оценку в локальном варианте центральной предельной теоремы.

На самом деле, оценки (5) и (7) являются следствиями более общих утверждений из [6], которые, так же как в [2], не требуют существования у X_j моментов и вообще свободны от априорных предположений.

З а м е ч а н и е. Обобщения оценок (5) и (7) на случай предельного закона, отличного от нормального, можно найти в [7] и [8].

Оценки (5) и (7) представляют основной интерес, когда слагаемое $\nu_n(2)$ в них заметно меньше, чем их правые части. В противном случае результаты становятся тривиальными. Так, если случайные величины $X_1, \dots, X_n$ одинаково распределены и симметричны, а $\mathbf{E}X_1^4 < \infty$, то оценка (5) при достаточно большом n становится малоинтересной, поскольку $\nu_n(2) = n^{-1}$, а $\psi_n(2) \sim \frac{1}{n} \mathbf{E}X_1^4$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. они имеют одинаковый порядок и, следовательно, (5) выполняется, хотя ρ может равняться нулю.

Положение можно исправить, если, апеллируя к рассмотренному примеру, предположить, что при четном $s \geq 4$

$$\mathbf{E}|X_j|^s < \infty, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (8)$$

и вместо $\Delta_n(x)$ рассматривать

$$\Delta_{ns}(x) = F_n(x) - \Phi(x) - \sum_{\nu=1}^{s-2} Q_{\nu n}(x), \quad (9)$$

где $Q_{\nu n}(x)$ — соответствующие члены разложения Эджворта–Крамера для $F_n(x)$ (см. [9, гл. VI, §1]).

Напомним определение функций $Q_{\nu n}(x)$:

$$Q_{\nu n}(x) = (-1)^\nu \sum_{l=1}^{\nu} d_{\nu n}(l) \Phi^{(\nu+2l)}(x), \quad (10)$$

где

$$d_{\nu n}(l) = \sum \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} \left(\frac{\gamma_n(m+2)}{(m+2)!} \right)^{k_m}, \quad (11)$$

причем суммирование распространяется на все целые неотрицательные $(k_1, \dots, k_{\nu})$, удовлетворяющие уравнениям

$$k_1 + 2k_2 + \dots + \nu k_{\nu} = \nu, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_{\nu} = l. \quad (12)$$

Здесь $\gamma_n(m) = \sum_{j=1}^n \gamma_{mj}$, а γ_{mj} является кумулянтom m -го порядка случайной величины X_j .

Отметим, что уравнения (12) имеют по крайней мере одно решение: $k_1 = l - 1$, $k_{\nu-l+1} = 1$ и $k_j = 0$ для всех остальных j .

Имеем

$$\begin{aligned} d_{1n}(1) &= \frac{\gamma_n(3)}{3!}, \\ d_{2n}(1) &= \frac{\gamma_n(4)}{4!}, \quad d_{2n}(2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_n(3)}{3!} \right)^2, \\ d_{3n}(1) &= \frac{\gamma_n(5)}{5!}, \quad d_{3n}(2) = \frac{\gamma_n(3)\gamma_n(4)}{3!4!}, \quad d_{3n}(3) = \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma_n(3)}{3!} \right)^3. \end{aligned} \quad (13)$$

При этом (см. (3))

$$\gamma_n(3) = \alpha_n(3), \quad \gamma_n(4) = \alpha_n(4) - 3\nu_n(2), \quad \gamma_n(5) = \alpha_n(5) - 10\nu_n(3). \quad (14)$$

Заметим, что при любом ν

$$d_{\nu n}(1) = \frac{\gamma_n(\nu+2)}{(\nu+2)!}, \quad d_{\nu n}(\nu) = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\gamma_n(3)}{6} \right)^{\nu}. \quad (15)$$

Определим $\bar{\gamma}_n(s+1)$ формальным равенством

$$\bar{\gamma}_n(s+1) = \gamma_n(s+1) - \alpha_n(s+1). \quad (16)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть четное $s \geq 4$ и $\alpha_n(s) < \infty$. Тогда (см. (3), (4), (9), (10))

$$\tilde{\rho}(\Delta_{ns}(x)) + \nu_n(s) + (\alpha_n(s))^{s/(s-2)} \geq c_0(s) \tilde{\psi}_n(s), \quad (17)$$

где $\tilde{\psi}_n(s) = \hat{\alpha}_n(s) + \bar{\alpha}_n(s+2) + |\bar{\gamma}_n(s+1) + \bar{\alpha}_n(s+1)| + \max_{2 \leq l \leq s} |d_{s-1,n}(l)|$.

