Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова, О верхней оценке абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 4, 671–695

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:51:52

© 2009 г. КОРОЛЕВ В. Ю.*, ШЕВЦОВА И. Г.*

**О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ АБСОЛЮТНОЙ ПОСТОЯННОЙ В
НЕРАВЕНСТВЕ БЕРРИ–ЭССЕЕНА¹⁾**

В статье изложена история поиска безусловных и условных верхних оценок абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Описаны вычислительные процедуры. Приведены новые оценки, из которых следует, что абсолютная постоянная в классическом неравенстве Берри–Эссеена не превосходит 0.5129.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, неравенство Берри–Эссеена, неравенство сглаживания.

1. История задачи. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ с функцией распределения F , $\mathbf{E} X_1 = 0$, $\mathbf{D} X_1 = \mathbf{E} X_1^2 = \sigma^2 > 0$ и $\mathbf{E} |X_1|^3 = \beta^3 < \infty$. Для натурального $n \geq 1$ положим

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Функцию распределения случайной величины S_n и стандартную нормальную функцию распределения соответственно обозначим $F_n(x)$ и $\Phi(x)$.

В самом начале XX века А. М. Ляпунов [36], [37] доказал вариант центральной предельной теоремы для независимых случайных величин, ныне известный как *теорема Ляпунова*, согласно которому в сделанных выше предположениях

$$\Delta_n \equiv \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

а также привел первую оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме. Оценка Ляпунова имеет следующий вид: существует

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: vkorolev@comtv.ru; ishevtsova@cs.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 08-01-00563, 08-01-00567, 08-07-00152 и 09-07-12032-офи-м, Федеральным агентством по науке и инновациям, проект МК-654.2008.1, а также Федеральным агентством по образованию, государственные контракты № П-1181 и П-958.

не зависящая от n функция ψ аргументов σ и β такая, что для достаточно больших n справедливо неравенство

$$\Delta_n < \psi \ln n / \sqrt{n}. \quad (1)$$

Г. Крамер [29], [30], во-первых, показал, что в (1) функция ψ имеет вид $C \cdot \beta^3 / \sigma^3$, где C — абсолютная конечная положительная константа, причем можно положить $C = 3$ (также см. [10]), и во-вторых, с помощью оценивания остаточных членов в разложении Эджворта для F_n доказал, что в (1) при определенных условиях множитель $\ln n$ можно опустить.

Спустя почти пятнадцать лет после работ Крамера Э. Берри [28] и независимо от него К.-Г. Эссеен [31] показали, что в (1) логарифмический множитель можно опустить без каких бы то ни было дополнительных ограничений на распределение F или на число слагаемых n . Результат, полученный Берри и Эссееном, ныне известный как знаменитое *неравенство Берри–Эссеена*, формулируется так. Существует абсолютная конечная положительная константа C_0 такая, что при всех $n \geq 1$

$$\Delta_n \leq C_0 \cdot \frac{\beta^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}. \quad (2)$$

В дальнейшем для упрощения обозначений будем считать, что $\sigma^2 = 1$.

История отыскания значения абсолютной константы C_0 в неравенстве Берри–Эссеена интересна, богата результатами и коллизиями. Так, сам Э. Берри утверждал, что $C_0 \leq 1.88$, однако, как обнаружил немного позднее Сюй [34], вычисления Берри содержали неточность.

В то же время К.-Г. Эссеен, не демонстрируя никаких вычислений, указал, что $C_0 \leq 7.59$ [31]. Берри и Эссеен использовали комбинацию метода характеристических функций, предложенного Ляпуновым, и метода композиций, которая реализована у них в виде так называемого *неравенства сглаживания*. Если распределение слагаемых F является достаточно гладким, переход к характеристическим функциям никакой сложности не представляет и может быть осуществлен при помощи формулы обращения. Если же распределение F не является гладким (например, решетчато), то использование формул обращения напрямую практически невозможно, так как возникающие при этом интегралы являются расходящимися. Для таких распределений очень важна процедура сглаживания, которую В. Феллер [15, с. 613–614], назвал «обходным путем», позволяющим оценивать равномерное расстояние $\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|$ через расстояние между соответствующими сглаженными функциями распределения $\sup_x |(F_n - \Phi) * H(x)|$ (в этом суть метода композиций); если H имеет при этом финитное (или хотя бы интегрируемое) преобразование Фурье, то последняя величина мажорируется некоторым интегралом от разности соответствующих характеристических функций, что и

позволяет для получения итоговой оценки использовать метод характеристических функций.

Несколько лет спустя после работ Берри и Эссеена Х. Бергстрем при помощи метода композиций показал, что $C_0 \leq 5.8$ [26], но в сноске в самом конце своей работы заметил, что мажоранта для C_0 может быть снижена до 3.2, если принять во внимание равенство нулю третьего момента нормального распределения. В 1949 г. он же опубликовал полное доказательство оценки $C_0 \leq 4.8$, справедливой, однако, и в более общем случае разнораспределенных случайных величин и векторов [27].

К. Такано [42], [43] получил оценку $C_0 \leq 2.031$. Статьи Такано, опубликованные в малодоступных источниках (к тому же работа [42] опубликована на японском языке), выпали из поля зрения многих исследователей, так как в нескольких более поздних публикациях приводятся немного худшие оценки. В частности, в статье Эссеена [32] работы Такано не упомянуты, но отмечено, что значение C_0 было снижено Р. Хоффманом (R. Hoffman) в неопубликованной работе до 2.89.

В работе Д. Л. Уоллеса [44] вычисления Берри исправлены и приведена оценка $C_0 \leq 2.05$ (это значение, полученное Уоллесом, упоминает и В. Феллер [15]). Затем Уоллес получил более точную оценку $C_0 \leq 1.98$ [45], но ссылок на работы Такано нет ни у Уоллеса, ни у Феллера.

В диссертации С. Цаля [46] и ее последовавшей версии для печати [47] работа Такано [42] уже цитируется, но опосредованно — по статье Садао Икеды [35], в которой вычисления Берри и Уоллеса уточняются для больших значений β^3 . В частности, для $\beta^3 = \sqrt{6} \approx 2.45$ Икеда приводит значение $C_0 = 1.78$. Сама работа Цаля интересна тем, что в ней использована несколько иная структура функции ψ и доказано неравенство

$$\Delta_n \leq C_0 \cdot \frac{\tilde{\beta}^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}, \quad (3)$$

где

$$\tilde{\beta}^3 = \begin{cases} \beta^3, & \text{если } \beta^3 \geq 3/\sqrt{2}, \\ \frac{1}{0.7804 - 0.1457\beta^3}, & \text{если } \beta^3 < 3/\sqrt{2}, \end{cases}$$

с $C_0 = 0.651$. Поскольку при $\beta^3 \geq 3/\sqrt{2}$ правые части (2) и (3) совпадают, то, согласно (3), если $\beta^3 \geq 3/\sqrt{2}$, то в (2) $C_0 \leq 0.651$. Результаты Цаля и Икеды можно считать одними из первых «условных» оценок константы в неравенстве Берри–Эссеена. Следует отметить, что в «пересчете» на функцию ψ , использованную в (2), из результатов работ [46], [47] вытекает, что при любом значении β^3 в (2) $C_0 \leq 1.03$ — рекордное значение для того времени.

