Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. П. Виноградов, О совместном распределении момента разорения и номера выплаты, приводящей к разорению, в неоднородном процессе риска, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 465–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp34>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:25:22

© 2006 г.

ВИНОГРАДОВ О. П.*

О СОВМЕСТНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МОМЕНТА РАЗОРЕНИЯ И НОМЕРА ВЫПЛАТЫ, ПРИВОДЯЩЕЙ К РАЗОРЕНИЮ, В НЕОДНОРОДНОМ ПРОЦЕССЕ РИСКА¹⁾

В неоднородном процессе риска найдено совместное распределение момента разорения и номера выплаты, приводящей к разорению.

Ключевые слова и фразы: неоднородный процесс риска, вероятность разорения, момент разорения.

1. Введение. В настоящей работе, которая является продолжением работы [1], рассматривается широко распространенная в актуарной математике модель коллективного риска. Поводом к написанию [1] послужило замечание Я. Галамбоша, сделанное им в монографии [2]: «Возьмем n клиентов страховой компании, принадлежащих одной страховой группе. Промежутки времени до первого несчастного случая для отдельных представителей этой группы можно рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные величины X_j ($1 \leq j \leq n$) с общей непрерывной функцией распределения $F(x)$. Сообщения о несчастных случаях (или исках) поступают в страховую компанию в порядке возрастания этих промежутков времени, т.е. компания “наблюдает” величины $X_{(j)}$ (где $X_{(j)}$ — j -я порядковая статистика величин $X_1, X_2, \dots, X_n$), т.е. компания “наблюдает” величины X_j ($1 \leq j \leq n$)». Обычно в литературе предполагается, что длины интервалов времени между соседними несчастными случаями (или исками) являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами (в последние годы рассматриваются более общие модели, например, моменты появления исков являются процессами Кокса [3]). Как показывает вышеприведенное замечание, представляет интерес отказаться от требования одинаковой распределенности интервалов между исками, и рассматриваемый процесс становится в некотором смысле неоднородным.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: ovinogradov@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РГНФ (проект № 05-06-06423а).

В настоящей работе получены явные выражения для совместного распределения момента разорения и номера выплаты, приводящей к разорению, в неоднородном процессе риска (определение которого будет дано ниже). Заметим, что задача нахождения распределения момента разорения страховой компании рассматривалась различными авторами (см., например, [4]). Так, модель Я. Галамбоша является частным случаем рассматриваемого неоднородного процесса риска, если предположить, что промежутки времени до первого несчастного случая для отдельных представителей страховой группы, а также величины выплат имеют показательное распределение. Доказана теорема, которая устанавливает (в некотором смысле) эквивалентность модели Галамбоша и простейшей модели теории риска с конечным числом выплат, что позволяет выписать явное выражение для вероятности разорения в модели Галамбоша. Обратим внимание на то, что, помимо этого, полученные результаты позволяют рассмотреть ряд достаточно общих моделей функционирования страховой компании (например, рассмотреть случай зависимых и неодинаково распределенных интервалов между выплатами, причем величины выплат также неодинаково распределены и имеют достаточно общие функции распределения). Эти результаты могут также найти приложения в теории массового обслуживания. Более подробно о возможностях вышеупомянутых обобщений см. в [1] (следствие 1 и замечания 2–6). Поэтому, несмотря на то что, на первый взгляд, в настоящей работе вводятся слишком специальные и ограничительные предположения, она, по мнению автора, может послужить основой для дальнейших исследований.

Предположим, что $x \geq 0$ — начальный капитал страховой компании, $S(y)$ — суммарный размер премий, внесенных клиентами за отрезок времени $[0, y]$. Пусть $T_1, T_2, \dots$ — моменты страховых выплат ($0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$), Z_i — размер выплаты в момент T_i . Положим $\Delta_1 = T_1$, $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$ ($i \geq 2$).

Процесс риска определяется равенством $X(y) = x + S(y) - \sum_{j \leq N(y)} Z_j$, где $N(y)$ — число выплат компании на отрезке $[0, y]$.

Момент разорения определяется равенством

$$\tau = \inf\{y: X(y) < 0\}.$$

Пусть $\eta = \min\{k: X(T_k + 0) < 0\}$ — номер той выплаты, после которой капитал страховой компании впервые становится отрицательным, т.е. компания разоряется.

