Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, Интегро-локальные и локальные теоремы о нормальных и больших отклонениях сумм разнораспределенных случайных величин в схеме серий, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 4, 625–644

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3532>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:21:22

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука

Том 54
Выпуск 4, 2009 год
октябрь, ноябрь, декабрь

© 2009 г.

БОРОВКОВ А. А.*

ИНТЕГРО-ЛОКАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НОРМАЛЬНЫХ И БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СУММ РАЗНОРАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В СХЕМЕ СЕРИЙ¹⁾

Локальная теорема Гнеденко и интегро-локальная теорема Стоуна–Шеппа (см. [1]–[3]) для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин распространены на случай, когда суммируемые случайные величины являются разнораспределенными в схеме серий. При выполнении условия Крамера на слабые получены также интегро-локальные и локальные теоремы, действующие в области больших и умеренно больших отклонений.

Ключевые слова и фразы: теорема Гнеденко, теорема Стоуна–Шеппа, интегро-локальные теоремы, локальные теоремы, суммы разнораспределенных случайных величин, схема серий, большие отклонения.

1. Введение. Пусть $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{k,n}$ — независимые случайные величины в схеме серий,

$$\mathbf{E} \xi_{j,n} = 0, \quad 0 < \sigma_{j,n}^2 := \mathbf{D} \xi_{j,n} < \infty, \quad B_n^2 := \sum_{j=1}^n \sigma_{j,n}^2, \\ \bar{\sigma}_n^2 := \max_{j \leq n} \sigma_{j,n}^2, \quad S_n := \sum_{j=1}^n \xi_{j,n}.$$

Пусть далее Δ — произвольное фиксированное число и $\Delta[x)$ означает полуинтервал $[x, x + \Delta)$. Мы будем изучать асимптотическое поведение

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск; Новосибирский государственный университет, Академгородок, ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-3695.2008.1) и РФФИ (грант № 08-01-00962).

вероятностей

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\bar{\sigma}_n} \in \Delta[x]\right) \quad (1.1)$$

при $n \rightarrow \infty$ для значений x , которые включают в себя как область нормальных, так и область больших уклонений, в предположении, что

$$0 < \bar{\sigma}_n = o(B_n). \quad (1.2)$$

Кроме того, при изучении вероятностей больших уклонений будет предполагаться, что

$$\psi_{j,n}(\lambda_0) := \mathbf{E} e^{\lambda_0 \xi_{j,n}} < \infty \quad (1.3)$$

при некотором $\lambda_0 > 0$.

Если $\xi_{j,n} = \xi_j \stackrel{d}{=} \xi$ одинаково распределены, не зависят от n и нерешетчатые, то известные теоремы Стоуна–Шеппа [1], [2] устанавливают асимптотику $\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x])$ при любом фиксированном $\Delta > 0$. Аналогично, теоремы Гнеденко [3] устанавливают асимптотику $\mathbf{P}(S_n = x)$ при целых x для арифметических ξ_k .

Настоящая работа распространяет эти результаты на схему серий для разнораспределенных случайных величин, включая область больших уклонений. Некоторые модификации теорем Гнеденко и Стоуна–Шеппа на схему серий для одинаково распределенных величин рассмотрены в [5]. Интегральные теоремы для вероятностей больших уклонений сумм S_n разнораспределенных случайных величин вне схемы серий (главным образом для умеренно больших уклонений) получены в [6], [7] и ряде других работ. Подробно на результатах названных работ мы останавливаться не будем, так как по формулировкам и методологически они мало связаны с результатами, приведенными ниже.

В разделе 2 теоремы Гнеденко и Стоуна–Шеппа распространяются на область нормальных уклонений сумм разнораспределенных случайных величин в схеме серий. В разделе 3 с помощью преобразований Крамера и результатов раздела 2 получены теоремы о больших уклонениях.

2. Распространение теорем Гнеденко и Стоуна–Шеппа на суммы разнораспределенных слагаемых в области нормальных уклонений.

2.1. Основные утверждения. Для удобства изложения и упрощения формулировок мы вместо вероятности (1.1) будем изучать

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x]) \quad (2.1)$$

для сумм случайных величин $\xi_{j,n}$, для которых

$$\mathbf{E} \xi_{j,n} = 0 \quad (2.2)$$

и существуют постоянные $0 < c_1 < c_2 < \infty$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 \leq \bar{\sigma}_n \leq c_2. \quad (2.3)$$

При таком соглашении нам понадобится условие

$$B_n \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Условия (2.3), (2.4) эквивалентны (1.2). Действительно, из (2.3), (2.4) немедленно следует (1.2). Чтобы установить обратную импликацию, достаточно вместо $\xi_{j,n}$ рассматривать нормированные случайные величины $\xi_{j,n}/\bar{\sigma}_n$.

Отметим, что первое неравенство в (2.3) в доказательствах приведенных ниже утверждений непосредственно не используется, но оно в известном смысле существенно; оно определяет «масштаб» величин $\xi_{j,n}$ (в (1.2) этого нет). В интегро-локальных теоремах это важно. При выполнении (2.3) значения Δ , «сравнимые с 1» (такие значения рассматриваются в теореме 2.1), оказываются минимальными возможными (вообще говоря) значениями, при которых теорема 2.1 справедлива (если $\bar{\sigma}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то Δ можно выбирать сравнимым с $\bar{\sigma}_n$, ср. с (1.1)).

Нам понадобится также следующее условие равномерной интегрируемости, близкое к условию Линдеберга.

[UI] Последовательность $\{\xi_{j,n}^2/\sigma_{j,n}^2\}$ равномерно интегрируема, т.е. существует функция $h(N)$ такая, что $h(N) \downarrow 0$ при $N \uparrow \infty$ и

$$\max_{j \leq n} \mathbf{E} \left(\frac{\xi_{j,n}^2}{\sigma_{j,n}^2}; \frac{|\xi_{j,n}|}{\sigma_{j,n}} > N \right) \leq h(N). \quad (2.5)$$

Так как при выполнении (2.3), (2.4) для любого $\tau > 0$ справедливо $N = N_n := \tau B_n / (c_3 \sigma_{1,n}) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то в силу условия [UI] выполняется

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{E} (\xi_{j,n}^2; |\xi_{j,n}| > \tau B_n) &\leq \sum_{j=1}^n \sigma_{j,n}^2 \mathbf{E} \left(\frac{|\xi_{j,n}|^2}{\sigma_{j,n}^2}; \frac{|\xi_{j,n}|}{\sigma_{j,n}} > \frac{\tau B_n}{c_3 \sigma_{1,n}} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sigma_{j,n}^2 h(N) = o(B_n^2). \end{aligned}$$

Это означает, что условия (2.3), (2.4), [UI] влекут за собой выполнение условия Линдеберга. Нетрудно видеть, что обратное утверждение о том, что условие Линдеберга при выполнении соглашений (2.3), (2.4) влечет за собой [UI], неверно, так что условие [UI] при выполнении (2.3), (2.4) является более сильным.