Вычислению наименьшего возможного значения абсолютной постоянной C_0 придавал большое значение А. Н. Колмогоров. В работе [7] он высказал предположение о том, что $C_0 = 1/\sqrt{2\pi}$. К сожалению, это предположение оказалось не совсем точным: в 1956 г., решая несколько иную задачу, К.-Г. Эсseen [32] показал, что в неравенстве (2) постоянная C_0 не может быть меньше, чем

$$C_E = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = 0.409732 \dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 0.010789 \dots$$

Этот результат получен как следствие решения задачи об асимптотически правильной константе в неравенстве Берри–Эссеена, т.е. наименьшей постоянной C_* , обеспечивающей асимптотическую оценку

$$\Delta_n \leq C_* \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Эсseen решил эту задачу для случая, когда остаточный член $o(n^{-1/2})$ не обязан обладать свойством равномерности по F , а именно для C_* он предложил выражение

$$C_* = \sup_F \limsup_{n \rightarrow \infty} \Delta_n \sqrt{n} / \beta^3,$$

где супремум берется по всем распределениям F с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным абсолютным третьим моментом β^3 , и показал, что $C_* = C_E$. Поскольку $C_0 \geq C_*$, тем самым была найдена нижняя оценка для C_0 . Однако, если распределение суммы независимых случайных величин аппроксимировать не стандартным нормальным законом, но «наилучшим» нормальным распределением, то, как показал Б. А. Рогозин [14],

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{a,b} \frac{\sqrt{n}}{\beta^3} \sup_x \left| F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{b}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq 0.3990.$$

Тем самым предположение Колмогорова было в определенном смысле подтверждено.

В 1966 г. В. М. Золотарев независимо от Цаля получил оценку $C_0 < 1.301$ [5]. Затем верхняя оценка для C_0 была последовательно снижена В. М. Золотаревым до $C_0 < 0.82$ [48], П. Ван Биком до $C_0 < 0.7882$ [22], [23] и И. С. Шигановым до $C_0 \leq 0.7655$ [21].

Следует отметить, что в пяти последних работах использовался один и тот же подход, предложенный еще в 1966 г. В. М. Золотаревым (описание этого подхода можно найти, например, в монографии [6]) и основанный на неравенстве сглаживания, доказанном в работе [4]. Сформулируем это неравенство в более общем виде, доказанном и использованном И. Г. Шевцовой.

Для вещественной абсолютно интегрируемой функции $p(x)$, $x \in \mathbf{R}$, обозначим через $\|p\|$ и $\hat{p}(t)$ соответственно ее норму и образ Фурье:

$$\|p\| = \int_{-\infty}^{\infty} |p(x)| dx, \quad \hat{p}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Пусть Λ — класс всех непрерывных вещественных функций $p \in L_1$, таких, что $\hat{p} \in L_1$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1.$$

Обозначим

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x), \quad r_n(t) = |f_n(t) - e^{-t^2/2}|, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Для $p \in \Lambda$ и произвольных положительных x и y введем функции

$$V_p(x) = \frac{1}{2} \int_{|u| < x} p^+(u) du, \quad M_p(x) = \frac{1}{2} \int_{|u| < x} up^+(u) du,$$

$$p^+(u) = \max\{p(u), 0\}, \quad Q_p(y) = Q_p(y, r) = \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \left| \hat{p}\left(\frac{t}{y}\right) \right| \cdot \frac{r_n(t)}{t} dt.$$

Несложно видеть, что для любого $p \in \Lambda$ множество всех корней уравнения

$$2V_p(x) - \|p\| = 0, \quad x > 0,$$

имеет конечную точную верхнюю грань, которую мы обозначим χ_p , при этом $2V_p(x) - \|p\| > 0$ для всех $x > \chi_p$.

Лемма 1 [19]. Для любого $n \geq 1$, любого распределения F , любых $p \in \Lambda$, $x > \chi_p$ и $y > 0$

$$\Delta_n \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi} y} \cdot \frac{xV_p(x) - M_p(x) + Q_p(y, r)}{4V_p(x) - \|p\|} \equiv I(x, y, p, r).$$

В работах самого Золотарева в неравенстве сглаживания, как и в аналогичных неравенствах в более ранних работах Берри, Эссеена и Бергстрема, использовалось ядро $p(x)$, являющееся плотностью некоторого симметричного распределения вероятностей, при этом в качестве сглаживающего распределения Берри и Эссеен использовали плотность с характеристической функцией $\hat{p}(t) = (1 - |t|)^+$, а Бергстрем — нормальный закон. В работах Цаля отмечено, что условие знакопостоянства не является необходимым, и предложено использовать знакопеременные несимметричные ядра, однако само неравенство сглаживания (в том виде, в котором использовали его Эссеен и Бергстрем) Цалем выписано не было. В диссертации Ван Бика, не содержащей ссылок на работы

Цаля, неравенство сглаживания Золотарева обобщено на знакопеременные симметричные ядра, и описан алгоритм конструирования оптимальной последовательности ядер. Шиганов по сути использовал метод Ван Бика, но с более сложными ядрами, допускающими многомерную параметризацию с целью последующей оптимизации. Одновременно с работами Ван Бика была опубликована статья В. И. Паулаускаса [12] (также не имеющая ссылок на работы Цаля), в которой доказан аналог неравенства Золотарева для знакопостоянных несимметричных ядер. Хотя в конце работы Паулаускаса отмечено, что доказанное в ней неравенство сглаживания в первую очередь предназначено для уточнения константы в неравенстве Берри-Эссеена, для указанных целей, насколько нам известно, это неравенство, к сожалению, никем никогда не применялось. В работе [19] неравенство сглаживания Золотарева обобщено на знакопеременные несимметричные ядра. Неравенство сглаживания Шевцовой (см. лемму 1) одновременно обобщает (а стало быть, уточняет) неравенства Ван Бика и Паулаускаса.

В работах В. Бенткуса [24], [25] есть упоминание об устном сообщении В. М. Золотарева о том, что, судя по всему, подход, предложенный Золотаревым, в том виде, как его использовали сам Золотарев, Ван Бик и Шиганов, близок к исчерпанию и не пригоден для получения оценок константы C_0 , меньших 0.75.

Обозначим

$$\ell = \frac{\beta^3}{\sqrt{n}}, \quad C_0(\ell) = \sup \frac{\Delta_n}{\ell},$$

где супремум берется по всем n и всем распределениям F с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным третьим моментом с фиксированным отношением Ляпунова ℓ . При этом наименьшее возможное значение константы C_0 в (2) имеет вид

$$C_0^* = \sup_{\ell} C_0(\ell).$$

Вычислительные процедуры, использованные Золотаревым, Ван Биком и Шигановым, были ориентированы на то, что наибольшие значения функции $C_0(\ell)$ достигаются при $\ell \rightarrow 0$.

Однако еще в 1975 г. Х. Правитц [41] получил «условные» оценки точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых (необязательно одинаково распределенных случайных величин) и показал, что при условии

$$\frac{\beta^3 + 1}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \left(\frac{n-1}{n} \right)^{3/2}, \quad (4)$$

имеет место оценка

$$\Delta_n \leq 0.5152 \cdot \ell. \quad (5)$$

Чтобы выразить условие (4) в терминах классической ляпуновской дроби ℓ , можно заметить, что в силу неравенства $\beta^3 \geq 1$ для (4) достаточно, чтобы

$$\ell \equiv \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} \leq 0.1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{3/2}.$$

Наименьшее значение n , при котором может быть выполнено последнее неравенство, равно 103, а минимальное значение коэффициента $(1 - 1/n)^{3/2}$ для $n \geq 103$ достигается при $n = 103$ и равно $(102/103)^{3/2} > 0.985$. Поэтому условие $\ell \leq 0.0985$ достаточно для выполнения (4), а, следовательно, и для справедливости оценки Правитца (5).

По какой-то причине результат Правитца выпал из поля зрения И. С. Шиганова, соответствующая модификация алгоритма которого с учетом «условной» оценки (5) позволила И. Г. Шевцовой добиться дальнейших уточнений и получить оценки $C_0 \leq 0.7056$ [17] и $C_0 \leq 0.7005$ [18]. Кстати, упоминания о работах Правитца, к сожалению, нет и в таких известных монографиях по теории предельных теорем теории вероятностей, как [6] и [13].