З а м е ч а н и е. При условии (8)

$$|\gamma_n(l)| \leq (l-1)! (\alpha_n(s))^{(l-2)/(s-2)}, \quad 3 \leq l \leq s,$$

$$\begin{aligned} |\bar{\gamma}_n(s+1)| &\leq \frac{s!}{2} \sum_{j=1}^n \mathbf{E} X_j^2 \mathbf{E} |X_j|^{s-1} \leq \frac{s!}{2} \sqrt{\alpha_n(s) \nu_n(s)}, \\ \max_{2 \leq l \leq s} |d_{s-1,n}(l)| &\leq (\alpha_n(s))^{(s-1)/(s-2)}, \\ \max_{1 \leq l \leq \nu} |d_{\nu n}(l)| &\leq (\alpha_n(s))^{\nu/(s-2)}, \quad 1 \leq \nu \leq s-2. \end{aligned} \quad (18)$$

Оценки (17), (5) и (7) являются неулучшаемыми (см. [1]–[3], [6] по этому поводу).

Аналог теоремы 1 при нечетных s выглядит следующим образом.

Предполагая, что $\alpha_n(s) < \infty$ при некотором четном $s \geq 2$, определим функцию $Q_{s-1,n}(x, a)$ формальным равенством

$$Q_{s-1,n}(x, a) = Q_{s-1,n}(x) - \frac{1}{(s+1)!} \Phi^{(s+1)}(x) (a - \alpha_n(s+1)), \quad (19)$$

т.е. подставляя в $(s-1)$ -й член асимптотического разложения для $F_n(x)$ (см. (9), (10), (15)) параметр a вместо «момента» $(s+1)$ -го порядка, определенного в (3).

Положим (напоминаем, что s — четное число)

$$\begin{aligned}\psi_n(s, a) &= \hat{\alpha}_n(s) + \bar{\alpha}_n(s+2) + \left| a - \bar{\alpha}_n(s+1) \right|, \\ |\Delta_{ns}(x, a)| &= \Delta_{ns}(x) - Q_{s-1, n}(x, a), \\ \kappa_n(s) &= \nu_n(s) + (\alpha_n(s))^{s/(s-2)}, \quad s \geq 4.\end{aligned}\quad (20)$$

Теорема 2. Пусть четное $s \geq 4$. Если $\alpha_n(s) < \infty$, то при любом a

$$\hat{\rho}(\Delta_{ns}(x, a)) + \kappa_n(s) + |a| |\alpha_n(3)| \geq c_0(s) \psi_n(s, a). \quad (21)$$

З а м е ч а н и е. Аналог оценки (21) при $s = 2$ имеет следующий вид:

$$\hat{\rho}(\Delta_{n2}(x, a)) + \nu_n(2) + a^2 \geq c_0 \psi_n(2, a). \quad (21')$$

Поскольку

$$\Delta_{n2}(x, a) = F_n(x) - \Phi(x) + \frac{a}{6} \Phi^{(3)}(x),$$

из (21') при $a = 0$ следуют оценки (5)–(7).

Отметим, что если $a = \bar{\alpha}_n(s+1)$, то $\psi_n(s, a)$ равно $\hat{\alpha}_n(s) + \bar{\alpha}_n(s+2)$. Если $a = -\bar{\gamma}_n(s+1)$, то (см. (16)–(18)) $|a| |\alpha_n(3)| \leq \frac{1}{4} s! \kappa_n(s)$, т.е. соответствующее слагаемое в левой части (21) может быть опущено. Если же «момент» $\alpha_n(s+1)$ существует, то естественно положить $a = \alpha_n(s+1)$. В этом случае $\Delta_{ns}(x, a) = \Delta_{n, s+1}(x)$, а $|a| |\alpha_n(3)|$ можно заменить на $(\alpha_n(s+1))^{s/(s-1)}$.

Нетривиальная часть теоремы 1 и результат, близкий к теореме 2, были получены для случая $\hat{\rho} = \rho$ (см. (4)) еще в [1].

Вернемся к задаче нахождения оценки снизу для $\hat{\rho}(\Delta_n(x))$ (см. (2), (3)), предполагая теперь, что

$$\mathbf{E}|X_j|^s < \infty, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (22)$$

где целое $s \geq 3$.

Такое предположение может сделать, как уже показывалось выше, оценки (5) и (7) тривиальными. Более тонкие результаты (17) и (21) также не особенно помогают, если, конечно, не требовать чтобы (см. (11))

$$\gamma_n(m) = 0, \quad 3 \leq m \leq s. \quad (23)$$

В последнем случае (см. (2), (3)) $\Delta_{ns}(x) \equiv \Delta_n(x)$ и

$$\hat{\rho}(\Delta_n(x)) + \kappa_n(s^*) \geq c_0(s) \psi_n(s^*), \quad (24)$$

где s^* — наибольшее четное число, не превосходящее s .

Оценка (24) является обобщением оценок (5) и (7) на случай (22), (23).