Таким образом,

$$\tau = T_\eta = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_\eta.$$

Будем предполагать, что последовательности $\{Z_i\}$ и $\{\Delta_i\}$ независимы и состоят из независимых, но не обязательно одинаково распределенных

случайных величин. Процесс поступления премий $S(y)$ линейно растет на каждом из интервалов Δ_i с угловым коэффициентом $c_i \geq 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Процесс риска назовем однородным процессом риска, если каждая из последовательностей $\{Z_i\}$ и $\{\Delta_i\}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин и $c_i = c$ для всех $i \geq 1$.

О п р е д е л е н и е 2. Процесс риска назовем неоднородным процессом риска, если он не является однородным.

О п р е д е л е н и е 3. Однородный процесс риска назовем простейшим процессом риска, если величины Z_i и Δ_i имеют показательное распределение.

Далее предполагается, что величины Z_i одинаково распределены и имеют показательное распределение с единичным параметром, а величины Δ_i также имеют показательное распределение, но с параметром δ_i .

В работе найдено совместное распределение случайных величин τ и η .

2. Вспомогательные результаты. Наряду с процессом риска $X(y)$, рассмотрим процесс риска $X_n(y)$, который совпадает с $X(y)$ до момента $T_n + 0$ и равен $X(T_n + 0)$ при $y \geq T_n + 0$.

Пусть τ_n и η_n — соответственно момент разорения и номер выплаты, приводящей к разорению в процессе $X_n(y)$. Если же разорения в процессе $X_n(y)$ не наступает, то положим $\tau_n = \infty$, $\eta_n = \infty$. Таким образом,

$$(\tau_n, \eta_n) = \begin{cases} (T_1, 1), & \text{если } X_n(T_1 + 0) < 0, \\ (T_2, 1), & \text{если } X_n(T_1 + 0) \geq 0 \text{ и } X_n(T_2 + 0) < 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ (T_n, n), & \text{если } \min_{1 \leq k \leq n-1} X_n(T_k + 0) \geq 0 \\ & \text{и } X_n(T_n + 0) < 0, \\ (\infty, \infty), & \text{если } \min_{1 \leq k \leq n} X_n(T_k + 0) \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что функции распределения этих случайных величин являются дефектными (или несобственными) в том смысле, что $\mathbf{P}\{\tau_n < \infty\} < 1$ и $\sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{\eta_n = k\} < 1$, так как с положительной вероятностью для любого конечного n в процессе $X_n(y)$ разорение может не наступить.

Очевидно, что $\mathbf{P}\{\eta_n = k\} = \mathbf{P}\{\eta = k\}$ при $k \leq n$.

Для любых конечных u, v и всех $n \geq 1$ имеют место соотношения

$$\{\tau_n < u; \eta_n < v\} \subseteq \{\tau_{n+1} < u; \eta_{n+1} < v\}.$$

По теореме непрерывности отсюда вытекает, что

$$(\tau_n, \eta_n) \xrightarrow{D} (\tau, \eta) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

так как

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_n < u; \eta_n < v\} = \{\tau < u; \eta < v\}.$$

Тем самым для нахождения совместного распределения случайных величин τ, η достаточно найти совместное распределение случайных величин τ_n, η_n , а затем перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $r_n(x, t)$ и $\psi_n(x, t) = 1 - r_n(x, t)$ — вероятности того, что на отрезке $[0, t]$ соответственно не произойдет или произойдет разорение в процессе $X_n(y)$. Таким образом,

$$r_1(x, t) = \mathbf{P}\{T_1 > t\} + \mathbf{P}\{T_1 \leq t; X(T_1 + 0) \geq 0\}$$

и при $n \geq 2$

$$\begin{aligned} r_n(x, t) &= \mathbf{P}\{T_1 > t\} + \mathbf{P}\{T_1 \leq t; T_2 > t; X(T_1 + 0) \geq 0\} \\ &+ \dots + \mathbf{P}\left\{T_{n-1} \leq t; T_n > t; \min_{1 \leq k \leq n-1} X(T_k + 0) \geq 0\right\} \\ &+ \mathbf{P}\left\{T_n < t; \min_{1 \leq k \leq n} X(T_k + 0) \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

Из этих равенств вытекает следующая лемма.