Дальнейшие усилия были направлены на исследование возможностей модифицированного алгоритма Золотарева с использованием уточненных неравенств сглаживания и метода генерации «сглаживающих» ядер, основные идеи которого сформулированы в диссертации Ван Бика [22].

Пусть $u(x)$, $x \in \mathbf{R}$, — некоторая вещественная абсолютно интегрируемая функция. Обозначим $\hat{u}$ и u^{*s} , $s \in \mathbf{N}$, соответственно преобразование Фурье и s -кратную свертку функции u с собой:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} u(t) dt, \quad u^{*s}(t) = (u^{*(s-1)}) * u(t), \\ u^{*2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-y)u(y) dy, \quad u^{*1}(t) \equiv u(t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Утверждение 1. *Предположим, что $u \in L_1$, а также $\hat{u} \in L_s$ для некоторого натурального s . Тогда функция*

$$p_s(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\hat{u}(x))^s}{u^{*s}(0)}, \quad x \in \mathbf{R},$$

принадлежит классу Λ , и ее преобразование Фурье имеет вид

$$\hat{p}_s(t) = \frac{u^{*s}(t)}{u^{*s}(0)}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Это утверждение немедленно вытекает из теоремы обращения для преобразований Фурье.

Следующие два очевидных утверждения дают возможность многомерной параметризации произвольной функции из класса Λ .

Утверждение 2. Класс Λ замкнут относительно сдвига на произвольное вещественное число.

Утверждение 3. Пусть $p \in \Lambda$. Для целого $K \geq 0$ положим

$$w_K(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \gamma_k (p(x-b-a_k) + p(x-b+a_k)), \quad x \in \mathbf{R}, \quad K \geq 1,$$

$$w_0(x) = p(x-b), \quad x \in \mathbf{R},$$

где $b, a_1, \dots, a_K$ — произвольные вещественные числа, $\gamma_K = 1$, $\gamma_1, \dots, \gamma_{K-1} \in \mathbf{R}$ таковы, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_K(x) dx > 0.$$

Тогда существует такая положительная константа $c = c(b, a_1, \dots, a_K, \gamma_1, \dots, \gamma_K)$, что $c \cdot w_K(x) \in \Lambda$, причем

$$\hat{w}_K(t) = e^{itb} \hat{p}(t) \sum_{k=1}^K \gamma_k \cos(a_k t), \quad t \in \mathbf{R},$$

(здесь по определению полагаем $\sum_{k=1}^0 (\cdot) \equiv 0$).

Заметим, что даже если функция $p \in \Lambda$, фигурирующая в формулировке утверждения 3, является четной, то $w_K(x)$ четной быть вовсе не обязана (свойство четности сохранится, только если $b = 0$). Алгоритм конструирования ядер, описанный в утверждении 3, был предложен Ван Биком [22] при $b = 0$ как пример функциональной последовательности $\{w_K\}_{K \geq 1}$, доставляющей инфимум правой части неравенства Золотарева (при $K \rightarrow \infty$).

Теперь рассмотрим три примера применения утверждения 3, восходящих к работам Эссеена [31], Золотарева [48] и Ван Бика [22]. Символом $\mathbf{1}(A)$ обозначена индикаторная функция множества $A \subset \mathbf{R}$.

Пример 1. Функция

$$u_\nu(t) = (\cos \pi t)^{\nu-1} \mathbf{1}\left(|t| \leq \frac{1}{2}\right),$$

$$\hat{u}_\nu(x) = \frac{2^{-\nu+1} \Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu + 1/2 - x/2\pi) \Gamma(\nu + 1/2 + x/2\pi)}$$

удовлетворяет условиям утверждения 1 при $\nu > 1$ для всех $s \in \mathbf{N}$, поэтому функции вида

$$h_{s,\nu}(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\hat{u}_\nu(x))^s}{u_\nu^{*s}(0)}, \quad x \in \mathbf{R},$$

принадлежат классу Λ для всех $s \geq 1$ и $\nu > 1$. В частности, классу Λ принадлежат функции

$$\begin{aligned} h_{1,\nu}(x) &= \frac{\Gamma(\nu)}{\pi 2^\nu \Gamma(\nu + 1/2 - x/2\pi) \Gamma(\nu + 1/2 + x/2\pi)}, \\ \hat{h}_{1,\nu}(t) &= (\cos \pi t)^{\nu-1} \mathbf{1}\left(|t| \leq \frac{1}{2}\right), \\ h_{1,3}(x) &= 2\pi \cdot \frac{\sin(x/2)}{x(4\pi^2 - x^2)}, \quad \hat{h}_{1,3}(t) = (\cos \pi t)^2 \mathbf{1}(|t| \leq 1/2), \\ h_{2,\nu}(x) &= \frac{\Gamma^3(\nu)}{2^{2\nu-1} \sqrt{\pi} \Gamma(\nu - 1/2)} \left(\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} - \frac{x}{2\pi}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} + \frac{x}{2\pi}\right) \right)^{-2}, \\ \hat{h}_{2,\nu}(t) &= \mathbf{1}(|t| \leq 1) \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu - 1/2)} \int_{(t-1/2) \vee (-1/2)}^{(t+1/2) \wedge 1/2} (\cos \pi y \cdot \cos \pi(t-y))^{\nu-1} dy, \\ h_{2,2}(x) &= \frac{4}{\pi^3} \left(\frac{\cos \frac{x}{2}}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}} \right)^2, \quad h_{2,3}(x) = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{\sin(x/2)}{\frac{x}{2}(1 - x^2/4\pi^2)} \right)^2, \\ h_{2,4}(x) &= \frac{9 \cdot 2^7}{5\pi^3} \left(\frac{\cos x/2}{(1 - x^2/\pi^2)(9 - x^2/\pi^2)} \right)^2, \\ h_{2,5}(x) &= \frac{9 \cdot 2^4}{35\pi} \left(\frac{\sin(x/2)}{\frac{x}{2}(1 - x^2/4\pi^2)(4 - x^2/4\pi^2)} \right)^2, \\ h_{2,6}(x) &= \frac{25 \cdot 2^{15}}{7\pi^3} \left(\frac{\cos(x/2)}{(1 - x^2/\pi^2)(9 - x^2/\pi^2)(25 - x^2/\pi^2)} \right)^2, \\ \hat{h}_{2,2}(t) &= \left[(1 - |t|) \cos \pi t + \frac{\sin \pi |t|}{\pi} \right] \mathbf{1}(|t| \leq 1), \\ \hat{h}_{2,3}(t) &= \left[\frac{1}{3} (1 - |t|)(1 + 2 \cos^2 \pi t) + \frac{1}{\pi} \cos \pi t \sin \pi |t| \right] \mathbf{1}(|t| \leq 1), \\ \hat{h}_{2,4}(t) &= \left[\frac{1}{5} (1 - |t|)(3 + 2 \cos^2 \pi t) \cos \pi t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{15\pi} (4 + 11 \cos^2 \pi t) \sin \pi |t| \right] \mathbf{1}(|t| \leq 1), \\ \hat{h}_{2,5}(t) &= \left[\frac{1}{35} (1 - |t|)(3 + 24 \cos^2 \pi t + 8 \cos^4 \pi t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{21\pi} (11 + 10 \cos^2 \pi t) \cos \pi t \sin \pi |t| \right] \mathbf{1}(|t| \leq 1), \\ \hat{h}_{2,6}(t) &= \left[\frac{1}{63} (1 - |t|)(15 + 40 \cos^2 \pi t + 8 \cos^4 \pi t) \cos \pi t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{945\pi} (64 + 607 \cos^2 \pi t + 274 \cos^4 \pi t) \sin \pi |t| \right] \mathbf{1}(|t| \leq 1). \end{aligned}$$

Пример 2. Функция

$$u_\nu(t) = (1/4 - t^2)^{\nu-1/2} \mathbf{1}(|t| \leq 1/2), \quad \hat{u}_\nu(x) = \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2) x^{-\nu} J_\nu(x/2)$$

