Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Носко, Rosenblatt M. Gaussian and Non-Gaussian “Linear Time Series and Random Fields”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 1, 200–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:29:37

© 2002 г.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Rosenblatt M. **Gaussian and Non-Gaussian Linear Time Series and Random Fields**. Springer series in statistics. New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2000, XIII+246 p.

Как следует из самого названия, книга известного специалиста в области случайных процессов и полей М. Розенблатта посвящена линейным временным рядам и случайным полям, точнее говоря, стационарным линейным последовательностям и случайным полям вида

$$x_t = \sum_j a_j \xi_{t-j}, \quad \sum_j a_j^2 < \infty,$$

где a_j — вещественные коэффициенты, ξ_t — независимые одинаково распределенные случайные величины с $E\xi_j \equiv 0$, $0 < E\xi_j^2 < \infty$. В случае последовательности индексы t и j принимают целочисленные значения и суммирование ведется по значениям j от $-\infty$ до ∞ ; в случае поля индексы t и j являются векторами размерности d с целочисленными компонентами и суммирование распространяется на все точки решетки $\mathbf{Z}^d$.

Основным объектом внимания являются смешанные схемы авторегрессии и скользящего среднего (ARMA) вида

$$\sum_j \phi_j x_{t-j} = \sum_k \theta_k \xi_{t-k},$$

в которых лишь конечное число коэффициентов ϕ_j и θ_k отлично от нуля, и стационарные решения x_t этих систем уравнений.

При $d = 1$ систему уравнений ARMA (ARMA(p, q)) можно записать в виде

$$\phi(B)x_t = \theta(B)\xi_t,$$

где $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$, $\phi_p \neq 0$, $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$, $\theta_q \neq 0$, многочлены $\phi(z)$ и $\theta(z)$ не имеют общих корней и B — оператор обратного сдвига, $Bx_t = x_{t-1}$. Стационарное решение этой системы существует тогда и только тогда, когда многочлен $\phi(z)$ не имеет единичных корней (т.е. корней, абсолютная величина которых равна 1), и такое решение единственно. Если все корни многочлена $\phi(z)$ по абсолютной величине больше 1, то стационарное решение записывается в виде

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \xi_{t-j}, \quad \sum_j \alpha_j^2 < \infty,$$

и называется причинно обусловленным («causal»). В русскоязычной литературе в этом случае процесс x_t называют линейно регулярным. Он получается фильтрацией белого шума с использованием физически реализуемого фильтра. Если к тому же и все корни многочлена $\theta(z)$ по абсолютной величине больше 1, то аналогичное одно-стороннее представление имеет и ξ_t :

$$\xi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x_{t-j}, \quad \sum_j \beta_j^2 < \infty;$$

при этом стационарное решение x_t называется обратимым. В случае, когда все корни обоих многочленов $\phi(z)$ и $\theta(z)$ по абсолютной величине больше 1 (так что стационарное решение x_t линейно регулярно и обратимо), система ARMA-уравнений называется системой с минимальной фазой, а само это решение — стационарным ARMA-процессом минимальной фазы. Именно такие процессы рассматриваются обычно в литературе по временным рядам.

В книге М. Розенблатта исследуются как процессы минимальной фазы, так и процессы неминимальной фазы, гауссовские и негауссовские. При этом негауссовские модели неминимальной фазы могут иметь более богатую структуру по сравнению с гауссовскими моделями. Обсуждаются задачи оценивания коэффициентов моделей и прогнозирования будущих значений по прошлому или прошлым значениям по будущему.

Книга состоит из восьми глав.

В главе 1 рассматривается вопрос о реверсивности линейной стационарной последовательности (означающей сохранение вероятностной структуры последовательности при обращении времени). Даются необходимые и достаточные условия реверсивности линейной стационарной последовательности. Результат конкретизируется в применении к стационарному процессу ARMA и к дробно интегрированному процессу ARMA. Доказывается теорема об условиях идентифицируемости коэффициентов a_j линейного случайного поля на d -мерной решетке $\mathbf{Z}^d$.

Глава 2 посвящена оцениванию систем с минимальной фазой. Строится оценка $\hat{\beta}_n$ вектора β коэффициентов многочленов $\phi(z)$ и $\theta(z)$ модели ARMA с минимальной фазой, которая в гауссовском случае асимптотически эквивалентна оценке максимального правдоподобия. Доказывается строгая состоятельность и асимптотическая нормальность этой и еще двух оценок вектора β .

В главе 3 рассматриваются однородные гауссовские поля. Изложение основано на известной работе Ю. А. Розанова 1967 г. Даются необходимые и достаточные условия регулярности (сингулярности) однородного гауссовского поля на d -мерной решетке $\mathbf{Z}^d$, представление произвольного однородного гауссовского поля в виде суммы двух независимых случайных полей, одно из которых регулярно, а другое сингулярно. Приведено выражение для плотности абсолютно непрерывной компоненты спектральной меры L -марковского однородного гауссовского поля на $\mathbf{Z}^d$, указано строение носителя сингулярной компоненты этой меры.