Лемма 1. Для всех $n \geq 1$ имеют место равенства $\mathbf{P}\{\tau < t; \eta = n\} = r_{n-1}(x, t) - r_n(x, t) = \psi_n(x, t) - \psi_{n-1}(x, t)$, где $r_0(x, t) = 1$, $\psi_0(x, t) = 0$.

Из леммы 1, в свою очередь, вытекают следующие два утверждения.

Лемма 2. $\mathbf{P}\{\tau < t\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x, t)$.

Лемма 3. $\mathbf{P}\{\eta = n\} = \psi_n(x, \infty) - \psi_{n-1}(x, \infty)$.

3. Основные результаты. Рассмотрим процесс $X_n(y)$ на отрезке $[0, t]$. Будем иметь в виду, что выражение для $r_n(x, t)$ зависит от параметров $\delta_1, c_1, \dots, \delta_n, c_n$, т.е. $r_n(x, t) = r_n(x, t, \delta_1, c_1, \dots, \delta_n, c_n)$. Сделаем в последовательностях $\{\delta_i\}$ и $\{c_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) перестановку $\delta_i \rightarrow \delta_{n-i+1}$ и $c_i \rightarrow c_{n-i+1}$. После такой перестановки интервал времени до первой выплаты имеет показательное распределение с параметром δ_n , а угловой коэффициент роста капитала на этом интервале равен c_n ; интервал времени между второй и первой выплатой имеет показательное распределение с параметром δ_{n-1} , а соответствующий угловой коэффициент равен c_{n-1} и т.д.

Обозначим через $\tilde{r}_n(x, t)$ и $\tilde{\psi}_n(x, t) = 1 - \tilde{r}_n(x, t)$ вероятности того, что на отрезке $[0, t]$ соответственно не произойдет или произойдет разорение в этом «переставленном» процессе риска. Очевидно, что если найдено явное выражение для $\tilde{r}_n(x, t)$, то, заменив индексы входящих в это

выражение параметров $\delta_1, c_1, \dots, \delta_n, c_n$ согласно перестановке $i \rightarrow n-i+1$ ($i = 1, \dots, n$), получим выражение для $r_n(x, t)$ и, значит, для $\psi_n(x, t)$.

Нетрудно видеть, что для всех $i = 1, \dots, n$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\tilde{r}_i(x, t) = e^{-\delta_i t} + \delta_i \int_0^t e^{-\delta_i y} \left(\int_0^{x+c_i y} \tilde{r}_{i-1}(x + c_i y - z, t - y) e^{-z} dz \right) dy, \quad (1)$$

причем $\tilde{r}_0(x, t) = 1$.

Положим

$$\gamma_i = \delta_i + c_i, \quad \lambda_i = \frac{\delta_i}{\gamma_i}, \quad a_i = 1 - \lambda_i = \frac{c_i}{\gamma_i} \quad (i \geq 1), \quad \lambda_0 = 0, \\ \tilde{r}_i(x, t) = 1 - \lambda_i e^{-x} \tilde{\alpha}_i(x, t). \quad (2)$$

Покажем, что $\tilde{\alpha}_i(x, t)$ является многочленом степени $i - 1$ по переменной x , т.е. справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. Для всех $i \geq 1$ имеет место представление

$$\tilde{\alpha}_i(x, t) = \sum_{l=0}^{i-1} f_i(l, t) x^l. \quad (3)$$

Доказательство. Из (1) вытекают следующие равенства:

$$\tilde{\alpha}_1(x, t) = 1 - e^{-\gamma_1 t}, \\ \tilde{\alpha}_i(x, t) = 1 - e^{-\gamma_i t} + \lambda_{i-1} \gamma_i \\ \times \int_0^t e^{-\gamma_i y} \left(\int_0^{x+c_i y} \tilde{\alpha}_{i-1}(x + c_i y - z, t - y) dz \right) dy, \quad (4)$$

где $1 < i \leq n$.

Лемма 4 следует из этих равенств по индукции.