удовлетворяет условиям теоремы 1 при $\nu > 1/2$ для всех $s \in \mathbf{N}$, поэтому классу Λ принадлежат функции

$$g_{s,\nu}(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\hat{u}_\nu(x))^s}{u_\nu^{*s}(0)}, \quad x \in \mathbf{R},$$

для всех $s \in \mathbf{N}$ при $\nu > 1/2$. В частности, классу Λ принадлежат функции

$$\begin{aligned} g_{1,\nu}(x) &= \frac{2^{2\nu-2} \Gamma(\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{J_\nu(|x|/2)}{|x|^\nu}, \\ \hat{g}_{1,\nu}(t) &= (1 - 4t^2)^{\nu-1/2} \mathbf{1}(|t| \leq 1/2), \\ g_{2,\nu}(x) &= \frac{2^{4\nu-2} \Gamma^2(\nu + 1/2) \Gamma(2\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(2\nu)} \cdot \frac{J_\nu^2(|x|/2)}{|x|^{2\nu}}, \\ \hat{g}_{2,\nu}(t) &= \frac{2^{4\nu-1} \Gamma(2\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(2\nu)} \\ &\quad \times \int_{(t-1/2) \vee (-1/2)}^{(t+1/2) \wedge 1/2} \left[\left(\frac{1}{4} - y^2 \right) \left(\frac{1}{4} - (t-y)^2 \right) \right]^{\nu-1/2} dy \cdot \mathbf{1}(|t| \leq 1), \\ g_{2,3/2}(x) &= 15 \frac{J_{3/2}^2(|x|/2)}{|x|^3} = \frac{60}{\pi x^6} \left(x \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \right)^2, \\ \hat{g}_{2,3/2}(t) &= \left[1 - |t|^5 - 5t^2(1 - |t|) \right] \mathbf{1}(|t| \leq 1). \end{aligned}$$

Пример 3. Очевидно, следующие функции также принадлежат классу Λ :

$$\begin{aligned} q_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2, \quad q_3(x) = \frac{4}{9\pi} \left(\frac{\sin(x/3)}{x/3} \right)^3, \\ q_4(x) &= \frac{3}{8\pi} \left(\frac{\sin(x/4)}{x/4} \right)^4. \end{aligned}$$

Соответствующие преобразования Фурье имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{q}_2(t) &= (1 - |t|)^+, \\ \hat{q}_3(t) &= \begin{cases} 1 - 3t^2, & |t| \leq \frac{1}{3}, \\ 1.5(1 - |t|)^2, & \frac{1}{3} < |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases} \\ \hat{q}_4(t) &= \begin{cases} 1 - 6t^2 + 6|t|^3, & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1 - |t|)^3, & \frac{1}{2} < |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что функцию $q_2(x)$ использовали еще Берри [28] и Эссен [31]. Идея применения теоремы о свертке для конструирования ядер (см. утверждение 1), по-видимому, принадлежит Эссену [31], в работах которого впервые встречается функция q_4 с соответствующим преобразованием Фурье $\hat{q}_4$, выписанным в виде свертки. Золотарев в [48] развил идею Эссена об использовании свертки и в качестве примера указал функции $h_{2,3}$ и q_4 , однако в своих вычислениях [48] использовал лишь q_2 . Ван Бик, обобщивший неравенство сглаживания Золотарева на осциллирующие ядра, впервые использовал знакопеременную функцию q_3 [22], [23]. Кроме того, в своей диссертации [22] он предложил общий вид функций $h_{s,\nu}$ и $g_{s,\nu}$, $s = 1, 2$, с произвольным ν с целью проведения дополнительной оптимизации по ν , однако в своих вычислениях [22], [23] использовал лишь $h_{1,3}$ и $g_{2,3/2}$.

Вычислительный процесс был организован в соответствии с модифицированным алгоритмом Золотарева, который детально описан в работах [17] и [18]. Для оценивания разности $r_n(t) = |f_n(t) - e^{-t^2/2}|$ использовались неравенства

$$\begin{aligned} r_n(t) &\leq e^{-t^2/2} \left[\exp \left\{ \frac{\ell |t|^3}{6} - n \ln \left(1 - \frac{t^2}{2n} \right) - \frac{t^2}{2} \right\} - 1 \right], \quad |t| < \sqrt{2n}, \\ r_n(t) &\leq \left(\frac{\ell |t|^3}{6} + \frac{|t|^4}{8n} \right) \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n} (1 - 2\kappa(\ell + n^{-1/2})|t|) \right\}, \quad t \in \mathbf{R}, \\ r_n(t) &\leq |f_n(t)| + e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbf{R}, \\ |f_n(t)| &\leq \exp \left\{ -\chi \left(t, \ell + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\}, \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

где при $\varepsilon > 0$

$$\chi(t, \varepsilon) = \begin{cases} t^2/2 - \kappa\varepsilon|t|^3, & |t| \leq \theta_0/\varepsilon, \\ \frac{1 - \cos \varepsilon t}{\varepsilon^2}, & \theta_0 \leq \varepsilon|t| \leq 2\pi, \\ 0, & |t| > 2\pi/\varepsilon, \end{cases} \quad (6)$$

$\theta_0 = 3.99589567\dots$ — единственный корень уравнения

$$\theta^2 + 2\theta \sin \theta + 6(\cos \theta - 1) = 0, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi, \quad (7)$$

$$\kappa \equiv \sup_{x>0} \frac{|\cos x - 1 + x^2/2|}{x^3} = \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^3} \Big|_{x=\theta_0} = 0.09916191\dots \quad (8)$$

Первая из указанных оценок доказана Золотаревым в работе [5], вторая — Гапоновой и Шевцовой в [3], четвертая — Правитцем в [40], третья очевидна.

При этом наилучшая оценка константы C_0 , полученная с помощью модифицированного алгоритма Золотарева с неравенством сглаживания Шевцовой (см. лемму 1) на указанных ядрах с $K = 0, 1, 2$ и с приведенными выше оценками характеристических функций достигнута на ядре $h_{2,\nu}(x)$ с $\nu = 3$ при $K = 2$: $C_0 \leq 0.6635$. По-видимому, это значение близко к пределу возможностей модифицированного алгоритма Золотарева с упоминавшимися выше неравенствами сглаживания типа Золотарева–Ван Бика–Паулаускаса–Шевцовой.

В связи с этими соображениями авторами была предпринята попытка в модифицированном алгоритме Золотарева вместо указанных неравенств сглаживания использовать неравенство Правитца (см. лемму 2 ниже). Эта попытка привела к оценке $C_0 \leq 0.5958$. Две последние оценки константы C_0 не были опубликованы.

Для полноты исторического обзора необходимо упомянуть еще несколько результатов, связанных с уточнением структуры неравенства Берри–Эссеена.

В первую очередь отметим неопубликованный результат Х. Правитца: если выполнено условие $\sqrt{n-1} \geq 3.9(\beta^3 + 1)$, то для всех $n \geq 3$

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{0.32\beta^3 + 0.25}{\sqrt{n-2}}. \quad (9)$$

Это утверждение было доказано Х. Правитцем на его лекции 16 июня 1972 г. в ходе Летней школы, организованной Шведским статистическим обществом [39].

Дальнейшим развитием неравенства (9) стало анонсированное Х. Правитцем в [41] неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\beta^3}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(n-1)} + \frac{c_1(\beta^3)^2 + c_2\beta^3 + c_3}{n-1}, \quad (10)$$

справедливое при всех $n \geq 2$ для любого распределения F с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным третьим абсолютным моментом β^3 , где c_1 , c_2 и c_3 – некоторые абсолютные постоянные. В той же работе Х. Правитц высказал предположение, что коэффициент $2/(3\sqrt{2\pi}) = 0.2659\dots$ при первом слагаемом не может быть уменьшен. Строгое доказательство неравенства (10) было дано В. Бенткусом [24], [25] (для необязательно одинаково распределенных слагаемых, но с немного худшим третьим слагаемым). И. Г. Шевцова доказала неулучшаемость коэффициента при первом слагаемом в (10), который оказывается равным так называемой нижней асимптотически правильной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена [20].