Попытка найти оценку снизу для Δ_n (см. (2)) в случае выполнения условия (22) при $s = 5$ была сделана в [10]. Соответствующий результат в обозначениях (2) и (14) выглядит следующим образом: *найдется абсолютная постоянная c такая, что*

$$|2\gamma_n(3) + \gamma_n(4)| \leq c \left\{ \Delta_n + \sum_{j=1}^n \left[\frac{3}{4} \mathbf{E} X_j^2 \mathbf{E} |X_j|^3 + \frac{1}{2} (\mathbf{E} X_j^2)^2 \mathbf{E} |X_j| + \frac{1}{24} \mathbf{E} |X_j|^5 \right] \right\}. \quad (25)$$

Отметим, что правая часть неравенства (25) выглядит несколько странно, поскольку как $\mathbf{E} X_j^2 \mathbf{E} |X_j|^3$, так и $(\mathbf{E} X_j^2)^2 \mathbf{E} |X_j|$ не превосходят $\mathbf{E} |X_j|^5$. Кроме того, величины $\gamma_n(3)$ и $\gamma_n(4)$ имеют, вообще говоря, разный порядок по n .

Вид оценки (25), доказанной, как и результат (6), методом Стейна, определяется, по-видимому, не вполне удачным выбором функции $f(x) = (1+x)e^{-x^2/2}$ в заключительной фазе доказательства. Аналогичное замечание можно также отнести к работе [11], в которой оценка (25) была обобщена на случай m -зависимых полей.

Нами получен следующий результат.

Теорема 3. Предположим, что $\alpha_n(s) < \infty$, где четное $s \geq 4$. Тогда

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\Delta_n(x)) + \kappa_n(s) &\geq c_0(s) \left\{ \hat{\alpha}_n(2) + |\bar{\alpha}_n(3)| + \max_{4 \leq m \leq s} |\tilde{d}_n(m) - \hat{\alpha}_n(m)| \right. \\ &\quad \left. + \max_{s < m < 3s-6} |\tilde{d}_n(m) + \bar{\alpha}_n(m)| + \bar{\alpha}_n(3s-6) \right\}. \quad (26)\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\tilde{d}_n(s+1) &= (s+1)! \sum_{j=2}^{(s+1)/3} d_{s+1-2j,n}(j) + \bar{\gamma}_n(s+1), \\ \tilde{d}_n(m) &= m! \sum d_{m-2j,n}(j) \quad \text{при } m \neq s+1,\end{aligned}\quad (27)$$

причем суммирование производится по всем j таким, что $1 + \max(0, (m-s)/2) \leq j \leq m/3$ (обозначения см. в (10), (11), (16)).

Поскольку (см. (13), (14))

$$\tilde{d}_n(4) = \gamma_n(4), \quad \tilde{d}_n(5) = \bar{\gamma}_n(5), \quad \text{если } s = 4 \quad (\text{и } \tilde{d}_n(5) = \gamma_n(5), \quad \text{если } s \geq 6), \quad (28)$$

из (26) следует, например, что

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\Delta_n(x)) + \nu_n(4) + \alpha_n^2(4) \\ \geq c_0 \left\{ \hat{\alpha}_n(2) + |\bar{\alpha}_n(3)| + |\gamma_n(4) - \hat{\alpha}_n(4)| + |\bar{\gamma}_n(5) + \bar{\alpha}_n(5)| + \bar{\alpha}_n(6) \right\}.\end{aligned}\quad (29)$$

Приведем еще одно следствие теоремы 3.

Следствие 1. Пусть четное $s \geq 4$. Тогда если $\beta_n(s+1) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{s+1} \theta_n(dx) < \infty$, то

$$\hat{\rho}(\Delta_n(x)) + \beta_n(s+1) \geq c_0(s) \sum_{l=3}^s |\gamma_n(l)|; \quad (30)$$

если $\alpha_n(s+2) < \infty$, то

$$\hat{\rho}(\Delta_n(x)) + \alpha_n(s+2) \geq c_0(s) \sum_{l=3}^{s+1} |\gamma_n(l)|. \quad (31)$$

Отметим, что неравенство (30) является более общим, точным и естественным, нежели оценка (25), уточнение которой можно также получить как следствие оценки (29).

В случае, когда случайные переменные X_j , $1 \leq j \leq n$, одинаково распределены, из (26), в частности, следует, что если $\Delta_n = o(n^{-(s-2)/2})$ при $n \rightarrow \infty$, то с необходимостью выполняется условие (23), т.е. моменты X_1 до порядка s включительно обязаны совпадать с соответствующими моментами нормальной величины Z . Аналогичное утверждение следует также из (30) и (31).

В заключение сформулируем утверждение, из которого вытекают теоремы 1–3.