Подставив выражение (3) в равенства (4), получим

$$\sum_{l=0}^{i-1} f_i(l, t) x^l = 1 - e^{-\gamma_i t} + \lambda_{i-1} \gamma_i \sum_{l=0}^{i-2} \int_0^t \frac{(x + c_i y)^{l+1}}{l+1} e^{-\gamma_i y} f_{i-1}(l, t - y) dy. \quad (5)$$

Полагая в (5) $x = 0$, получим

$$f_i(0, t) = 1 - e^{-\gamma_i t} + \lambda_{i-1} \gamma_i \sum_{l=0}^{i-2} \int_0^t \frac{(c_i y)^{l+1}}{l+1} e^{-\gamma_i y} f_{i-1}(l, t - y) dy. \quad (6)$$

Дифференцируя k раз ($1 \leq k \leq i - 1$) по переменной x обе части равенства (5) и полагая $x = 0$, получим

$$f_i(k, t) = \lambda_{i-1} \gamma_i \sum_{l=0}^{i-2} \int_0^t \frac{C_{l+1}^k (c_i y)^{l-k+1}}{l+1} e^{-\gamma_i y} f_{i-1}(l, t - y) dy. \quad (7)$$

Пусть $F_i(k, s) = \int_0^\infty f_i(k, t) e^{-st} dt$ — преобразование Лапласа функции $f_i(k, t)$.

Из равенств (6) и (7) вытекает, что при $i = 1, \dots, n$

$$F_i(0, s) = \frac{\gamma_i}{s(s + \gamma_i)} + \lambda_{i-1} \gamma_i \sum_{l=0}^{i-2} \frac{c_i^{l+1} l! F_{i-1}(l, s)}{(s + \gamma_i)^{l+2}}, \quad (8)$$

$$F_i(k, s) = \frac{\lambda_{i-1} \gamma_i}{k!} \sum_{l=k-1}^{i-2} \frac{c_i^{l-k+1} l! F_{i-1}(l, s)}{(s + \gamma_i)^{l-k+2}} \quad (1 \leq k \leq i-1). \quad (9)$$

В частности, при $k = i-1$

$$F_i(i-1, s) = \frac{\lambda_{i-1} \gamma_i}{(i-1)(s + \gamma_i)} F_{i-1}(i-2, s). \quad (10)$$

Для того чтобы найти явное выражение для двухиндексной последовательности $\{F_i(k, s)\}$ ($1 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq i-1$), приведем соотношения (8)–(10) к более простому виду. Соотношение (9) для $k = 1$ принимает вид

$$F_i(1, s) = \lambda_{i-1} \gamma_i \sum_{l=0}^{i-2} \frac{c_i^l l! F_{i-1}(l, s)}{(s + \gamma_i)^{l+1}}.$$

Поэтому из (8) следует равенство

$$F_i(0, s) = \frac{\gamma_i}{s(s + \gamma_i)} + \frac{c_i}{s + \gamma_i} F_i(1, s). \quad (11)$$

Аналогично, если $k < i-2$, то из (9) следует, что

$$F_i(k+1, s) = \frac{\lambda_{i-1} \gamma_i}{(k+1)!} \sum_{l=k}^{i-2} \frac{c_i^{l-k} l! F_{i-1}(l, s)}{(s + \gamma_i)^{l-k+1}}.$$

Отсюда и из (9) получаем, что при $0 < k < i-1$ имеет место равенство

$$F_i(k, s) = \frac{(k+1) c_i F_i(k+1, s)}{s + \gamma_i} + \frac{\lambda_{i-1} c_i F_{i-1}(k-1, s)}{a_i k (s + \gamma_i)}. \quad (12)$$

Таким образом, мы показали, что двухиндексная последовательность $\{F_i(k, s)\}$ ($1 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq i-1$) удовлетворяет соотношениям (10)–(12).

Положим

$$\begin{aligned} F_i(k, s) &= \frac{\lambda_{i-k} \lambda_{i-k+1} \cdots \lambda_{i-1} \gamma_{1,i}(s)}{k! s} \tilde{\Phi}_i(k, s) \quad (k > 0), \\ F_i(0, s) &= \frac{\gamma_{1,i}(s)}{s} \tilde{\Phi}_i(0, s), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\gamma_{k,l}(s) = \prod_{j=k}^l \gamma_j(s)$, $\gamma_j(s) = \gamma_j/(s + \gamma_j)$. Тогда соотношения (10)–(12) запишутся в виде

$$\tilde{\Phi}_i(0, s) = \frac{1}{\gamma_{1,i-1}(s)} + \lambda_{i-1} a_i \tilde{\Phi}_i(1, s), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i(k, s) &= \lambda_{i-k-1} a_i(s) \tilde{\Phi}_i(k+1, s) \\ &\quad + \tilde{\Phi}_{i-1}(k-1, s) \quad (0 < k < i-1), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tilde{\Phi}_i(i-1, s) = \tilde{\Phi}_{i-1}(i-2, s), \quad (16)$$

где $a_i(s) = a_i \gamma_i(s)$.