В статье В. Бенткуса и К. Кирши [1] рассмотрен случай $n = 1$ и показано, что в такой ситуации в (2) $C_0 = 0.370352\dots$

В работе Г. П. Чистякова [16] доказано неравенство

$$\Delta_n \leq C_E \cdot \ell + c_* \cdot \ell^{40/39} |\ln \ell|^{7/6},$$

справедливое для всех $n \geq 1$ и всех распределений с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным третьим моментом таких, что ляпуновская дробь равна ℓ , где $c_* \in (0, \infty)$ — некоторая абсолютная постоянная.

С. В. Нагаев и В. И. Чеботарев в [11] анонсировали неравенство

$$\Delta_n \leq C_{NC}(n, \beta^3) \frac{\beta^3}{\sqrt{n}},$$

где

$$C_{NC}(n, \beta^3) = 0.5155 + \frac{0.4277}{\beta^3} + \frac{0.1536}{\beta^3 \sqrt{n}}.$$

При этом $0.5155 \leq C_{NC}(n, \beta^3) \leq 1.0968$ и функция $C_{NC}(n, \beta^3)$ монотонно убывает по каждому аргументу.

К. Хипп и Л. Маттнер [33] решили задачу оценивания константы C_0 в (2) для еще одного «граничного» случая: $\beta^3 = 1$ (единственным распределением F случайной величины X_1 , удовлетворяющим условиям $\mathbf{E} X_1 = 0$, $\mathbf{E} X_1^2 = 1$ и $\mathbf{E} |X_1|^3 = 1$, является двухточечное распределение, приписывающее вероятности $1/2$ точкам -1 и 1). В упомянутой работе показано, что в такой ситуации в (2) константа C не превосходит $1/\sqrt{2\pi}$, то есть $C_0 \leq 0.3990$.

Наконец, в 2009 г. Королев и Шевцова [8] доказали неравенство

$$\Delta_n \leq C_1 \cdot \frac{\beta^3 + 1}{\sqrt{n}} \quad (11)$$

с $C_1 = 0.345$. При этом использовался модифицированный алгоритм Золотарева с неравенством сглаживания Шевцовой и ядром $h_{1,\nu}(x)$ с $\nu = 5$ и $K = 1$. В той же работе с использованием результата статьи [20], посвященной вычислению точного значения так называемой нижней асимптотически правильной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена, было найдено минимально возможное значение постоянной C_1 в неравенстве (11) и показано, что

$$C_1 \geq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} = 0.2659 \dots$$

Неравенство (11) было затем использовано в работе [9] для вывода аналога неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм с абсолютной константой $C = 0.345 < C_E$.

Неравенство (11), очевидно, можно переписать в виде

$$\Delta_n \leq C_{KS}(\beta^3) \frac{\beta^3}{\sqrt{n}}, \quad (12)$$

где

$$C_{KS}(\beta^3) = 0.345 \left(1 + \frac{1}{\beta^3}\right). \quad (13)$$

При этом ясно, что

$$0.345 = C_{KS}(\infty) \leq C_{KS}(\beta^3) \leq C_{KS}(1) = 0.690,$$

причем функция $C_{KS}(\beta^3)$ монотонно убывает. Кстати, из (12) и (13) вытекает, что при $\beta \geq 3/\sqrt{2}$ неравенство (2) справедливо с $C_0 = 0.5077$, что заметно перекрывает «условный» результат Цаля. Неравенства (11) и (12) вполне согласуются с закономерностью, подмеченной еще в работе Икеды: константа в (2) тем меньше, чем больше β^3 . Позднее, заменив в использованном в [8] алгоритме неравенство сглаживания Шевцовой на неравенство Правитца (см. лемму 2 ниже), авторы показали, что неравенство (11) справедливо с $C_1 = 0.3068$, однако этот результат не был опубликован.

При выводе оценки (11) с $C_1 = 0.345$ в [8] и с $C_1 = 0.3068$ существенную роль сыграла следующая сходная с (12) по форме «условная» оценка, полученная Гапоновой и Шевцовой в [3], где выписана функция $C_{GS}(\varepsilon)$ такая, что при $(\beta^3 + 1)/\sqrt{n} \leq 2\varepsilon$

$$\Delta_n \leq C_{GS}(\varepsilon) \frac{\beta^3}{\sqrt{n}}.$$

Функция $C_{GS}(\varepsilon)$ имеет существенно более сложный вид, нежели $C_{KS}(\beta^3)$ (см. (13)). Ее значения при некоторых ε таковы:

ε	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.01	0+
$C_{GS}(\varepsilon)$	0.6861	0.5875	0.5249	0.4894	0.4767	0.4680	0.4655

(предельное значение $C_{GS}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равняется $7/(6\sqrt{2\pi}) = 0.4654\dots$), откуда вытекает, что для одинаково распределенных слагаемых оценка Гапоновой–Шевцовой точнее оценки Правитца (5), так как условие $(\beta^3 + 1)/\sqrt{n} \leq 0.2$ слабее условия Правитца (4), а $C_{GS}(0.1) = 0.4894 < 0.5152$. Кроме того, в указанной работе отмечена еще одна закономерность: верхняя оценка константы C_0 в (2) тем меньше, чем меньше дробь Ляпунова $\beta^3/\sqrt{n}$.

Итак, если рассмотреть область возможных значений параметров n и β^3 (это точки квадранта $\{n, \beta^3: n \geq 1, \beta^3 \geq 1\}$ с целочисленной первой координатой), то можно заметить, что в неравенстве Берри–Эссеена (2) в этой области:

- 1) $C_0 \leq 0.3704$ на прямой $n = 1$ [1];
- 2) $C_0 \leq 0.3990$ на «прямой» $\beta^3 = 1$ [33];
- 3) $C_0 \leq 0.4894$ в области $\{n, \beta^3: n \geq 100, \beta^3 \leq 0.1\sqrt{n}\} \cup \{n, \beta^3: n \geq 2, \beta^3 \geq 1.6802\}$ [3]¹⁾, [8];
- 4) $C_0 \leq 0.5958$, если $1 < \beta^3 \leq 1.0616$;
- 5) $C_0 \leq 0.3068(1 + 1/\beta^3)$ для остальных возможных значений n и β^3 .

При этом *наибольшее* натуральное n , удовлетворяющее условию $0.1\sqrt{n} < \beta^3 \leq 1.0616$, равняется 112. Следовательно, фактически упомянутая выше «абсолютная» оценка $C_0 \leq 0.5958$ имеет смысл лишь на множестве $\mathcal{A}$ возможных значений n и β^3 :

$$\mathcal{A} = \{n, \beta^3: n = 2, \dots, 112; \max\{1, 0.1\sqrt{n}\} < \beta^3 \leq 1.0616\}.$$

При этом каждому из *конечного* числа значений параметра n , входящих в $\mathcal{A}$, соответствует *ограниченное* множество значений параметра β^3 .

Таков исторический и методический фундамент для новых результатов, к изложению которых мы переходим.

2. Новые результаты.