Теорема 4. Пусть четное $s \geq 4$ и $\alpha_n(s) < \infty$. Тогда найдется положительная постоянная $c(s)$ такая, что при любых постоянных $a_3, \dots, a_{3s-3}$

$$\begin{aligned}\hat{\rho} \left(F_n(x) - \Phi(x) - \sum_{m=3}^{3s-3} (-1)^m \frac{a_m}{m!} \Phi^{(m)}(x) \right) + \kappa_n(s) + |\bar{\alpha}_n(3)| \psi_n(s) \\ \geq c(s) \left\{ \hat{\alpha}_n(2) + \max_{2 < m \leq s} |\tilde{d}_n(m) - \hat{\alpha}_n(m) - a_m| \right. \\ \left. + \max_{s < m \leq 3s-3} |\tilde{d}_n(m) + \bar{\alpha}_n(m) - a_m| + \bar{\alpha}_n(3s-2) \right\},\end{aligned}\quad (32)$$

где обозначения даны в (2)–(4), (20), (27).

Расчеты показывают, что

$$\begin{aligned}\tilde{d}_n(3s-3) &= \frac{(3s-3)!}{(s-1)!} \left(\frac{\alpha_n(3)}{6} \right)^{s-1}, \quad \tilde{d}_n(3s-4) = 0, \\ \tilde{d}_n(3s-5) &= \frac{(3s-5)!}{(s-3)!} \frac{\gamma_n(4)}{4!} \left(\frac{\alpha_n(3)}{6} \right)^{s-3}, \\ \tilde{d}_n(3s-6) &= \frac{(3s-6)!}{(s-2)!} \left(\frac{\alpha_n(3)}{6} \right)^{s-2}.\end{aligned}\quad (33)$$

2. Доказательства. Сначала, основываясь на теореме 4, получим теоремы 1–3.

Так, оценка (26) вытекает из (32) при $a_m = 0$, $3 \leq m \leq 3s - 3$. В самом деле, $|\tilde{d}_n(3s - 6) + \bar{\alpha}_n(3s - 6)| \geq \bar{\alpha}_n(3s - 6)$ по (33) и, следовательно, содержимое фигурных скобок в правой части (32) не менее, чем в правой части (26).

Далее, если $\alpha_n(s) < \frac{1}{4} c(s)$, то слагаемое $|\bar{\alpha}_n(3)| \psi_n(s)$ в левой части (32) не превосходит $\frac{1}{2} c(s) |\bar{\alpha}_n(3)|$ и его можно отбросить, изменив значение множителя $c(s)$ справа на $\frac{1}{2} c(s)$ (напоминаем, что $|\tilde{d}_n(3) - \hat{\alpha}_n(3)| = |\bar{\alpha}_n(3)|$).

Если же $\alpha_n(s) \geq \frac{1}{4} c(s)$, то оценка (26) становится тривиальной, поскольку правая часть (26) не превосходит $c_1(s)(1 + \alpha_n(s))$ (см. (11) и (18)), а в левой части присутствует слагаемое $(\alpha_n(s))^{s/(s-2)}$. Итак, теорема 3 вытекает из теоремы 4.

Покажем, что (21) также следует из теоремы 4. С этой целью положим в (32) $a_m = \tilde{d}_n(m)$, $m \neq s + 1$, и $a_{s+1} = \tilde{d}_n(s + 1) + a$. Тогда, как легко увидеть, правая часть оценки (32) не менее $c(s) \psi_n(s, a)$, а

$$F_n(x) - \Phi(x) - \sum_{m=3}^{3s-3} (-1)^m \frac{a_m}{m!} \Phi^{(m)}(x) = \Delta_{ns}(x, a),$$

в то время как $|\bar{\alpha}_n(3)| \psi_n(s) \leq |a| |\bar{\alpha}_n(3)| + \max(|\bar{\alpha}_n(3)|, |\bar{\alpha}_n(s + 1)|) \psi_n(s, a)$.

Если $(\alpha_n(s))^{1/(s-2)} < \frac{1}{2} c(s) \leq 1$, то второе слагаемое здесь можно отбросить, соответствующим образом скорректировав постоянный множитель $c(s)$, и тем самым получить нужный результат.

Если же $(\alpha_n(s))^{1/(s-2)} \geq \frac{1}{2} c(s)$, то, беря в расчет оценку $\psi_n(s, a) \leq 2 \alpha_n(s) + |a|$ и используя неравенство $\tilde{\rho}(\Delta_{ns}(x, a)) \geq c_1(s) |a| - c_2(s)(1 + (\alpha_n(s))^{(s-1)(s-2)})$, если $|a| > c_3(s)(\alpha_n(s))^{s/(s-2)}$, где $c_3(s)$ достаточно велико, завершаем доказательство (21) (напоминаем об оценках (18) и том, что $\kappa_n(s) > (\alpha_n(s))^{s/(s-2)}$).

То, что теорема 1 следует из теоремы 4 при

$$a_m = \tilde{d}_n(m) - m! d_{s-1, n} \left(\frac{m - s + 1}{2} \right), \quad m = s + 1, s + 3, \dots, 3s - 3,$$

и $a_m = \tilde{d}_n(m)$ для остальных m проверяется аналогично.

Итак, теоремы 1–3 действительно следуют из теоремы 4.