Перейдем теперь к условиям нерешетчатости. Условие нерешетчатости одной случайной величины можно записать в виде $|\varphi(t)| < 1$ при любом $t \neq 0$, где

$$\varphi(t) := \mathbf{E} e^{it\xi}.$$

Нам потребуется следующее условие [R] *асимптотической нерешетчатости сумм* S_n . При заданных $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ обозначим

$$q_{j,n} = q_{j,n}(\varepsilon, N) := \sup_{\varepsilon \leq |t| \leq N} |\varphi_{j,n}(t)|, \quad \varphi_{j,n}(t) := \mathbf{E} e^{it\xi_{j,n}}. \quad (2.6)$$

Условие [R] имеет следующий вид.

[R] *При любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $N > 0$*

$$B_n \prod_{j=1}^n q_{j,n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Допустим, что существует $m = m(n) \leq n$ случайных величин $\xi_{j,n}$ (пусть это будут $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{m,n}$) таких, что для них выполнено следующее «ослабленное» условие нерешетчатости равномерно по j и n : при любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $N < \infty$

$$\max_{j \leq m} q_{j,n} \leq q < 1, \quad (2.8)$$

где q от n не зависит. Произведение (2.7) в этом случае не превосходит $q^m B_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если, например, $m \geq -2 \ln B_n / \ln q$. Таким образом, для $m \gg \ln B_n$ условие [R] всегда выполнено, если выполнено (2.8). Остальные слагаемые $\xi_{j,n}$, $j > m$, могут быть произвольными (при выполнении (2.4)).

Мы можем сформулировать теперь следующее интегро-локальное утверждение.

Теорема 2.1. Пусть $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{n,n}$ — независимые случайные величины, $\mathbf{E} \xi_{j,n} = 0$, $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_{j,n}$. Предположим, что выполнены условия (2.3), (2.4), [UI] и [R]. Тогда при любом фиксированном $\Delta > 0$

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x]) = \frac{\Delta}{B_n} \phi\left(\frac{x}{B_n}\right) + o\left(\frac{1}{B_n}\right), \quad (2.9)$$

где $\phi(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/2}$ — плотность стандартного нормального распределения, остаточный член $o(1/B_n)$ равномерен по x .

Пример 2.1. Пусть $\xi_{j,n} = \xi_j = \zeta_j g(j)$, где $\zeta_j \stackrel{d}{=} \zeta$ независимы, нерешетчатые и одинаково распределены, $\mathbf{E} \zeta = 0$, $\mathbf{E} \zeta^2 = 1$, $g(j)$ — правильно меняющаяся функция с показателем β , т.е. функция, представляемая в виде $g(j) = j^\beta l(j)$, где $l(j)$ — медленно меняющаяся функция.

Если $\beta < 0$, то $g(j)$ «асимптотически» убывает, $\bar{\sigma}_n \in [g(1), \max_{j \geq 1} g(j)]$ и

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^n g^2(j) \sim \frac{1}{2\beta+1} n^{2\beta+1} l^2(n) \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

при $\beta > -1/2$, так что условия (2.3), (2.4) выполнены для таких β . Так как $\xi_j^2/\mathbf{D}\xi_j = \zeta_j^2$ равномерно интегрируемы, то выполнено также условие [UI]. Чтобы проверить условие [R], заметим, что при некотором $q < 1$ и $\varphi_{(\zeta)}(t) := \mathbf{E} e^{it\zeta}$ выполняется

$$\begin{aligned} q_{j,n} &= \sup_{\varepsilon \leq t \leq N} |\varphi_{(\zeta)}(tg(j))| \leq \sup_{\varepsilon g(j) \leq |u| \leq Ng(j)} |\varphi_{(\zeta)}(u)| \\ &= \max \left(q, \sup_{\varepsilon g(j) \leq |u| \leq \varepsilon} |\varphi_{(\zeta)}(u)| \right), \end{aligned}$$

где при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $|u| \leq \varepsilon$

$$|\varphi_{(\zeta)}(u)| \leq 1 - \frac{u^2}{3}, \quad \frac{1 - \varepsilon^2}{3} \geq q,$$

так что

$$\prod_{j=1}^n q_{j,n} \leq \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\varepsilon^2 g^2(j)}{3} \right) \approx \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 l^2(n) n^{2\beta+1}}{3(2\beta+1)} \right\} = o(B_n^{-1}).$$

Это означает, что выполнено условие [R] и $\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x])$ описывается соотношением (2.9) при B_n , определенном в (2.10).

Если $\beta > 0$, то $\sigma_{j,n} = g(j)$ растут с ростом j , так что условие (2.3) не выполнено и теорема 2.1 непосредственно не применима. Однако ее можно применить к новым случайным величинам

$$\xi_{j,n}^* = \frac{\xi_{n-j+1}}{\sigma_{n,n}} = \frac{\xi_{n-j+1}}{g(n)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для этих величин условие (2.3) будет выполнено. Снабжая верхним индексом * все введенные ранее обозначения, но соответствующие последовательности $\{\xi_{j,n}^*\}$, мы получим (см. (2.10))

$$(B_n^*)^2 := \frac{B_n^2}{g^2(n)} \sim \frac{n^{2\beta+1}}{2\beta+1} \frac{l^2(n)}{n^{2\beta} l^2(n)} = \frac{n}{2\beta+1} \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$, что означает выполнение (2.4). Выполнение [UI] следует из равномерной интегрируемости $(\xi_{j,n}^*)^2$. Чтобы проверить условие [R], можно воспользоваться критерием (2.8), так как первые $m = n/2$ случайных величин $\xi_{j,n}^*$ равномерно нерешетчаты и для них выполнено (2.8). Следовательно, теперь асимптотика

$$\mathbf{P}(S_n^* \in \Delta[x]) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{g(n)} \in \Delta[x]\right)$$

описывается теоремой 2.1, в утверждении которой B_n надо заменить на $B_n^* \sim \sqrt{n/(2\beta+1)}$.

Таким образом, при растущих $\sigma_{j,n}$ и $\sigma_{1,n}$, сравнимых с 1, возможно описание интегро-локальных вероятностей $\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x])$ лишь при больших значениях Δ , сравнимых с $\sigma_{n,n}$ (что естественно). Эти значения Δ остаются все же малыми по сравнению с B_n (в $B_n/\bar{\sigma}_n$ раз меньше).

Сформулируем теперь **локальную** теорему об асимптотическом поведении плотности f_{S_n} суммы S_n , когда эта плотность существует. При заданном $M \geq 1$ нам понадобится следующая модификация условия $[R]$.

$[R_M]$ При любом фиксированном $\varepsilon > 0$

$$B_n \sum_{j=M+1}^n q_{j,n}(\varepsilon, \infty) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, где $q_{j,n}(\varepsilon, N)$ определены в (2.6).