Теорема 1. *Для всех $n \geq 1$ и всех распределений с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным третьим абсолютным моментом β^3 справедливо неравенство*

$$\Delta_n \leq \frac{0.34445\beta^3 + 0.16844}{\sqrt{n}}. \quad (14)$$

Поскольку $0.34445\beta^3 + 0.16844 < 0.5129\beta^3$ в силу того, что в рассматриваемом случае всегда $\beta^3 \geq 1$, из теоремы 1 мы немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Классическое неравенство Берри–Эссеена (2) справедливо с*

$$C_0 = 0.5129.$$

З а м е ч а н и е 1. Даже если гипотеза В. М. Золотарева о том, что в (2) $C_0 = C_E$ (см. [48]) окажется верной, то поскольку $\beta^3 \geq 1$, неравенство (14) будет точнее классического неравенства Берри–Эссеена (2) при $\beta^3 \geq 2.5815$.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 1 является «безусловным» вариантом «условного» неравенства Правитца (9) и практически вычислимым аналогом неравенства (10) с немного худшим (примерно на 0.08) первым коэффициентом и немного лучшим (примерно на 0.03) вторым коэффициентом, но зато без третьего слагаемого с неопределенными константами, имеющего более высокий порядок убывания по n .

¹⁾ Поскольку $\beta^3 \geq 1$, множество $\{\beta^3: \beta^3 \leq 0.1\sqrt{n}\}$ непусто лишь при $n \geq 100$.

З а м е ч а н и е 3. Справедливость неравенства (2) с константой $C_0 = 0.5129$ может быть установлена независимо от теоремы 1 (см. раздел 3.3).

При доказательстве теоремы 1 используется метод, основанный на оценивании константы C_k в неравенстве

$$\Delta_n \leq \frac{C_k(\beta^3 + k)}{\sqrt{n}} \quad (15)$$

при $k \geq 0$. При таком подходе ясно, что

$$C_0 \leq \min_{k \geq 0} C_k(1 + k). \quad (16)$$

Практические вычисления показывают, что при используемом алгоритме оценивания C_k в (15) при фиксированном k (см. раздел 3.2) минимум в (16) достигается при $k = k_0 \approx 0.489$. Именно это значение $k = k_0$ и использовано при доказательстве теоремы 1. Однако в некоторых задачах, в частности, при оценивании абсолютной постоянной в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм (см., например, [9]) необходимо, чтобы коэффициент при β^3 в (15) был бы как можно меньшим. Практические вычисления показывают, что, хотя при увеличении k в (15) от k_0 до 1 оценки величины $C_k(1 + k)$ возрастают, оценки самой константы C_k убывают, так что при $k = 1$ реализуется минимальное значение оценки константы C_k в (15). А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Неравенство (11) справедливо с $C_1 = 0.3062$.*

Другими словами, справедливо неравенство

$$\Delta_n \leq 0.3062 \cdot \frac{\beta^3 + 1}{\sqrt{n}}. \quad (17)$$

З а м е ч а н и е 4. Зазор между коэффициентом 0.3062 при β^3 в (17) и его теоретически наименьшим возможным значением $2/(3\sqrt{2\pi}) = 0.2659 \dots$ [20] весьма мал и составляет примерно 0.04.

3. Доказательства основных результатов.

3.1. Вспомогательные утверждения. Напомним, что через $r_n(t)$ мы обозначили модуль разности между характеристическими функциями f_n распределения F_n и стандартного нормального закона:

$$r_n(t) = |f_n(t) - e^{-t^2/2}|.$$

Лемма 2 [40]. *Для произвольного распределения F и $n \geq 1$ при всех $0 < t_0 \leq 1$ и $T > 0$ справедлива оценка*

$$\Delta_n \leq 2 \int_0^{t_0} |K(t)| r_n(Tt) dt + 2 \int_{t_0}^1 |K(t)| \cdot |f_n(Tt)| dt$$

$$+ 2 \int_0^{t_0} \left| K(t) - \frac{i}{2\pi t} \right| e^{-T^2 t^2/2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} e^{-T^2 t^2/2} \frac{dt}{t},$$

где

$$K(t) = \frac{1}{2} (1 - |t|) + \frac{i}{2} \left[(1 - |t|) \cot \pi t + \frac{\operatorname{sign} t}{\pi} \right], \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Перейдем к оценкам характеристических функций, фигурирующих в подынтегральных выражениях в лемме 2. Положим

$$r_0(t, \varepsilon, n) = \left(1 - \frac{2}{n} \chi(t, \varepsilon) \right)^{n/2}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon > 0,$$

где функция $\chi(t, \varepsilon)$ введена в (6). Напомним, что для ляпуновского отношения мы используем обозначение $\ell = \beta^3/\sqrt{n}$. Дополнительно обозначим $\ell_n = \ell + 1/\sqrt{n}$.

Лемма 3. Для любого распределения F с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным третьим абсолютным моментом β^3 при всех $n \geq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &\leq r_0(t, \ell_n, n), \quad t \in \mathbf{R}, \\ r_0(t, \varepsilon, n) &\leq \tilde{r}_0(t, \varepsilon) \equiv \exp\{-\chi(t, \varepsilon)\}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon > 0, \\ r_n(t) &\leq r_1(t, \ell, n) \equiv e^{-t^2/2} \left[\exp\left\{ \frac{\ell|t|^3}{6} - n \ln \left(1 - \frac{t^2}{2n} \right) - \frac{t^2}{2} \right\} - 1 \right], \\ &\quad |t| < \sqrt{2n}, \\ r_n(t) &\leq r_2(t, \ell, n) \equiv \left(\frac{\ell|t|^3}{6} + \frac{|t|^4}{8n} \right) \\ &\quad \times \left(\max\{r_0(t, \ell_n, n), e^{-t^2/2}\} \right)^{(n-1)/n}, \quad t \in \mathbf{R}, \\ r_2(t, \ell, n) &\leq \tilde{r}_2(t, \ell, n) \equiv \left(\frac{\ell|t|^3}{6} + \frac{|t|^4}{8n} \right) (\tilde{r}_0(t, \ell_n))^{(n-1)/n}, \quad t \in \mathbf{R}, \\ r_n(t) &\leq r_3(t, \ell, n) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\ell|t|^3}{6} + \frac{|t|^4}{8n} \right) \left(e^{-t^2/2} + \max\{r_0(t, \ell_n, n), e^{-t^2/2}\} \right) \\ &\quad \times e^{t^2/(2n)}, \quad t \in \mathbf{R}, \\ r_3(t, \ell, n) &\leq \tilde{r}_3(t, \ell, n) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\ell|t|^3}{6} + \frac{|t|^4}{8n} \right) (e^{-t^2/2} + \tilde{r}_0(t, \ell_n)) \\ &\quad \times e^{t^2/(2n)}, \quad t \in \mathbf{R}, \\ r_n(t) &\leq r_4(t, \ell, n) \equiv r_0(t, \ell_n, n) + e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbf{R}, \\ r_4(t, \ell, n) &\leq \tilde{r}_4(t, \ell, n) \equiv \tilde{r}_0(t, \ell_n) + e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Первая и шестая оценки получены Правитцем в [40] и [41], третья — Золотаревым в [5], четвертая — Гапоновой и Шевцовой в [3], остальные оценки очевидны.

З а м е ч а н и е 5. Можно убедиться, что функция $\chi(t, \varepsilon)$ монотонно убывает по $\varepsilon > 0$ при каждом фиксированном t , а следовательно, $\tilde{r}_0(t, \ell + 1/\sqrt{n})$ монотонно убывает по n и монотонно возрастает по ℓ . Функции $r_1(t, \ell, n)$, $\tilde{r}_j(t, \ell, n)$, $j = 2, 3, 4$, также монотонно убывают по n и монотонно возрастают по ℓ при каждом $t \in \mathbf{R}$.