Заметим, что так как $\tilde{\alpha}_1(x, t) = 1 - e^{-\gamma_1 t}$, то $F_1(0, s) = s^{-1}(s + \gamma_1)^{-1}$ и поэтому $\tilde{\Phi}_1(0, s) = 1$. Отсюда и из (16) следует, что при $i = 1, \dots, n$

$$\tilde{\Phi}_i(0, s) = 1. \quad (17)$$

Лемма 5. *Равенства (14)–(16) однозначно определяют двухиндексную последовательность $\{\tilde{\Phi}_i(k, s)\}$.*

Доказательство леммы 5 почти дословно совпадает с доказательством того, что соотношения (12)–(15) работы [1] однозначно определяют последовательность $\{\tilde{B}_i(k)\}$, введенную в этой работе, и поэтому опускается.

При помощи элементарных, но утомительных выкладок можно проверить, что последовательность

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i(k, s) &= \frac{1}{\gamma_{1,i-k-1}(s)} + \frac{\lambda_{i-k-1}}{\gamma_{1,i-k-2}(s)} \sum_{l=i-k}^i a_l(s) \\ &\quad + \frac{\lambda_{i-k-2} \lambda_{i-k-1}}{\gamma_{1,i-k-3}(s)} \sum_{l_1=i-k}^i \sum_{l_2=i-k}^{l_1} a_{l_1}(s) a_{l_2}(s) \\ &\quad + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-k-1} \sum_{l_1=i-k}^i \sum_{l_2=i-k-1}^{l_1} \dots \sum_{l_{i-k-1}=2}^{l_{i-k-2}} a_{l_1}(s) \dots a_{l_{i-k-1}}(s), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\lambda_p = 0$ при $p \leq 0$, $\lambda_{k,l}(s) = 1$ при $k > l$, удовлетворяет соотношениям (14)–(16) для $1 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq i-1$.

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i(x, s) &= \int_0^\infty e^{-st} \tilde{\alpha}_i(x, t) dt, & \tilde{R}_i(x, s) &= \int_0^\infty e^{-st} \tilde{r}_i(x, t) dt, \\ \tilde{\Psi}_i(x, s) &= \int_0^\infty e^{-st} \tilde{\psi}_i(x, t) dt, & \Psi_i(x, s) &= \int_0^\infty e^{-st} \psi_i(x, t) dt. \end{aligned}$$

Тогда в силу леммы 4 и равенств (13) получаем, что

$$\tilde{A}_i(x, s) = \sum_{k=0}^{i-1} F_i(k, s) x^k = \frac{\gamma_{1,i}(s)}{s} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_{i-k} \lambda_{i-k+1} \cdots \lambda_{i-1}}{k!} \tilde{\Phi}_i(k, s) x^k.$$

Из равенства (2) вытекает, что $\tilde{\Psi}_i(x, s) = \lambda_i e^{-x} \tilde{A}_i(x, s)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для $n \geq 1$ справедливо равенство

$$\tilde{\Psi}_n(x, s) = e^{-x} \frac{\gamma_{1,n}(s)}{s} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{n-k} \lambda_{n-k+1} \cdots \lambda_n}{k!} \tilde{\Phi}_n(k, s) x^k,$$

где функции $\tilde{\Phi}_n(k, s)$ задаются равенствами (18), в которых нужно положить $i = n$.

Сделав перестановку индексов $i \rightarrow n - i + 1$ ($i = 1, \dots, n$), из теоремы 1 получим выражение для $\Psi_n(x, s)$.