Оценки (30), (31) легко следуют из (26), (11), (15), (28) и (18). Действительно, если $\beta_n(s + 1) \leq 1$, то $|\tilde{d}_n(m) - \hat{\alpha}_n(m)| \leq |\gamma_n(s)| + \sum_{l=2}^{m/3} |d_{m-2l, n}(l)| + \beta_n(s + 1)$ при $3 \leq m \leq s$, но, очевидным образом,

$$|d_{m-2l, n}(l)| \leq c(m) \sum_{k=3}^{m-2l+2} |\gamma_n(k)|, \quad l \geq 2,$$

и, имея в виду, что $\kappa_n(s) \leq (\beta_n(s + 1))^{(s+2)/(s+1)} + (\beta_n(s + 1))^{s/(s-1)} \leq 2 \beta_n(s + 1)$, результат (30) можно вывести из (26) шаг за шагом.

Случай $\beta_n(s + 1) > 1$ не вызывает затруднений, поскольку (см. (18))

$$\max_{3 \leq l \leq s} |\gamma_n(l)| \leq (s - 1)! (\beta_n(s + 1))^{(l-2)/(s-1)} \leq (s - 1)! \beta_n(s + 1).$$

Оценку (31) можно проверить аналогично.

Ниже мы докажем теорему 4, замечание к теореме 2 и оценки (18).

Обозначим (см. (2), (9))

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= F_n(x) - \Phi(x) - \sum_{m=3}^{3s-3} (-1)^m \frac{a_m}{m!} \Phi^{(m)}(x), \\ \hat{\Delta}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Delta(dx), \quad \hat{\Delta}_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Delta_n(dx). \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть $0 < \varepsilon$, $v \leq 1$ и $\hat{y}_v(t) = (v - t)e^{t^2/2} \mathbf{I}[0 \leq t \leq v]$, $y_v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \hat{y}_v(t) dt$, где $\mathbf{I}[\cdot]$ — индикатор множества $[\cdot]$.

Так же, как в [6, (12)–(18)], имеем

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x) y'_v(x) dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Delta}(t) \widehat{y}_v(t) dt \right|, \quad (35)$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(y_v(x) - \frac{1}{\varepsilon} y_{\varepsilon v}(x) \right) \Delta(x) dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Delta}(t) \left(\widehat{y}_v(t) - \frac{1}{\varepsilon} \widehat{y}_{\varepsilon v}(t) \right) dt \right|, \quad (36)$$

$$|y'_v(x)| \leq 11(1+x^2)^{-1}, \quad (37)$$

$$\left| y_v(x) - \frac{1}{\varepsilon} y_{\varepsilon v}(x) \right| \leq 20\varepsilon^{-1}(1+x^2)^{-1}. \quad (38)$$

Нам понадобятся следующие леммы (обозначения см. в (2), (3), (10), (16) и (20)).

Лемма 1. Пусть четное $s \geq 2$ и $\alpha_n(s) \leq 1$. Тогда найдутся положительные постоянные $c_1(s)$ и $c_2(s)$ такие, что в интервале $|t| \leq c_1(s)t_n(s)$

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(t) = e^{-t^2/2} & \left(\sum_{\nu=1}^{s-2} P_{\nu n}(it) + \overline{P}_{s-1,n}(it) + \delta_{sn}(it) \right) \\ & + \theta t^{2s+2} e^{-t^2/8} (\kappa_n(s) + \tilde{\kappa}_n(s)), \quad |\theta| \leq c_2(s). \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь $t_n(2) = (\psi_n(2))^{-1/4}$ и $t_n(s) = (\alpha_n(s))^{-1/(2(s-2))}$, если $s \geq 4$,

$$\begin{aligned} P_{\nu n}(it) &= \sum_{l=1}^{\nu} d_{\nu n}(l)(it)^{\nu+2l}, \\ \overline{P}_{s-1,n}(it) &= \frac{(it)^{s+1}}{(s+1)!} \bar{\gamma}_n(s+1) + \sum_{l=2}^{s-1} d_{s-1,n}(l)(it)^{s-1+2l}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\delta_{sn}(it) = \int_{-\infty}^{\infty} e_s(itx) \theta_n(dx), \quad \text{где } e_k(z) = e^z - \sum_{l=0}^k \frac{z^l}{l!};$$

$\tilde{\kappa}_n(s) = |\bar{\alpha}_n(3)|\psi_n(s)$, $s \geq 4$, и $\tilde{\kappa}_n(2) = \psi_n^2(2)$, $\kappa_n^2 = \nu_n(2)$.

Равенство (39) доказано в [1, лемма 1]. При этом сама формулировка аналогичного утверждения в [1] содержит неточность, для устранения которой в заключительной фазе доказательства достаточно применить соотношение

$$|D(t)| = \left| \sum_{\nu=3}^s \frac{(it)^\nu}{\nu!} \gamma_n(\nu) \right| \leq (|t|^3 + t^s) \left(|\alpha_n(3)| + (\alpha_n(s))^{2/(s-2)} \right),$$

справедливое при $s \geq 4$ и $\alpha_n(s) \leq 1$ (см. (18)).