З а м е ч а н и е 2.1. Если среди случайных величин $\xi_{j,n}$ при $j \geq M+1$ найдутся $m = m(n)$ величин (пусть это будут $\xi_{j,n}$ при $M < j \leq M+m$), для которых

$$q_{j,n}(\varepsilon, \infty) \leq q(\varepsilon) < 1,$$

то, как и в случае (2.8), нетрудно убедиться, что при $m \gg \ln B_n$ условие $[R_M]$ будет выполнено.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (2.3), (2.4), $[UI]$ и существует $M \geq 1$ такое, что выполнено условие $[R_M]$ и хотя бы одно из следующих двух условий:

а) распределение суммы $S_M = \sum_{j=1}^M \xi_{j,n}$ имеет ограниченную равномерно по n плотность (т.е. ограниченную постоянной, не зависящей от n);

б) распределение S_M имеет плотность, интегрируемую с квадратом равномерно по n , а характеристическая функция $\varphi_{(S_M)}(t) := \prod_{j=1}^M \varphi_{j,n}(t)$ суммы S_M интегрируема равномерно по n .

Тогда распределение суммы S_n имеет при $n \geq M$ плотность f_{S_n} , для которой равномерно по x при $n \rightarrow \infty$ выполняется

$$f_{S_n}(x) = \frac{1}{B_n} \phi\left(\frac{x}{B_n}\right) + o\left(\frac{1}{B_n}\right).$$

З а м е ч а н и е 2.2. 1. Условия а) и б) эквивалентны (возможно, при разных значениях M . Например, соотношение $f_{S_M} \in L_2$ в условии б) влечет за собой ограниченность плотности $f_{S_{2M}}$; подробнее об этом см., например, [8, § 8.7].

2. Достаточным для выполнения условия интегрируемости $\varphi_{(S_M)}$ может быть одно из следующих двух условий:

б1) существует $M_1 < M$ такое, что суммы S_{M_1} и $S_M - S_{M_1}$ имеют ограниченные плотности;

b2) существует $M_1 < M$ такое, что суммы S_{M_1} и $S_M - S_{M_1}$ имеют плотности, интегрируемые с квадратом.

Действительно, нетрудно видеть, что b1) $\Rightarrow$ b2). Поэтому нам надо лишь убедиться, что условие b2) достаточно для интегрируемости $\varphi_{(S_M)}$. Пусть для простоты $M_1 = M - M_1 = 1$. Так как $f_{\xi_{1,n}}$ и $f_{\xi_{2,n}}$ интегрируемы с квадратом, то $\varphi_{(\xi_{1,n})}$ и $\varphi_{(\xi_{2,n})}$ также интегрируемы с квадратом и

$$\left(\int |\varphi_{(\xi_{1,n})} \varphi_{(\xi_{2,n})}| \right)^2 \leq \int \varphi_{(\xi_{1,n})}^2 \int \varphi_{(\xi_{2,n})}^2 < \infty.$$

Это означает, что функция $|\varphi_{(\xi_{1,n})} \varphi_{(\xi_{2,n})}| = |\varphi_{(S_2)}|$ интегрируема.

Рассмотрим теперь случай, когда все слагаемые $\xi_{j,n}$ **целочисленны**. Условие арифметичности одной случайной величины ξ (наибольший общий делитель возможных значений равен 1) можно записать в виде:

$$|\varphi(t)| < 1 \quad \text{при любом } t \in (0, 2\pi).$$

Нам понадобится следующее условие [Z] *асимптотической арифметичности сумм* S_n . При заданном $\varepsilon > 0$ обозначим аналогично предыдущему

$$q_{j,n} := q_{j,n}(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon) = \sup_{t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]} |\varphi_{j,n}(t)|.$$

Условие [Z] имеет следующий вид.

[Z] При любом фиксированном $\varepsilon > 0$

$$B_n \prod_{j=1}^n q_{j,n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Аналогично предыдущему легко убедиться, что если m слагаемых $\xi_{j,n}$ при $j \leq m \leq n$ равномерно по n арифметичны: $\max_{j \leq m} q_{j,n} \leq q < 1$, где q от n не зависит, то при $m \geq -2 \ln B_n / \ln q$ условие [Z] будет выполнено. Остальные $\xi_{j,n}$ при $j > m$ могут быть произвольными целочисленными величинами (при выполнении (2.3)).

Отметим, что для арифметических $\xi_{j,n}$ мы не можем предполагать, не ограничивая общности, что $a_{j,n} := \mathbf{E} \xi_{j,n} = 0$. В связи с этим в арифметическом случае условие [UI] будет иметь следующий вид.

[UI] Последовательность $\{(\xi_{j,n} - a_{j,n})^2 / \sigma_{j,n}^2\}$ равномерно интегрируема.

Обозначим $A_n = \sum_{j=1}^n a_{j,n}$.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 кроме условия $a_{j,n} = 0$, а условие [R] заменено на [Z]. Тогда для целочисленных x

$$\mathbf{P}(S_n = x) = \frac{1}{B_n} \phi\left(\frac{x - A_n}{B_n}\right) + o\left(\frac{1}{B_n}\right), \quad (2.12)$$

где остаточный член равномерен по x .

2.2. Доказательство теоремы 2.1. Воспользуемся методом сглаживания и рассмотрим суммы

$$Z_n = S_n + \theta\eta,$$

где $\theta = \text{const}$, а η не зависит от S_n и имеет интегрируемую характеристическую функцию

$$\varphi_{(\eta)}(t) = \max(0, 1 - |t|),$$

так что по формуле обращения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \in \Delta[x]) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \varphi_n(t) \frac{1 - e^{-it\Delta}}{it} \varphi_{(\eta)}(t) dt \\ &= \frac{\Delta}{2\pi} \int_{|t| \leq 1/\theta} e^{-itx} \varphi_n(t) \varphi(t) dt, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &:= \varphi_{(S_n)}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{j,n}(t), \quad \varphi(t) := \varphi^{(\Delta)}(t) \varphi_{(\eta)}(t), \\ \varphi^{(\Delta)}(t) &:= \frac{1 - e^{-it\Delta}}{it\Delta}. \end{aligned}$$

Здесь $\varphi(t)$ есть характеристическая функция суммы двух независимых случайных величин η и $\eta_{(\Delta)}$, где $\eta_{(\Delta)}$ равномерно распределена на $[-\Delta, 0]$.

Разобьем интеграл в правой части (2.13) на два подынтеграла I_1 и I_2 , соответственно по области $|t| < \gamma$ при некотором $\gamma < 1$ и по дополнительной области.

Рассмотрим сначала I_1 . Функцию $\varphi_n(t)$ представим в виде

$$\varphi_n(t) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \ln [1 - (\varphi_{j,n}(t) - 1)] \right\}$$

и воспользуемся тождеством

$$\varphi_{j,n}(t) - 1 = \left(\varphi_{j,n}(t) - 1 + \frac{t^2 \sigma_{j,n}^2}{2} \right) - \frac{t^2 \sigma_{j,n}^2}{2},$$

где при фиксированном $N > 0$

$$\begin{aligned} \varphi_{j,n}(t) - 1 + \frac{t^2 \sigma_{j,n}^2}{2} &= \int \left(e^{itz} - 1 - itz + \frac{t^2 z^2}{2} \right) \mathbf{P}(\xi_{j,n} \in dz) \\ &= \int_{|z| < N\sigma_{j,n}} + \int_{|z| \geq N\sigma_{j,n}}. \end{aligned}$$