Напомним, что в теореме 1 нужно положить $\lambda_p = 0$ при $p \leq 0$. При указанной перестановке подмножество индексов $\{p \leq 0\}$ перейдет в подмножество $\{p \geq n + 1\}$. Поэтому удобно положить $\lambda_p(n) = \lambda_p$ при $0 < p \leq n + 1$ и $\lambda_p(n) = 0$ в противном случае.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Для $n \geq 1$ справедливо равенство

$$\Psi_n(x, s) = e^{-x} \frac{\gamma_{1,n}(s)}{s} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k \lambda_{k+1}}{k!} \Phi_n(k, s) x^k,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n(k, s) = & \frac{1}{\gamma_{k+2,n}(s)} + \frac{\lambda_{k+2}(n)}{\lambda_{k+3,n}(s)} \sum_{l=1}^{k+1} a_l(s) \\ & + \frac{\lambda_{k+2}(n) \lambda_{k+3}(n)}{\gamma_{k+4,n}(s)} \sum_{l_1=1}^{k+1} \sum_{l_2=l_1}^{k+2} a_{l_1}(s) a_{l_2}(s) + \cdots + \lambda_{k+2}(n) \lambda_{k+3}(n) \\ & \cdots \lambda_n(n) \sum_{l_1=1}^{k+1} \sum_{l_2=l_1}^{k+2} \cdots \sum_{l_{n-k-1}=l_{n-k-2}}^{n-1} a_{l_1}(s) \cdots a_{n-k-1}(s). \end{aligned}$$

Следствие 1. Из теоремы 2 и свойств преобразования Лапласа вытекает, что для всех $x \geq 0$ выражение для $\psi_n(x, t)$ представляет собой смесь распределений, являющихся свертками показательных распределений с параметрами $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Следствие 2. Из теории преобразования Лапласа известно [5], что если $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ и если существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = A$, то $A = \lim_{s \rightarrow 0} s \varphi(s)$. Отсюда и из теоремы 2 вытекает теорема 2 работы [1].

4. Однородный процесс риска. В соответствии с определением 1 под *однородным* процессом риска мы будем понимать такой процесс риска, для которого параметры c_n и δ_n не зависят от n . Положим $\delta_n = \delta$, $\gamma_n = \gamma$, $\lambda_n = \lambda$, $a_n = a$. Таким образом, процесс моментов выплат является пуассоновским с параметром δ , а величины выплат имеют показательное распределение с единичным параметром, причем капитал страховой компании растет линейно с угловым коэффициентом s .

Положим $S_k(0) = 1$ и

$$S_k(m) = \sum_{l_1=1}^k \sum_{l_2=l_1}^{k+1} \cdots \sum_{l_m=l_{m-1}}^{k+m-1} 1 \quad \text{для } m \geq 1.$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 6. Для всех $k \geq 1$ и $m \geq 0$ справедливо равенство $S_k(m) = (k/(k+2m)) C_{k+2m}^m$.

Доказательство. Выполняя суммирование по индексу l_1 , получаем равенство

$$S_k(m) = S_{k+1}(m-1) + S_k(m-1) + \cdots + S_2(m-1). \quad (19)$$

Если нам известно явное выражение для $S_k(m-1)$ при всех $k \geq 1$, то из (19) получаем явное выражение для $S_k(m)$. Непосредственно видно, что

$$S_k(1) = k. \quad (20)$$

Соотношения (19) и (20) определяют $S_k(m)$ однозначно. Тем самым, для доказательства леммы 6 достаточно показать, что имеют место следующие равенства:

- 1) $(k/(k+2)) C_{k+2}^1 = k$ (это равенство очевидно);
- 2) $(k/(k+2m)) C_{k+2m}^m = \sum_{j=1}^k ((j+1)/(j+2m-1)) C_{j+2m-1}^{m-1}$.

Последнее равенство нетрудно доказать индукцией по k , используя равенство

$$\frac{k+1}{k+2m+1} C_{k+2m+1}^m - \frac{k}{k+2m} C_{k+2m}^m = \frac{k+2}{k+2m} C_{k+2m}^{m-1},$$

которое проверяется непосредственно. Лемма 6 доказана.