Учитывая определение полиномов $P_{\nu n}(it)$ и $\overline{P}_{s-1,n}(it)$, без труда заключаем, что

$$\sum_{\nu=1}^{s-2} P_{\nu n}(it) + \overline{P}_{s-1,n}(it) = \sum_{m=3}^{3s-3} \frac{\tilde{d}_n(m)}{m!} (it)^m, \quad (41)$$

где коэффициенты $\tilde{d}_n(m)$ определены в (27).

Лемма 2 (12, предложение). Пусть $k \geq 0$ — некоторое целое число, $G(x)$ — мера на $(-\infty, \infty)$ такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} \min(1, |x|^{k+1}) G(dx) < \infty$ и (см. (40))

$$\widehat{\delta}(t) = \int_{|x|>1} (e^{itx} - 1) G(dx) + \int_{|x| \leq 1} e_k(itx) G(dx) - \sum_{l=1}^{2M-1} \frac{(it)^l}{l!} b_l,$$

где целое M удовлетворяет условию $2M > k$, а $\{b_l\}_{l=1}^{2M-1}$ — некоторые вещественные числа. Тогда

$$c_3(M) \delta \leq \sup_{0 < t < 1} |\widehat{\delta}(t)| \leq c_4(M) \delta,$$

где $\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \min(1, |x|^{2M}) G(dx) + \max_{1 \leq l < 2M} |\bar{b}_l|$, причем $\bar{b}_l = b_l$, если $1 \leq l \leq k$, и $\bar{b}_l = b_l - \int_{|x| \leq 1} x^l G(dx)$, если $k < l < 2M$.

Доказательство оценки (32) использует рассуждения из [6]. Из (39) и (41) получим при $|t| \leq c_1(s) t_n(s)$

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(t) = e^{-t^2/2} & \left(\delta_{sn}(it) + \sum_{m=3}^{3s-3} \frac{\widetilde{d}_n(m) - a_m}{m!} (it)^m \right) \\ & + \theta t^{2s+2} e^{-t^2/8} (\kappa_n(s) + \widetilde{\kappa}_n(s)), \quad |\theta| \leq c_2(s). \end{aligned} \quad (42)$$

Отсюда и из (35) и (37) вытекает (см. (41)), что если $c_1(s) t_n(s) \geq 1$, то

$$11 \rho(\Delta(x)) + c_2(s) (\kappa_n(s) + \widetilde{\kappa}_n(s)) \geq \max_{0 < v \leq 1} \left| \int_0^v (v-t) g(t) dt \right|, \quad (43)$$

где $g(t) = \delta_{sn}(it) + \sum_{m=3}^{3s-3} [(\widetilde{d}_n(m) - a_m)/m!] (it)^m$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} - \int_0^v (v-t) g(t) dt &= - \int_0^v \int_0^t g(u) du dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_{s+2}(itx)}{(ix)^2} \theta_n(dx) + \sum_{m=3}^{3s-3} \frac{\widetilde{d}_n(m) - a_m}{(m+2)!} (it)^{m+2} \\ &= \int_{|x|>1} (e^{itx} - 1) \frac{1}{x^2} \theta_n(dx) + \int_{|x| \leq 1} e_{s+2}(itx) \frac{1}{x^2} \theta_n(dx) - \sum_{m=1}^{3s-1} \frac{(it)^m}{m!} b_m, \end{aligned}$$

где (см. (3))

$$\begin{aligned} b_m &= \widehat{\alpha}_n(m-2), \quad 1 \leq m \leq 4, \\ b_m &= \widehat{\alpha}_n(m-2) + a_{m-2} - \widetilde{d}_n(m-2), \quad 5 \leq m \leq s+2, \\ b_m &= a_{m-2} - \widetilde{d}_n(m-2), \quad s+3 \leq m \leq 3s-1. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 2 при $G(dx) = x^{-2} \theta_n(dx)$, $k = s+2$, $2M = 3s$ следует, что правая часть неравенства (43) не меньше, чем правая часть неравенства (32). Оценка (32) (напоминаем, что четное $s \geq 4$) при дополнительных предположениях $\widehat{\rho} = \rho$ и $c_1(s) (\alpha_n(s))^{-1/(2(s-2))} \geq 1$ таким образом доказана.

Пусть теперь

$$(c_1(s))^{2(s-2)} < \alpha_n(s). \quad (44)$$

Обозначим $\max_{2 < m \leq 3s-3} |a_m|$ через a . Имеем $\rho(\Delta(x)) \geq \rho_1 - c_1$, где $\rho_1 = \rho(\sum_{m=3}^{3s-3} (-1)^m (a_m/m!) \Phi^{(m)}(x))$. Аналогично доказательству (43), используя лемму 2 при $G(dx) = 0$, найдем, что $\rho_1 \geq c_3(s) a$. Поэтому $\rho(\Delta(x)) \geq c_3(s) a - c_1$ и, следовательно (см. (44)), $\rho(\Delta(x)) + c_4(s) (\alpha_n(s))^{s/(s-2)} \geq c_3(s) (a+1)$. Отсюда, принимая во внимание то, что правая часть (32) не превосходит $c_5(s) (a+1)$ (см. (18)), снова получим оценку (32) при $\widehat{\rho} = \rho$. Итак, нами доказано, что оценка (32) имеет место при $\widehat{\rho} = \rho$.