В силу неравенства $|e^{itz} - 1 - itz + t^2 z^2/2| \leq |t^3 z^3|/6$ и условия (2.3) при $|t| \leq \gamma$ находим (см. (2.3))

$$\int_{|z| < N\sigma_{j,n}} \leq \frac{N\gamma t^2 \sigma_{j,n}}{6} \int_{|z| < N\sigma_{j,n}} z^2 \mathbf{P}(\xi_{j,n} \in dz) \leq \frac{c_2 N \gamma t^2 \sigma_{j,n}^2}{6}.$$

Далее, в силу неравенства $|e^{itz} - 1 - itz| \leq t^2 z^2 / 2$ и условия [UI]

$$\int_{|z| > N\sigma_{j,n}} \leq t^2 \int_{|z| > N\sigma_{j,n}} z^2 \mathbf{P}(\xi_{j,n} \in dz) \leq t^2 \sigma_{j,n}^2 h(N).$$

Положим $\gamma = h(N)/N$ и для заданного $\varepsilon > 0$ выберем N настолько большим, что $h(N)(1 + c/6) \leq \varepsilon/2$. Тогда мы получим в результате, что при выбранных γ и N

$$\varphi_{j,n}(t) - 1 = -\frac{t^2 \sigma_{j,n}^2}{2} (1 + \varepsilon_{j,n}), \quad (2.14)$$

где $|\varepsilon_{j,n}| \leq \varepsilon$. Отсюда находим

$$\ln [1 - (\varphi_{j,n}(t) - 1)] = -\frac{t^2 \sigma_{j,n}^2}{2} (1 + r_{j,n}),$$

где $|r_{j,n}| \leq 2\varepsilon$, если γ и ε достаточно малы. Считая, не ограничивая общности, что $\varepsilon \leq 1/4$, мы получим, что

$$\ln \varphi_n(t) = \sum_{j=1}^n \ln [1 - (\varphi_{j,n}(t) - 1)] = -\frac{t^2 B_n^2}{2} (1 + r_n), \quad |r_n| \leq 2\varepsilon, \quad (2.15)$$

$$\operatorname{Re} \ln \varphi_n(t) \leq -\frac{t^2 B_n^2}{4}. \quad (2.16)$$

Полагая в (2.15) $t = u/B_n$ при фиксированном u , мы получим, что при $n \rightarrow \infty$ ($B_n \rightarrow \infty$; см. (2.4))

$$\ln \varphi_n\left(\frac{u}{B_n}\right) \rightarrow -\frac{u^2}{2}.$$

(Это вытекает также из классических доказательств центральной предельной теоремы, так как условие [UI] влечет за собой выполнение условия Линдеберга.) Таким образом,

$$\varphi_n\left(\frac{u}{B_n}\right) \rightarrow e^{-u^2/2}$$

и при $|u| < \gamma B_n$ в силу (2.16)

$$\left| \varphi_n\left(\frac{u}{B_n}\right) \right| \leq e^{-u^2/4}.$$

Так как, кроме того, $|\varphi(u/B_n)| \leq 1$ и $\varphi(u/B_n) \rightarrow 1$ при каждом фиксированном u и $n \rightarrow \infty$, то по теореме о мажорируемой сходимости получаем при $x = vB_n$, $t = u/B_n$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|u| < \gamma B_n} e^{-iuv} \varphi_n\left(\frac{u}{B_n}\right) \varphi\left(\frac{u}{B_n}\right) du = \int e^{-iuv - u^2/2} du \quad (2.17)$$

равномерно по v , так как интеграл в правой части равномерно непрерывен по v . Но интеграл в правой части (2.17) есть не что иное (с точностью до множителя $1/(2\pi)$), как результат применения формулы обращения к характеристической функции нормального закона, так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n I_1 = \sqrt{2\pi} e^{-v^2/2}. \quad (2.18)$$

Рассмотрим теперь интеграл I_2 :

$$|I_2| = \left| \int_{\gamma \leq |t| \leq 1/\theta} e^{-itx} \varphi_n(t) \varphi(t) dt \right| \leq \int_{\gamma \leq |t| \leq 1/\theta} |\varphi_n(t)| dt.$$

Здесь в силу условия [R] при любых фиксированных γ и θ

$$\sup_{\gamma \leq |t| \leq 1/\theta} |\varphi_n(t)| = O(B_n^{-1})$$

при $n \rightarrow \infty$ и, стало быть, равномерно по x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n |I_2| = 0.$$

Отсюда и из (2.18) следует, что при $x = vB_n$, $n \rightarrow \infty$, равномерно по v (по x) выполняется

$$I_1 + I_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{B_n} e^{-v^2/2} + o\left(\frac{1}{B_n}\right),$$

$$\mathbf{P}(Z_n \in \Delta[x]) = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi} B_n} e^{-x^2/(2B_n^2)} + o\left(\frac{1}{B_n}\right).$$

Доказательство того, что отсюда следует требуемое утверждение (2.12), содержится в [2] (см. также [8, § 8.7]). Теорема доказана.

2.3. Доказательства теорем 2.2, 2.3. Доказательства теорем 2.2, 2.3 отличаются от приведенного выше доказательства лишь в сторону упрощений.

Доказательство теоремы 2.2. В силу одного из условий а), б) характеристическая функция $\varphi_n(t)$ интегрируема и, стало быть, справедлива формула обращения

$$f_{S_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \varphi_n(t) dt.$$

Здесь интеграл в правой части «качественно» ничем не отличается от интеграла в правой части (2.13) при $\theta = 0$; надо лишь в части I_1 этого интеграла (по множеству $|t| < \gamma$) положить $\varphi(t) \equiv 1$, а в части I_2 (по множеству $|t| \geq \gamma$) интегрируемую функцию $\varphi(t)$ заменить на интегрируемую характеристическую функцию $\varphi_{(S_M)}(t)$, а функцию $\varphi_n(t)$ на $\prod_{j=M+1}^n \varphi_{j,n}(t)$. При такой замене остается следовать рассуждениям в доказательстве теоремы 2.1. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3. В условиях теоремы 2.3 формула обращения принимает вид

$$\mathbf{P}(S_n = x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx} \varphi_n(t) dt. \quad (2.19)$$

Здесь интеграл в правой части надо, как и прежде, разбить на подынтегралы I_1 и I_2 по областям $|t| \leq \gamma$ и $|t| \in [\gamma, \pi]$ соответственно и применить к ним рассуждения в доказательствах теорем 2.1, 2.2 при замене в этих рассуждениях условия [R] на условие [Z]. Подынтегральную функцию в (2.19) следует записать в виде $e^{-it(x-A_n)} \varphi_n^*(t)$, где $\varphi_n^*(t)$ есть характеристическая функция случайной величины $S_n - A_n$ с нулевым средним. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.3. Отметим, что отличие интегро-локальных и локальных теорем от интегральных состоит не только в появлении «структурных» условий [R], [Z], $[R_M]$. Оно состоит еще и в том, что классическое условие Линдеберга, присутствующее в центральной предельной теореме для сумм разнораспределенных случайных величин в схеме серий, здесь приходится заменять на более сильное условие [UI]. Иначе доказать приведенные выше утверждения не удастся.

3. Предельные теоремы для вероятностей больших отклонений.