Положим $\gamma(s) = \gamma/(\gamma+s)$. Тогда $a_l(s) = a\gamma(s)$, и из теоремы 2 и леммы 6 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. Для однородного процесса риска

$$\Psi_n(x, s) = \frac{e^{-x}}{s} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1} x^k}{k!} \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{k+1}{k+2j+1} C_{k+2j+1}^j (\lambda a)^j \gamma^{2j+k+1}(s).$$

Пусть $G_n(t) = 1 - e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{n-1} (\gamma t)^k / k!$ — функция распределения Эрланга.

Из теоремы 3 и леммы 1 вытекают следующие теоремы.

Теорема 4. Для однородного процесса риска

$$\Psi_n(x, t) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1} x^k}{k!} \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{k+1}{k+2j+1} C_{k+2j+1}^j (\lambda a)^j G_{k+2j+1}(t).$$

Теорема 5. Для однородного процесса риска

$$\mathbf{P}\{\tau < t; \eta = n\} = e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1} C_{2n-k-1}^n x^k (k+1)}{k! (2n-k-1)} (\lambda a)^{n-k-1} G_{2n-k-1}(t).$$

Пусть $\psi_n(x) = \psi_n(x, \infty)$ — вероятность разорения за n выплат в однородном процессе риска. Из теоремы 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 6. Для однородного процесса риска

$$\psi_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1} x^k}{k!} \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{k+1}{k+2j+1} C_{k+2j+1}^j (\lambda a)^j.$$

5. Модель Галамбоша. В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, доказательство которой см., например, в [6].

Лемма 7. Пусть случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α , и пусть $X_{(j)}$ является j -й порядковой статистикой выборки $X_1, \dots, X_n$. Тогда случайные величины $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$ являются независимыми, причем $X_{(k)} - X_{(k-1)}$ ($1 \leq k \leq n$, $X_{(0)} = 0$) имеют показательное распределение с параметром $(n - k + 1)\alpha$.

Далее будем предполагать (см. введение), что

1) $F(x) = 1 - e^{-\delta x}$;

2) после наступления несчастного (страхового) случая с каким-то из клиентов он исключается из группы застрахованных;

3) этот клиент получает от страховой компании выплату, величина которой случайна и имеет показательное распределение с параметром 1;

4) начальный капитал страховой компании $x \geq 0$ растет линейно за счет непрерывного поступления взносов от застрахованных клиентов, причем угловой коэффициент роста капитала прямо пропорционален числу оставшихся в группе клиентов, т.е. клиентов, с которыми не произошло несчастного случая.

Нас будет интересовать $\psi_n(x)$ — вероятность того, что, имея начальный капитал x , страховая компания, которая застраховала n клиентов, разорится. В силу наших предположений и в силу леммы 7 мы

имеем неоднородный процесс риска, который рассматривается в настоящей работе и в работе [1].

Обозначим через c угловой коэффициент роста капитала, поступающего от одного клиента. Таким образом, в обозначениях настоящей работы для $1 \leq i \leq n$ имеем

$$c_i = (n - i + 1) c, \quad (21)$$

и из леммы 7 вытекает, что

$$\delta_i = (n - i + 1) \delta. \quad (22)$$

Для нахождения вероятности $\psi_n(x)$ мы можем применить теорему 2 работы [1], в которой найдено явное выражение для вероятности разорения в неоднородном процессе риска. Это выражение зависит от начального капитала x и постоянных $\lambda_i = \delta_i/(\delta_i + c_i)$, $a_i = c_i/(\delta_i + c_i)$. Из равенств (21) и (22) вытекает, что параметры λ_i , a_i не зависят от i : $\lambda_i = \delta/(\delta + c)$, $a_i = c/(\delta + c)$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Вероятность разорения в модели Галамбоша совпадает с вероятностью разорения в однородном процессе риска с конечным числом выплат, причем выражение для этой вероятности содержится в теореме 6.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов О. П. Вероятность разорения страховой компании в случае, когда интервалы между моментами выплат имеют неодинаковые показательные распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 2, с. 352–357.
2. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 303 с.
3. Эмбреттс П., Клоппельберг К. Некоторые аспекты страховой математики. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 374–416.
4. Malinovskii V. K. Non-Poissonian claims' arrivals and calculation of the probability of ruin. — Insurance Math. Econom., 1998, v. 22, № 2, p. 123–138.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965, 716 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.

Поступила в редакцию
18.III.2002

Исправленный вариант
14.X.2005