Покажем теперь, что она справедлива и при $\widehat{\rho} = \widetilde{\rho}$ (см. (4)).

Положим $J(r) = r^{-1} \max_{0 < v \leq 1} \left| \int_0^{vr} (vr-t) e^{t^2/2} \widehat{\Delta}(t) dt \right|$, $r > 0$.

По (38) и (36) при любом $\varepsilon \in (0, 1)$

$$20 \frac{1}{\varepsilon} \widetilde{\rho}(\Delta(x)) \geq J(1) - J(\varepsilon). \quad (45)$$

Обозначив как ω содержимое фигурных скобок в правой части (32), имеем при $c_1(s) t_n(s) \geq 1$ (см. (42), (43) и далее),

$$J(1) \geq c_6(s) \omega - c_2(s) (\kappa_n(s) + \widetilde{\kappa}_n(s)). \quad (46)$$

С другой стороны, в силу (42) $J(\varepsilon) \leq \varepsilon c_7(s) (\omega + \kappa_n(s) + \widetilde{\kappa}_n(s))$. Отсюда и из (45), (46) при надлежащем выборе ε следует, что

$$\widetilde{\rho}(\Delta(x)) + \kappa_n(s) + \widetilde{\kappa}_n(s) \geq c(s) \omega. \quad (47)$$

При $s \geq 4$ (47) совпадает с (32) для случая $\hat{\rho} = \tilde{\rho}$. Случай $c_1(s)(\alpha_n(s))^{-1/(2(s-2))} < 1$ рассматривается так же, как при $\hat{\rho} = \tilde{\rho}$ (см. (44) и ниже).

Доказательство теоремы 4 полностью завершено.

Докажем теперь оценку (21'). Рассмотрим для определенности случай $\hat{\rho} = \tilde{\rho}$ (если $\hat{\rho} = \rho$, проводятся аналогичные рассуждения). Из (47) при $s = 2$ следует: если $c_1 \psi_n^{-1/4}(2) \geq 1$, то (см. (3), (20))

$$\tilde{\rho}(\Delta_{n2}(x, a)) + \nu_n(2) + \psi_n^2(2) \geq c_0 \psi_n(2, a). \quad (48)$$

Отсюда следует (21') при $\psi_n(2) \leq c_1^4$, $|a| \geq \varepsilon \psi_n(2)$ (и $\hat{\rho} = \tilde{\rho}$). Если $\psi_n(2) > c_1^4$, то $|a| > \varepsilon c_1^4$ и (21') выполняется, поскольку $\psi_n(2, a) \leq \psi_n(2) + |a| \leq 2 + |a|$.

Если же $|a| < \varepsilon \psi_n(2)$ и постоянная ε достаточно мала, то (21') равносильно соотношениям (5) и (7), доказанным в [6]. Замечание к теореме 2, таким образом, доказано.

Перейдем к доказательству соотношений (18). Первая оценка здесь вытекает из [13, (12)]. Проверим вторую оценку.

Пусть случайная величина X имеет нулевое среднее и конечный s -й момент при четном $s \geq 4$. Положим $\alpha_k = \mathbf{E}X^k$, $\beta_k = \mathbf{E}|X|^k$, $2 \leq k \leq s$, и пусть γ_k обозначает кумулянт порядка k случайной величины X . Определим величины $\bar{\gamma}_k$, $2 \leq k \leq s+1$, равенством $\bar{\gamma}_k = \gamma_k - \alpha_k$ (формальным при $k = s+1$). Покажем, что

$$|\bar{\gamma}_k| \leq \frac{1}{2} (k-1)! \beta_2 \beta_{k-2}, \quad 4 \leq k \leq s+1. \quad (49)$$

Соотношение (49) проверим по индукции. Имеем $\bar{\gamma}_2 = 0$, $\bar{\gamma}_3 = 0$, $\bar{\gamma}_4 = -3\alpha_2^2$, $\bar{\gamma}_5 = -10\alpha_2\alpha_3$, $\bar{\gamma}_6 = -15\alpha_2\alpha_4 + 30\alpha_2^3 - 10\alpha_3^2$, откуда следует, что (49) при $k \leq 6$ выполняется.