3.1. Постановка задачи и основная интегро-локальная теорема. Мы сохраним в этом пункте все обозначения предыдущего раздела 2. Мы будем предполагать, что $\xi_{j,n}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1 и, кроме того, выполнено следующее моментное условие Крамера.

$[C]_{\lambda_0}$ При некотором $\lambda_0 > 0$

$$\psi_{j,n}(\lambda) := \mathbf{E} e^{\lambda \xi_{j,n}} < \infty \quad \text{при} \quad \lambda \in [0, \lambda_0], \quad \psi_{j,n}''(\lambda_0) < \infty.$$

Положим

$$\psi_n(\lambda) := \prod_{j=1}^n \psi_{j,n}(\lambda) = \varphi_n(-i\lambda), \quad A_{j,n}(\lambda) := \ln \psi_{j,n}(\lambda).$$

Так как функция

$$A(\lambda) := B_n^{-2} \sum_{j=1}^n A_{j,n}(\lambda) = B_n^{-2} \ln \psi_n(\lambda)$$

строго выпукла, то функция

$$A'(\lambda) = B_n^{-2} \frac{\psi_n'(\lambda)}{\psi_n(\lambda)} = B_n^{-2} \sum_{j=1}^n A_{j,n}'(\lambda) = B_n^{-2} \sum_{j=1}^n \frac{\psi_{j,n}'(\lambda)}{\psi_{j,n}(\lambda)}$$

строго возрастает на $[0, \lambda_0]$ в пределах от $A'(0) = A_n = 0$ (если $\mathbf{E} S_n = 0$) до $A'(\lambda_0)$. Следовательно, при

$$0 \leq \alpha := \frac{x}{B_n^2} \leq A'(\lambda_0)$$

уравнение

$$A'(\lambda) = \alpha \quad (3.1)$$

имеет единственное решение $\lambda(\alpha)$ (это есть функция, обратная к $A'(\lambda)$). Положим $\alpha_0 = A'(\lambda_0)$. Тогда $\lambda(\alpha)$ будет аналитической функцией на $(0, \alpha_0)$ и дифференцируемой на $[0, \alpha_0]$.

Сделаем теперь преобразование Крамера над распределениями $\xi_{j,n}$ и S_n и рассмотрим случайные величины $\xi_{j,n}^{(\lambda)}$ и $S_n^{(\lambda)}$, $\lambda \in [0, \lambda_0]$, с распределениями

$$\mathbf{P}(\xi_{j,n}^{(\lambda)} \in dz) = \frac{e^{\lambda z} \mathbf{P}(\xi_{j,n} \in dz)}{\psi_{j,n}(\lambda)}, \quad \mathbf{P}(S_n^{(\lambda)} \in dz) = \frac{e^{\lambda z} \mathbf{P}(S_n \in dz)}{\psi_n(\lambda)}. \quad (3.2)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{\mu \xi_{j,n}^{(\lambda)}} &= \frac{\psi_{j,n}(\mu + \lambda)}{\psi_{j,n}(\lambda)}, & \mathbf{E} \xi_{j,n}^{(\lambda)} &= \frac{\psi'_{j,n}(\lambda)}{\psi_{j,n}(\lambda)} = A'_{j,n}(\lambda), \\ \mathbf{E} (\xi_{j,n}^{(\lambda)})^2 &= \frac{\psi''_{j,n}(\lambda)}{\psi_{j,n}(\lambda)}, & (\sigma_{j,n}^{(\lambda)})^2 := \mathbf{D} \xi_{j,n}^{(\lambda)} &= \frac{\psi''_{j,n}(\lambda)}{\psi_{j,n}(\lambda)} - (A'_{j,n}(\lambda))^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Одно из основных предположений в этом разделе будет состоять в том, что преобразование Крамера мало меняет распределение величин $\xi_{j,n}$ в следующем смысле.

(i) Соотношения (2.3), (2.4) сохраняются, т.е. существуют постоянные $0 < c_1 < c_2 < \infty$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 \leq \bar{\sigma}_n^{(\lambda)} := \max_{1 \leq j \leq n} \sigma_{j,n}^{(\lambda)} \leq c_2, \quad (B_n^{(\lambda)})^2 := \sum_{j=1}^n (\sigma_{j,n}^{(\lambda)})^2 \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

при $n \rightarrow \infty$ и всех $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Нетрудно видеть, что для выполнения (3.4) достаточно предполагать выполнение этих соотношений лишь в «крайних» точках $\lambda = 0$ и $\lambda = \lambda_0$.

(ii) Сохраняются условия равномерной интегрируемости. Пусть $a_{j,n}^{(\lambda)} := \mathbf{E} \xi_{j,n}^{(\lambda)} = A'_{j,n}(\lambda)$, так что $a_{j,n}^{(0)} = a_{j,n} = \mathbf{E} \xi_{j,n}$.

[UI] $_{\lambda_0}$ Последовательность $((\xi_{j,n}^{(\lambda)} - a_{j,n}^{(\lambda)})/\sigma_{j,n}^{(\lambda)})^2$ равномерно интегрируема при всех $\lambda \in [0, \lambda_0]$ (т.е. справедливо (2.5) при замене $\xi_{j,n}$ на $\xi_{j,n}^{(\lambda)} - a_{j,n}^{(\lambda)}$ и $\sigma_{j,n}$ на $\sigma_{j,n}^{(\lambda)}$ соответственно).

(iii) Сохраняются структурные условия [R] и [Z]. Положим

$$\varphi_{j,n}^{(\lambda)}(t) := \frac{\psi_{j,n}(it + \lambda)}{\psi_{j,n}(\lambda)}, \quad q_{j,n}^{(\lambda)} = q_{j,n}^{(\lambda)}(\varepsilon, N) := \sup_{\varepsilon \leq t \leq N} |\varphi_{j,n}^{(\lambda)}(t)|. \quad (3.5)$$

Модифицированное условие $[R]$ будет иметь следующий вид.

$[R]_{\lambda_0}$ При любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $N < \infty$ выполняется

$$\sup_{\lambda \in [0, \lambda_0]} B_n^{(\lambda)} \prod_{j=1}^n q_{j,n}^{(\lambda)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

По-видимому, для выполнения $[UI]_{\lambda_0}$ и $[R]_{\lambda_0}$ также достаточно выполнения соответствующих соотношений лишь в «крайних точках» $\lambda = 0$ и $\lambda = \lambda_0$ (или даже в одной из крайних точек).

Мы можем сформулировать теперь основное интегро-локальное утверждение. Введем в рассмотрение функцию уклонений

$$\Lambda(\alpha) := \sup_{\lambda} (\alpha\lambda - A(\lambda)) = \alpha\lambda(\alpha) - A(\lambda(\alpha)).$$

Теорема 3.1. Пусть $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{n,n}$ — независимые случайные величины, $E \xi_{j,n} = 0$, $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_{j,n}$. Предположим, что выполнено условие Крамера $[C]_{\lambda_0}$ и условия (3.4), $[UI]_{\lambda_0}$, $[R]_{\lambda_0}$. Тогда, если $\Delta = \Delta_n \rightarrow 0$ достаточно медленно при $n \rightarrow \infty$ и $x = \alpha B_n^2$, то

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x]) = \frac{\Delta e^{-B_n^2 \Lambda(\alpha)}}{\sqrt{2\pi B_n^{(\lambda(\alpha))}}} (1 + o(1)), \quad (3.6)$$

где $(B_n^{(\lambda)})^2$ определено в (3.4), а остаточный член $o(1)$ равномерен по $\alpha \in [0, \alpha_0]$.