В главе 4 рассматриваются свойства оценки Уиттла вектора коэффициентов стационарной ARMA-модели случайного поля на $\mathbf{Z}^d$, основанной на сглаженной периодограмме. Доказывается асимптотическая нормальность этой оценки.

В главе 5 с большим опозданием (с методической точки зрения) обращается внимание на одно важное обстоятельство, обычно не отмечаемое авторами различных руководств по временным рядам. Именно, если в схеме авторегрессии первого порядка $x_n = \beta x_{n-1} + \xi_n$ параметр β по абсолютной величине больше единицы, $|\beta| > 1$, так что это есть схема с неминимальной фазой, то стационарное решение данной системы уравнений все же существует, но имеет вид

$$x_t = - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta_j} \right)^j \xi_{t+j},$$

т.е. x_t выражается линейно не через прошлые, а через будущие значения ξ_s , $s > t$. При этом ξ_n уже не является обновляющей случайной величиной (т.е. не является случайной величиной, независимой от прошлых значений x_s , $s < n$).

В случае негауссовской одномерной системы с минимальной фазой наилучший прогноз все еще остается линейным (как и в случае гауссовости). Однако для негауссовской схемы с неминимальной фазой наилучший в среднем квадратическом прогноз в большинстве случаев оказывается нелинейным. Приводятся соответствующие

результаты для стационарных процессов авторегрессии $AR(p)$ и скользящего среднего $MA(q)$. Подробно обсуждаются некоторые частные случаи.

В главе 6 изучается взятое со знаком минус квазигауссовское логарифмическое правдоподобие $\mathcal{L}_n(\beta, \sigma^2)$ для параметров стационарного процесса $ARMA(p, q)$ с нулевым средним. Это правдоподобие раскладывается в сумму его математического ожидания $M_n(\beta, \sigma^2)$ и флуктуации $\mathcal{F}_n(\beta, \sigma^2)$. Поведение $\mathcal{L}_n(\beta, \sigma^2)$, его математического ожидания и флуктуации рассматривается на компактном множестве K_ε , $\varepsilon > 0$, где

$$K_\varepsilon = \{\beta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q) : \text{нули } \phi(z) \text{ и } \theta(z) \text{ заключены} \\ \text{в замкнутом кольце } 1 + \varepsilon \leq |z| \leq \varepsilon^{-1}\}.$$

Заметим, что в этом случае x_t — $ARMA(p, q)$ -процесс минимальной фазы. В случае негауссовости процесса x_t оценки, полученные максимизацией $\mathcal{L}_n(\beta, \sigma^2)$, неэффективны, а если при этом x_t является еще и процессом неминимальной фазы, то эти оценки оказываются даже несостоятельными. Доказывается сходимость $\sqrt{n}\mathcal{F}_n(\cdot)$ при $n \rightarrow \infty$ по распределению (на K_ε) к соответствующему гауссовскому процессу $\mathcal{F}(\cdot)$.

В главе 7 обсуждаются проблемы, связанные с определением случайных полей на счетном множестве, например на $\mathbf{Z}^d$, с особым вниманием к марковским случайным полям и марковским цепям.

В главе 8 рассматривается задача оценивания параметров стационарных моделей $AR(p)$ и $ARMA(p, q)$, но в отличие от главы 6 здесь уже не требуется, чтобы это были модели с минимальной фазой. Соответственно, здесь приходится строить другие оценки параметров указанных моделей, основанные на максимизации аппроксимативных логарифмических правдоподобий (оценки минимального контраста). При некоторых условиях на плотность случайной величины ξ_n доказывается состоятельность и асимптотическая нормальность этих оценок. Кроме того в этой главе излагается метод оценивания коэффициентов авторегрессионной схемы конечного порядка на решетке $\mathbf{Z}^d$, основанный на использовании кумулянтов. Если $E|\xi^{2\nu+2}| < \infty$ для $\nu > 2$, то оценка, получаемая этим методом, также состоятельна и асимптотически нормальна.

В тексте на обложке книга представлена как учебник для «graduate» студентов, специализирующихся в статистике, математике, инженерных дисциплинах, естественных науках и экономике, предполагающий начальные знания теории вероятностей и математической статистики. Представляется, однако, что чтение этой книги требует достаточно высокой математической подготовки и интересно, в первую очередь, специалистам в области теории случайных процессов и полей.

В. П. Носко

A s m u s s e n S. **Ruin Probabilities**. Singapore etc.: World Scientific, 2000, xii+385 p.

Настоящая книга посвящена важной составной части математической теории риска, задаче о разорении. Результаты, полученные в рамках этой теории, применяются для углубленного исследования реальных задач страхового регулирования и страховой практики, таких, как расчет рискованного резерва и разработка тарифной политики. Развиваясь, теория риска ставит перед исследователями все более сложные математические задачи.

Автор является одним из ведущих представителей известной скандинавской школы, основателями которой были Филип Лундберг и Гаральд Крамер. Появле-