Для оценивания величины $r_n(Tt)$ в первом интеграле леммы 2 мы выбираем минимум из четырех оценок r_j , $j = 1, 2, 3, 4$, если не оговорено иное. Учитывая сказанное и замечая, что

$$\left| K(t) - \frac{i}{2\pi t} \right| = \frac{1}{2} (1-t) \sqrt{1 + \left(\cot \pi t - \frac{1}{\pi t} \right)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

мы можем оценить Δ_n при каждом $n \geq 2$ и F с фиксированным отношением Ляпунова ℓ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_n &\leq 2 \int_0^{t_0} |K(t)| \min_{1 \leq j \leq 4} r_j(Tt, \ell, n) dt + 2 \int_{t_0}^1 |K(t)| r_0(Tt, \ell + 1/\sqrt{n}, n) dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^\infty e^{-T^2 t^2/2} \frac{dt}{t} + \int_0^{t_0} (1-t) \sqrt{1 + \left(\cot \pi t - \frac{1}{\pi t} \right)^2} e^{-T^2 t^2/2} dt \\ &\equiv D(\ell, n, t_0, T) \end{aligned}$$

с произвольными положительными t_0 и T .

Следующая лемма позволяет ограничить сверху множество рассматриваемых значений n при реализации алгоритма оценивания константы C_k в неравенстве (15) с $0 < k \leq 1$ (в том числе и константы C_1 в неравенстве (11)).

Лемма 4. Для положительных k , ε и T положим

$$N_1 = T^2 \left(\sqrt{\left(\frac{3}{4k} \right)^2 + 1} + \frac{3}{4k} \right)^2, \quad N_2 = \left(\frac{3T}{4k} \right)^2, \quad N_3 = ((\varepsilon T + 3/2)T)^2.$$

Тогда для любых положительных $k \leq 1$, ε и T таких, что $N_j > (k/\varepsilon)^2$, $j = 1, 2, 3$, при $|t| \leq T$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq N_1} r_1(t, \varepsilon - k/\sqrt{n}, n) &\leq \tilde{r}_1(t, \varepsilon) \equiv (e^{\varepsilon|t|^3/6} - 1)e^{-t^2/2}, \\ \sup_{n \geq N_2} r_2(t, \varepsilon - k/\sqrt{n}, n) &\leq \tilde{r}_{2, N_2}(t, \varepsilon) \equiv \frac{\varepsilon|t|^3}{6} \left(\tilde{r}_0 \left(t, \varepsilon + \frac{1-k}{\sqrt{N_2}} \right) \right)^{(N_2-1)/N_2}, \\ \sup_{n \geq N_2} r_3(t, \varepsilon - k/\sqrt{n}, n) &\leq \tilde{r}_{3, N_2}(t, \varepsilon) \\ &\equiv \frac{\varepsilon|t|^3}{12} \left(e^{-t^2/2} + \tilde{r}_0 \left(t, \varepsilon + \frac{1-k}{\sqrt{N_2}} \right) \right) e^{t^2/(2N_2)}, \\ \sup_{n \geq N_3} r_3(t, \varepsilon - 1/\sqrt{n}, n) &\leq \tilde{r}_3(t, \varepsilon) \equiv \frac{\varepsilon|t|^3}{12} \left(e^{\varepsilon|t|^3} + 1 \right) e^{-t^2/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq N} r_0\left(t, \varepsilon + \frac{1-k}{\sqrt{n}}, n\right) &\leq \tilde{r}_0\left(t, \varepsilon + \frac{1-k}{\sqrt{N}}\right) \\ &\quad (\text{для всех } t \in \mathbf{R}, N > (k/\varepsilon)^2), \\ \sup_{n \geq N} r_4(t, \varepsilon - k/\sqrt{n}, n) &\leq \tilde{r}_0\left(t, \varepsilon + \frac{1-k}{\sqrt{N}}\right) + e^{-t^2/2} \\ &\quad (\text{для всех } t \in \mathbf{R}, N > (k/\varepsilon)^2). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 6. Лемму 4 можно использовать при одинаковых $N_j = N$, $j = 1, 2, 3$: для этого условия на n вида $n \geq N_j$ необходимо заменить условиями на t вида $|t| \leq T_j$ с

$$T_1 = \sqrt{N} \left(\sqrt{\left(\frac{3}{4k}\right)^2 + 1} - \frac{3}{4k} \right), \quad T_2 = \frac{4k\sqrt{N}}{3}, \quad T_3 = \frac{\sqrt{9 + 16\varepsilon\sqrt{N}} - 3}{4\varepsilon}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 4. Последние две оценки являются тривиальным следствием монотонного возрастания функции $\chi(t, \varepsilon + (1-k)/\sqrt{n})$ по $n > 0$. Для доказательства первой оценки запишем r_1 в виде

$$r_1(t, \varepsilon - k/\sqrt{n}, n) = \left(\exp \left\{ \frac{\varepsilon|t|^3}{6} + g(n, |t|) \right\} - 1 \right) e^{-t^2/2},$$

где

$$g(x, t) = -\frac{kt^3}{6\sqrt{x}} - \frac{t^2}{2} - x \ln \left(1 - \frac{t^2}{2x} \right), \quad 0 \leq t < \sqrt{2x}, \quad x > 0.$$

Тогда достаточно показать, что $g(x, t) \leq 0$ для всех $t \leq T$ и $x \geq N_1 = N_1(T)$.

Используя разложение логарифма в степенной ряд, для всех $0 \leq t < \sqrt{2x}$ и $x > 0$ получаем

$$\begin{aligned} g(x, t) &= -\frac{kt^3}{6\sqrt{x}} + x \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t^2}{2x} \right)^k \leq -\frac{kt^3}{6\sqrt{x}} + \frac{x}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{t^2}{2x} \right)^k \\ &= -\frac{kt^3}{6\sqrt{x}} + \frac{t^4}{4(2x - t^2)} \equiv \tilde{g}(x, t). \end{aligned}$$

Заметим, что для $0 \leq t < \sqrt{2x}$ и $x > 0$

$$\frac{\partial \tilde{g}(x, t)}{\partial x} = \frac{kt^3}{12x^{3/2}} - \frac{t^4}{2(2x - t^2)^2} > 0 \iff h(x, t) \equiv k(2x - t^2)^2 - 6tx^{3/2} > 0.$$

Пусть T – произвольное число из интервала $(0, \sqrt{2x})$. Несложно видеть, что функция $h(x, t)$ монотонно убывает по t , поэтому для всех $0 \leq t \leq T$

$$h(x, t) \geq h(x, T) = 2x(2kx - 3T\sqrt{x} - 2kT^2) + kT^4 > 2x(2kx - 3T\sqrt{x} - 2kT^2).$$

Решая квадратное уравнение, находим, что последнее выражение неотрицательно при

$$x \geq \frac{T^2}{k^2} \left(\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + k^2} \right)^2 = T^2 \left(\frac{3}{4k} + \sqrt{\left(\frac{3}{4k} \right)^2 + 1} \right)^2 \equiv N_1.$$

Таким образом, для всех $0 \leq t \leq T$ и $x \geq N_1(T)$, функция $h(x, t)$ положительна, а значит, $\tilde{g}(x, t)$ монотонно возрастает по $x \geq N_1$ при каждом фиксированном $t > 0$ и

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \geq N_1} g(x, t) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \geq N_1} \tilde{g}(x, t) = \sup_{0 \leq t \leq T} \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{g}(x, t) = 0.$$

Первая оценка доказана.

Вторая и третья оценки получаются аналогично первой с учетом неравенств $r_j \leq \tilde{r}_j$, $j = 2, 3$, в правой части которых показатель экспоненты $\chi(t, \varepsilon + (1 - k)/\sqrt{n})$, фигурирующей в определении $\tilde{r}_0$, является функцией, монотонно не убывающей по $n \geq 1$ при всех $t \in \mathbf{R}$, а также неравенства

$$\frac{\ell|t|^3}{6} + \frac{t^4}{8n} \equiv \frac{\varepsilon_k|t|^3}{6} - \frac{k|t|^3}{6\sqrt{n}} + \frac{t^4}{8n} \leq \frac{\varepsilon_k|t|^3}{6},$$

справедливого для всех $|t| \leq T$ и $n \geq N_2 = N_2(T)$, $T > 0$.