Кроме того, справедливо представление

$$\Lambda(\alpha) = \int_0^\alpha \lambda(v) dv. \quad (3.7)$$

З а м е ч а н и е 3.1. Отметим, что в сформулированных выше условиях существует произвол при выборе масштаба, в котором мы измеряем нормированные большие уклонения. В теореме 3.1 мы выбрали «традиционный» масштаб и измеряем большие уклонения в терминах дисперсий B_n^2 сумм S_n и положили нормированные большие уклонения равными $\alpha = x/B_n^2$. Однако следует иметь в виду, что граница уклонений x , при которых доступно изучение вероятностей больших уклонений с помощью преобразования Крамера, определяется (см. ниже доказательство теоремы 3.1) значением

$$\frac{\psi'_n(\lambda)}{\psi_n(\lambda)} = \sum_{j=1}^n \frac{\psi'_{j,n}(\lambda)}{\psi_{j,n}(\lambda)} =: L(\lambda) \quad (3.8)$$

при $\lambda = \lambda_0$ и это значение совсем не обязательно будет иметь тот же порядок роста, что и B_n^2 . Поэтому в тех случаях, когда x сравнимо с $L(\lambda_0)$, возможно, более естественно рассматривать нормированные уклонения

$$\beta := \frac{x}{L(\lambda_0)} \leq 1.$$

В этом случае для формулировки результата нам понадобится решение $\mu(v)$ уравнения

$$\frac{L(\lambda)}{L(\lambda_0)} = v, \quad v \leq 1, \quad (3.9)$$

и функция уклонений

$$M(\beta) = \sup_{\lambda} \left(\beta\lambda - \frac{L(\lambda)}{L(\lambda_0)} \right) = \beta\mu(\beta) - \frac{L(\mu(\beta))}{L(\lambda_0)}. \quad (3.10)$$

Аналог теоремы 3.1 в терминах нового масштаба будет иметь следующий вид.

Теорема 3.1А. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и $\beta = x/L(\lambda_0) \leq 1$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x]) = \frac{\Delta e^{-L(\lambda_0)M(\beta)}}{\sqrt{2\pi} B_n^{(\mu(\beta))}} (1 + o(1)),$$

где функции $L(\lambda)$, $M(\beta)$ определены в (3.8), (3.10), остаточный член $o(1)$ равномерен по $\beta \in [0, 1]$.

Кроме того, справедливо представление

$$M(\beta) = \int_0^\beta \mu(v) dv.$$

Нетрудно видеть, что $\mu(\beta) = \lambda(\alpha)$ и $L(\lambda_0)M(\beta) = B_n^2 \Lambda(\alpha)$. Последнее значение можно рассматривать также как функцию уклонений самой суммы S_n в точке $x \leq L(\lambda_0)$, т.е. как $\sup_{\lambda} \{\lambda x - \ln \psi_n(\lambda)\}$. Точка $\lambda(\alpha)$ является инвариантом относительно выбора масштаба.

Доказательство теоремы 3.1А ничем не отличается от доказательства теоремы 3.1, приведенного ниже.

Доказательство теоремы 3.1. В нижеприведенных доказательствах будем иногда опускать для краткости индекс n , указывающий на зависимость от номера серий, и обозначать $\psi(\lambda) := \prod_{j=1}^n \psi_j(\lambda)$. Положим

$$S_n(\lambda) := \sum_{j=1}^n \xi_j^{(\lambda)}.$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. При выполнении условий теоремы 3.1

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x]) = e^{-B_n^2 \Lambda(\alpha)} \int_0^\Delta e^{-\lambda(\alpha)z} \mathbf{P}(S_n(\lambda(\alpha)) - x \in dz). \quad (3.11)$$

Доказательство. Преобразование Лапласа над распределением суммы $S_n(\lambda)$ равно

$$\mathbf{E} e^{\mu S_n(\lambda)} = \prod_{j=1}^n \frac{\psi_j(\lambda + \mu)}{\psi_j(\lambda)}.$$

Но такому же выражению в силу (3.2) равно $\mathbf{E} e^{\mu S_n^{(\lambda)}}$. Поэтому распределения $S_n(\lambda)$ и $S_n^{(\lambda)}$ совпадают. Стало быть, в силу (3.2) $\mathbf{P}(S_n(\lambda) \in dz) = e^{\lambda z} \mathbf{P}(S_n \in dz)/\psi(\lambda)$. Отсюда при $\lambda = \lambda(\alpha)$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n \in dz) &= e^{-\lambda(\alpha)z + B_n^2 A(\lambda(\alpha))} \mathbf{P}(S_n(\lambda(\alpha)) \in dz) \\ &= e^{-B_n^2 \Lambda(\alpha) + \lambda(\alpha)(x-z)} \mathbf{P}(S_n(\lambda(\alpha)) \in dz). \end{aligned}$$

Интегрируя в пределах от x до $x + \Delta$ и делая замену $z - x = v$, мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n \in \Delta[x]) &= e^{-B_n^2 \Lambda(\alpha)} \int_x^{x+\Delta} e^{\lambda(\alpha)(x-z)} \mathbf{P}(S_n(\lambda(\alpha)) \in dz) \\ &= e^{-B_n^2 \Lambda(\alpha)} \int_0^\Delta e^{-\lambda(\alpha)v} \mathbf{P}(S_n(\lambda(\alpha)) - x \in dv). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3.1. Воспользуемся леммой 3.1, в которой в качестве $\Delta = \Delta_n$ возьмем величину, зависящую от n и сходящуюся к 0 достаточно медленно при $n \rightarrow \infty$. Так как $\lambda(\alpha) \leq \lambda_0$, то $\Delta_n \lambda(\alpha) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и под знаком интеграла в (3.11) $e^{-\lambda(\alpha)z} \rightarrow 0$ равномерно по $z \in [0, \Delta]$ и, следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta_n[x]) = e^{-B_n^2 \Lambda(\alpha)} \mathbf{P}(S_n(\lambda(\alpha)) - x \in \Delta[0])(1 + o(1)), \quad (3.12)$$

где остаточный член равномерен по $\alpha \in [0, \alpha_0]$. Покажем теперь, что к сумме $S_n(\lambda(\alpha)) - x$ применима теорема 2.1. Действительно, так как

$$x = \alpha B_n^2 \equiv B_n^2 A'(\lambda(\alpha)) = \sum_{j=1}^n A'_j(\lambda(\alpha)) = \sum \mathbf{E} \xi_j^{(\lambda(\alpha))},$$

то

$$S_n(\lambda(\alpha)) - x = \sum (\xi_j^{(\lambda(\alpha))} - \mathbf{E} \xi_j^{(\lambda(\alpha))})$$

есть сумма случайных величин с нулевыми средними. Так как условия (3.4), $[\mathbf{U}]_{\lambda_0}$, $[\mathbf{R}]_{\lambda_0}$ влекут за собой выполнение условий теоремы 2.1 применительно к случайным величинам $\xi_j^{(\lambda(\alpha))} - \mathbf{E} \xi_j^{(\lambda(\alpha))}$, то при любом фиксированном $\Delta > 0$ будем в (3.12) иметь

$$\mathbf{P}(S_n(\lambda(\alpha)) - x \in \Delta[x]) = \frac{\Delta}{B_n^{(\lambda(\alpha))}} \phi(0) + o\left(\frac{1}{B_n^{(\lambda(\alpha))}}\right). \quad (3.13)$$

Ясно, что это соотношение сохранится и для $\Delta = \Delta_n$, где $\Delta_n \rightarrow 0$ достаточно медленно при $n \rightarrow \infty$. Подставляя (3.13) при таких $\Delta = \Delta_n$ в (3.12), мы получим первое утверждение теоремы.