Пусть $k \geq 6$. Из [13, (13)] следует, что

$$\bar{\gamma}_{k+1} = - \sum_{l=2}^{k-3} C_k^l \alpha_l \bar{\gamma}_{k+1-l} + \sum_{l=2}^{k-1} C_k^l \alpha_l \alpha_{k+1-l}. \quad (50)$$

Учитывая, что $\beta_l \beta_{k+1-l} \leq \beta_2 \beta_{k-1}$, $\sum_{l=2}^{k-1} C_k^l = 2^k - k - 2$, и привлекая индукционное предположение, из (50) получим

$$\begin{aligned} |\bar{\gamma}_{k+1}| &\leq \frac{1}{2} k! \beta_2 \sum_{l=2}^{k-3} \frac{1}{l!} \beta_l \beta_{k-1-l} + (2^k - k - 2) \beta_2 \beta_{k-1} \\ &< \frac{1}{2} k! \beta_2 \beta_{k-1} \left(e - 2 + 2 \frac{2^k - k - 2}{k!} \right) < \frac{1}{2} k! \beta_2 \beta_{k-1}. \end{aligned}$$

Индукционный переход, таким образом, осуществлен и оценка (49) доказана.

Из (49) при $X = X_j$, $1 \leq j \leq n$, и $k = s+1$, с учетом определения $\bar{\gamma}_{s+1}$ (см. (16)) получим вторую оценку в (18). Остаточные оценки можно получить из (11), используя для вычисления постоянных индуктивные соображения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розовский Л. В. О сходимости функций распределения последовательности сумм независимых случайных величин к нормальному закону в L_p . — Литов. матем. сб., 1976, т. 16, № 1, с. 193–206.
2. Розовский Л. В. Об оценке снизу остаточного члена в центральной предельной теореме. — Матем. заметки, 1978, т. 24, № 3, с. 403–410.
3. Hall P., Barbour A. D. Reversing the Berry–Esseen inequality. — Proc. Amer. Math. Soc., 1984, v. 90, № 1, p. 107–110.
4. Stein Ch. A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Berkeley: Univ. California Press, 1972, p. 583–602.

5. *Ибрагимов И. А.* О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых величин нормальным распределением. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 4, с. 632–655.
6. *Розовский Л. В.* О точности нормального приближения. — Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1989, т. 177, с. 129–137.
7. *Rozovsky L. V.* On approximation accuracy for distribution functions of the sum of independent random variables using infinitely divisible distributions. — Proceedings of the Forth International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, 1985. V. II. Ed. by Yu. Prokhorov et al., Utrecht: VNU Sci. Press, 1987, p. 501–507.
8. *Розовский Л. В.* О точности приближения функции распределения суммы независимых случайных величин. — Теория вероятн. и матем. статист., 1991, т. 45, с. 97–104.
9. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
10. *Maesono Y.* Lower bounds for the normal approximation of a sum of independent random variables. — Austral. J. Statist., 1989, v. 31, № 3, p. 475–485.
11. *Сунклодас И.* Об оценке снизу скорости сходимости в центральной предельной теореме для m -зависимых полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, № 1, с. 171–179.
12. *Розовский Л. В.* О точности приближения характеристической функции полиномами. — Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1985, т. 142, с. 141–144.
13. *Розовский Л. В.* О коэффициентах ряда Крамера. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, № 1, с. 161–166.

Поступила в редакцию
26.X.1999

© 2001 г.

BALTRŪNAS A.*, OMEĲ E.**

SECOND ORDER RENEWAL THEOREM IN THE FINITE-MEANS CASE

Пусть F — функция распределения на $(0, \infty)$ и U — связанная с ней функция восстановления. Хорошо известно, что если F имеет конечный первый момент μ , то $U(t)$ асимптотически равна t/μ . Также хорошо известно, что $U(t) - t/\mu$ асимптотически ведет себя как $S(t)/\mu$, где S обозначает повторный интеграл от хвоста распределения F . В настоящей статье обсуждается скорость сходимости $U(t) - t/\mu - S(t)/\mu$ для широкого класса функций распределения. Наши оценки улучшают результаты [7], [12], [4].

Ключевые слова и фразы: функция восстановления, субэкспоненциальные распределения, правильно меняющаяся функция.

1. Introduction. Let $X_1, X_2, \dots$ be i.i.d. positive random variables with common distribution function (d.f.) F . We assume, throughout this paper, that F is nonsingular. Let $S_0 = 0$, and for $n \geq 0$, let $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Central object in renewal theory is the counting process $N(t)$, $t \geq 0$, defined by the first passage times for the random walk S_n , $n \geq 0$, i.e.,

$$N(t) = n \quad \text{if and only if } S_{n-1} \leq t < S_n.$$

The expected value $U(t) = \mathbf{E}N(t)$, $t \geq 0$, is the so-called renewal function. It is well known that $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_n \leq t\}$, $t \geq 0$.

* Institute of Mathematics and Informatics, Akademijos 4, 2600 Vilnius, Lithuania; e-mail: baltrunas@takas.lt

** EHSAL, Stormstraat 2, 1000 Brussels, Belgium; e-mail: omedward@prof.ehsal.be