Равенство (3.7) вытекает из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \Lambda(v) &= v\lambda(v) - A(\lambda(v)), \\ \Lambda'(v) &= \lambda(v) + v\lambda'(v) - A'(\lambda(v))\lambda'(v) \equiv \lambda(v). \end{aligned}$$

Так как $\Lambda(0) = \lambda(0) = 0$, то, интегрируя полученное равенство в пределах от 0 до α , мы получим (3.7).

Теорема доказана.

3.2. Умеренно большие отклонения. Если $x = o(B_n^2)$ ($\alpha = o(1)$), то для правой части в (3.6) можно найти явное выражение (в терминах семиинвариантов величин ξ_j ; мы опять будем писать для краткости ξ_j вместо $\xi_{j,n}$) с помощью отрезка так называемого ряда Крамера. Для этого нам понадобится дополнительное условие. Чтобы его сформулировать, введем в рассмотрение кумулянты γ_{kj} порядка k (семиинварианты) случайных величин ξ_j (т.е. коэффициенты разложения по степеням λ функций $A_j(\lambda) = \sum_{k=1}^s \gamma_{kj} \lambda^k / k! + o(\lambda^s)$ при $\lambda \rightarrow 0$, если $\mathbf{E} |\xi_j^s| < \infty$). Нетрудно проверить, что (см., например, [6])

$$\gamma_{1j} = \mathbf{E} \xi_j = 0, \quad \gamma_{2j} = \mathbf{D} \xi_j = \sigma_j^2, \quad \gamma_{3j} = \mathbf{E} \xi_j^3 \quad \text{и т.д.}$$

Если существуют $s \geq 2$ конечных моментов величин ξ_j , то при $\lambda \rightarrow 0$ и всех $r \leq s$ справедливы представления

$$A'_j(\lambda) = \sum_{k=2}^r \frac{\gamma_{kj} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} + o(\lambda^{r-1}) \quad \text{при всех } r \leq s. \quad (3.14)$$

Положим

$$\Gamma_k := B_n^{-2} \sum_{j=1}^n \gamma_{kj},$$

так что

$$\Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = 1, \quad \Gamma_3 = B_n^{-2} \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \xi_j^3 \quad \text{и т.д.}$$

Тогда при каждом n вместе с (3.14) при $\lambda \rightarrow 0$ справедливы представления

$$A'(\lambda) = \sum_{k=2}^r \frac{\Gamma_k \lambda^{k-1}}{(k-1)!} + o(\lambda^{r-1}), \quad r \leq s. \quad (3.15)$$

Упомянутое выше дополнительное условие имеет следующий вид.

[D] *Остаточные члены $o(\lambda^{r-1})$ в (3.15) при всех $r \leq s$ равномерны по n .*

Нетрудно видеть, что условие [D] эквивалентно равномерной по n непрерывности s -й производной

$$A^{(s)}(\lambda) = (\ln \psi_n(\lambda))^{(s)} B_n^{-2}$$

в точке $\lambda = 0$.

Достаточным для выполнения [D] является следующее условие: все ξ_j имеют конечные моменты порядка $s+1$ и, кроме того, при всех $\lambda \in [0, \delta]$ и достаточно малом $\delta > 0$ производная $A^{(s+1)}(\lambda)$ равномерно

по n ограничена. Достаточность этого условия следует из того, что при всех $\lambda \in [0, \delta]$, $r \leq s$

$$A'(\lambda) = \sum_{k=2}^r \frac{\Gamma_k \lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{A^{(r+1)}(\tilde{\lambda}) \lambda^r}{r},$$

где $\tilde{\lambda} \in [0, \lambda] \subset [0, \delta]$ и $A^{(r+1)}(\tilde{\lambda}) \lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ равномерно по n .

Нетрудно видеть, что если в примере 2.1 предположить, что $g(j) \leq 1$ и $\psi(\lambda) := \mathbf{E} e^{\lambda \zeta}$ удовлетворяет условиям $[C]_{\lambda_0}$, $\mathbf{E} |\zeta|^{s+1} < \infty$, то будет выполнено также и условие $[D]$. Если $g(j)$ возрастают, то условие $[D]$ также будет выполнено, но применительно к случайным величинам $\xi_{j,n}^* = \xi_{n-j+1}/g(n)$.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.2. Пусть все ξ_j имеют $s \geq 2$ конечных моментов. Тогда, если выполнено условие $[D]$, то функция $\Lambda(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$ допускает представление

$$\Lambda(\alpha) = \sum_{k=2}^s \Lambda_k \alpha^k + o(\alpha^s), \quad (3.16)$$

где остаточный член равномерен по n , алгоритм отыскания коэффициентов Λ_k содержится в доказательстве. В частности,

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \Lambda_3 = -\frac{\Gamma_3}{6} \quad (\text{при } s \geq 3), \quad \Lambda_4 = \frac{1}{8} \left(\Gamma_3^2 - \frac{\Gamma_4}{3} \right) \quad (\text{при } s \geq 4). \quad (3.17)$$

Алгоритм отыскания Λ_k (в несколько иной форме) содержится также в [6]. Там же можно найти явный вид Λ_5 .

Доказательство леммы 3.2. Получим сначала асимптотическое представление для функции $\lambda(\alpha)$, обратной к $A'(\lambda)$. Она является решением уравнения $A'(\lambda) = \alpha$, которое при $\lambda \rightarrow 0$ мы запишем в виде

$$\sum_{k=2}^s \frac{\Gamma_k \lambda^{k-1}}{(k-1)!} + o(\lambda^{s-1}) = \alpha. \quad (3.18)$$

Так как функция $A'(\lambda)$ непрерывно дифференцируема $s-1$ раз и $\Gamma_1 = 1$, то в силу известных теорем об обратных функциях функция $\lambda(\alpha)$ (она удовлетворяет тождеству $A'(\lambda(\alpha)) \equiv \alpha$) обладает теми же свойствами гладкости, т.е. $s-1$ раз непрерывно дифференцируема и допускает представление

$$\lambda(\alpha) = \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k \alpha^k + o(\alpha^{s-1}). \quad (3.19)$$

Подставляя $\lambda = \lambda(\alpha)$ в форму (3.19) в уравнение (3.18) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях α в правой и левой частях (3.18),

мы получим $s-1$ рекуррентное уравнение для коэффициентов λ_k , откуда следует, в частности, что

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{\Gamma_3}{2} \quad (\text{при } s \geq 3), \quad \lambda_3 = \frac{\Gamma_3^2}{2} - \frac{\Gamma_4}{6} \quad (\text{при } s \geq 4) \quad (3.20)$$

и т.д. Интегрируя по α представление (3.19), мы получим в силу (3.7) требуемое представление (3.16), в котором

$$\Lambda_k = \frac{\lambda_{k-1}}{k}, \quad k \geq 2.$$

Утверждение о равномерности остаточного члена в (3.19) вытекает из равномерности для всех $r \leq s$ остаточных членов в соотношениях (3.18) при замене в них s на r (см. (3.15) и условие [D]). Эта последняя равномерность означает, что при $\lambda \rightarrow 0$ и всех $r \leq s$

$$\sum_{k=r+1}^s |\Gamma_k| \lambda^{k-1} = o(|\Gamma_r| \lambda^r)$$

равномерно по n . Эти соотношения позволяют оценить оставшиеся (не использованные при составлении уравнений для λ_k) члены разложения в (3.18) при подстановке туда (3.19), а вместе с ними и коэффициент ε при α^{s-1} в представлении остаточного члена $o(\alpha^{s-1})$ в (3.19) в виде $\varepsilon \alpha^{s-1}$. Оценка для ε оказывается равномерно по n малой, если равномерно по n мал коэффициент δ в представлении в виде $\delta \lambda^{s-1}$ остаточного члена в (3.18). При этом надо использовать тот факт, что $\lambda(\alpha) \sim \alpha$ равномерно по n при $\alpha \rightarrow 0$ (см. условие [D] и уравнение (3.18) при $s = 2$). Лемма доказана.

Вернемся к вопросу об описании асимптотики вероятностей умеренно больших отклонений, когда $x = o(B_n^2)$. Так как $B_n^{(\lambda(\alpha))} \sim B_n$ при $\alpha \rightarrow 0$ ($\lambda(\alpha) \rightarrow 0$), $n \rightarrow \infty$, то из теоремы 3.1 и леммы 3.2 вытекает следующий результат.

Теорема 3.2. Пусть $\max_j \mathbf{E} |\xi_{j,n}|^s < \infty$, выполнены условие [D] и условия теоремы 3.1 при каком-нибудь $\lambda_0 > 0$. Тогда при $\alpha = x/B_n^2 = o(1)$ справедливо представление (3.6), в котором $B_n^{(\lambda(\alpha))}$ следует заменить на B_n , а $\Lambda(\alpha)$ — на правую часть в (3.16) с коэффициентами Λ_k , определенными в (3.17). В частности, при $s = 3$, $\alpha^3 \leq c B_n^{-2}$ выполняется

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x]) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} B_n} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2B_n^2} + \frac{\Gamma_3 x^3}{6B_n^6} \right\}.$$

При $s = 4$, $\alpha^4 \leq c B_n^{-2}$, $c = \text{const} > 0$ выполняется

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x]) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} B_n} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2B_n^2} + \frac{\Gamma_3 x^3}{6B_n^4} + \frac{\Lambda_4 x^4}{B_n^6} \right\}$$

(Λ_4 определено в (3.17)).

3.3. Локальные теоремы. Из п. 3.1 видно, что аналогичным образом можно получить локальные теоремы в области больших уклонений. Чтобы сформулировать локальные теоремы, нам понадобятся модификации условий $[R_M]$, $[Z]$ для преобразований Крамера над величинами $\xi_j = \xi_{j,n}$ (ср. с условиями $[R]$ и $[R]_{\lambda_0}$). Эти модификации имеют следующий вид.

$[R_M]_{\lambda_0}$ Существует число $M \geq 1$ такое, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\lambda \in [0, \lambda_0]} B_n^{(\lambda)} \sum_{j=M+1}^n q_{j,n}^{(\lambda)}(\varepsilon, \infty) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $q_{j,n}^{(\lambda)}(\varepsilon, N)$ определены в (3.5).

$[Z]_{\lambda_0}$ При любом фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\lambda \in [0, \lambda_0]} B_n^{(\lambda)} \prod_{j=1}^n q_{j,n}^{(\lambda)}(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Мы можем сформулировать теперь локальные теоремы.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия (3.4), $[C]_{\lambda_0}$, $[UI]_{\lambda_0}$, $[R]_{\lambda_0}$ и хотя бы одно из условий а) и б) теоремы 2.2 применительно к величинам $\xi_j^{(\lambda(\alpha))}$. Тогда распределение сумм S_n имеет при $n \geq M$ плотность f_{S_n} , для которой равномерно по x справедливо при $n \rightarrow \infty$ представление

$$f_{S_n}(x) = \frac{e^{-B_n^2 \Lambda(\alpha)}}{\sqrt{2\pi} B_n^{(\lambda(\alpha))}} (1 + o(1)), \quad \alpha = \frac{x}{B_n^2}.$$

При рассмотрении арифметического случая под нормированным уклонением α мы будем понимать отношение $\alpha = (x - A_n)/B_n^2$, $A_n = \mathbf{E} S_n$, а под функцией $\Lambda(\alpha)$ — функцию уклонений, построенную по центрированным случайным величинам $\xi_{j,n} - a_{j,n}$, $a_{j,n} = \mathbf{E} \xi_{j,n}$.

Теорема 3.4. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 кроме условия $a_{j,n} = 0$, а условие $[R]_{\lambda_0}$ заменено на $[Z]_{\lambda_0}$. Тогда при целочисленных x и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(S_n = x) = \frac{e^{-B_n^2 \Lambda(\alpha)}}{\sqrt{2\pi} B_n^{(\lambda(\alpha))}} (1 + o(1)), \quad \alpha = \frac{x - A_n}{B_n^2}.$$

Доказательства теорем 3.3, 3.4 отличаются от доказательства теоремы 3.1 в основном упрощениями. Читатель может получить их с помощью теорем 2.2, 2.3 соответственно путем использования преобразования Крамера — так же, как это делалось при доказательстве теоремы 3.1.

Применительно к теоремам 3.3, 3.4 сохраняет свою силу замечание 3.1.

Если воспользоваться леммой 3.2, то аналогично предыдущему можно при выполнении условия [D] получить следствия теорем 3.2, 3.3 для уклонений $x = o(B_n^2)$ (ср. с теоремой 3.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shepp L. A. A local limit theorem. — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, p. 419–423.
2. Stone C. A local limit theorem for nonlattice multi-dimensional distribution function. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, p. 546–551.
3. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.–Л.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
4. Stone C. On local and ratio limit theorems. — Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Berkeley, 1965/66). V. II: Contributions to Probability Theory. Part 2. Berkeley: Univ. California Press, 1967, p. 217–224.
5. Боровков А. А., Могильский А. А. Интегро-локальные теоремы для сумм независимых случайных векторов в схеме серий. — Матем. заметки, 2006, т. 79, № 4, с. 505–521.
6. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
7. Саулис Л., Статулявичус В. Предельные теоремы о больших уклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989, 206 с.
8. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009, 652 с.

Поступила в редакцию
21.I.2009

Исправленный вариант
23.III.2009