Для доказательства четвертой оценки заметим, что, как вытекает из результатов работы [40],

$$\begin{aligned} r_3(t, \varepsilon - 1/\sqrt{n}, n) &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon|t|^3}{6} - \frac{|t|^3}{6\sqrt{n}} + \frac{|t|^4}{8n} \right) (e^{\varepsilon|t|^3} + 1) e^{-(1-1/n)t^2/2} \\ &\equiv \frac{|t|^3}{12} (e^{\varepsilon|t|^3} + 1) \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} + g(n, |t|) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \ln \left[\left(\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3t}{4x} \right) e^{t^2/(2x)} \right] \\ &= \frac{t^2}{2x} + \ln \left(\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3t}{4x} \right), \quad t, \varepsilon > 0, \quad x \geq 1/\varepsilon^2 \end{aligned}$$

(при $t = 0$ доказываемое неравенство тривиально). Покажем, что при любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $|t| \leq T$ функция $g(x, t)$ монотонно возрастает по $x \geq N_3 = N_3(T)$. Действительно, производная

$$g'_x(x, t) = -\frac{t^2}{2x^2} + \frac{2\sqrt{x} - 3t}{4\varepsilon x^2 - 4x^{3/2} + 3tx}$$

неотрицательна тогда и только тогда, когда

$$4x^{3/2} - (4\varepsilon t + 6)tx + 4t^2\sqrt{x} - 3t^3 \geq 0.$$

Для справедливости последнего неравенства достаточно, чтобы одновременно

$$2\sqrt{x} - (2\varepsilon t + 3)t \geq 0 \quad \text{и} \quad 4\sqrt{x} - 3t \geq 0,$$

что, очевидно, эквивалентно условию $\sqrt{x} \geq \max\{(\varepsilon t + 3/2)t, 3t/4\} = (\varepsilon t + 3/2)t$, поскольку ε и t положительны. Таким образом, при всех $|t| \leq T$ и $x \geq N_3 \equiv ((\varepsilon t + 3/2)t)^2$ функция $g(x, t)$ монотонно возрастает по x , а следовательно,

$$\sup_{n \geq N_3} g(n, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n, t) = \ln \varepsilon, \quad |t| \leq T,$$

откуда и вытекает утверждение леммы.

Наконец, правильно организовать процесс вычислительной оптимизации позволяют следующие утверждения.

Лемма 5 [2]. Для любого распределения F с нулевым средним и единичной дисперсией справедливо неравенство

$$\rho(F, \Phi) \leq \sup_{x>0} \left(\Phi(x) - \frac{x^2}{1+x^2} \right) = 0.54093654 \dots$$

Лемма 6 [3]. Для любой функции распределения F с нулевым средним, единичной дисперсией и третьим абсолютным моментом β^3 и всех $n \geq 2$ таких, что $(\beta^3 + 1)/\sqrt{n} \leq 0.2$, справедливо неравенство

$$\Delta_n \leq 0.2794 \cdot \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + \frac{0.21}{\sqrt{n}}.$$

Из леммы 6 вытекает, что при всех n и β^3 таких, что $(\beta^3 + k)/\sqrt{n} < 0.1(1 + k)$ неравенство (15) имеет место при любых $k \in [0, 1]$ и $C_k > 0$, удовлетворяющих условиям $(k + 1)C_k \geq 0.4894$ и $k \leq 0.21/0.2794 = 0.7516 \dots$ или $C_k \geq 0.2794$ и $k = 1$.

Приведенные леммы дают основание ограничить область рассматриваемых значений величины $\varepsilon_k = (\beta^3 + k)/\sqrt{n}$ некоторым конечным отрезком, отделенным от нуля (подробнее об этом будет сказано ниже), и искать константу C_k в виде

$$C_k = \max_{\varepsilon} C(\varepsilon), \quad C(\varepsilon) = D(\varepsilon)/\varepsilon, \quad D(\varepsilon) = \sup\{D(\varepsilon, n): n \geq n_*\}, \quad (18)$$

где

$$D(\varepsilon, n) = \inf_{T, t_0 > 0} D(\varepsilon - k/\sqrt{n}, n, t_0, T), \quad (19)$$

$$n_* = \max\{1, \lceil (1 + k)^2/\varepsilon^2 \rceil\},$$

здесь $\lceil x \rceil$ — минимальное целое, не меньшее x . Условие $n \geq n_*$ является следствием неравенства $\beta^3 \geq 1$. При этом для оценивания супремума по n вместо входящих в D величин r_j , $j = 1, 2, 3, 4$, для достаточно больших n используются их соответствующие мажоранты, обладающие свойством монотонности по n . Вычисление максимума по ε существенно опирается на свойство монотонного возрастания по ε всех используемых оценок для функций $f_n(t)$ и $r_n(t)$, а следовательно, и величины $D(\varepsilon) = \varepsilon C(\varepsilon)$. Это свойство позволяет оценить $\max_{\varepsilon} C(\varepsilon)$ по значениям $C(\varepsilon)$ лишь в конечном числе точек. А именно, имеет место следующее утверждение.

Лемма 7. Для всех $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ имеет место неравенство

$$\max_{\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2} C(\varepsilon) \leq C(\varepsilon_2) \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

3.2. Алгоритм доказательства теоремы 1. Мы получим теорему 1 как следствие неравенства (15) с $k = 0.489$ и $C_k = 0.34445$. Положим

$$\varepsilon = \frac{\beta^3 + 0.489}{\sqrt{n}}.$$

Тогда при $\varepsilon \leq 0.1489$ неравенство (15) с указанными k и C_k вытекает из леммы 6, поскольку $1.489 \cdot 0.34445 > 0.4894$. С другой стороны, лемма 5 позволяет ограничить сверху область рассматриваемых значений ε величиной $0.541/0.34445 < 1.58$. Таким образом, при вычислении C_k максимизация по ε в формулах (18) проводится на отрезке $0.14 \leq \varepsilon \leq 1.58$.

Для $n \geq N = 64$ функции r_j , $j = 0, 4, 1, 2, 3$, в определении D оцениваются при помощи леммы 4 соответственно величинами: $\tilde{r}_0(t, \varepsilon + (1-k)/8)$ и $\tilde{r}_4(t, \varepsilon - k/8, n)$ для всех $t \in \mathbf{R}$; $\tilde{r}_1$ для $|t| \leq T_1 = 2.37$; $\tilde{r}_{2,64}$ и $\tilde{r}_{3,64}$ для $|t| \leq 5.216$. Последнее позволяет оценить супремум по $n \geq n_* \geq 2.21/\varepsilon^2$ в формуле (18) по значениям $D(\varepsilon, n)$ в конечном числе точек: $n_*, \dots, \max\{n_*, 64\}$.

Численная оптимизация функции $D(\varepsilon - k/\sqrt{n}, n, t_0, T)$ проводилась методом вложенных сеток по t_0 и стандартной процедурой минимизации функций одного аргумента по T в системе Matlab R2006b. В ходе оптимизации оказалось, что функция $D(\varepsilon, n)$ имеет две точки максимума: $n = 4$, $\varepsilon \approx 0.868$ ($\beta^3 \approx 1.247$) и $n = 5$, $\varepsilon \approx 0.6659$ ($\beta^3 = 1$), причем значения $D(\varepsilon, n)$ в этих точках не превосходят 0.34445 (оптимальные значения: $t_0 = 0.32$, $T = 5.54$ для первой точки и $t_0 = 0.28$, $T = 7.02$ — для второй), что и означает справедливость теоремы 1.

3.3. Автономное доказательство следствия 1. Как уже отмечалось, следствие 1 тривиальным образом вытекает из теоремы 1 в силу условия $\beta^3 \geq 1$. Однако справедливость неравенства Берри–Эссеена с константой $C_0 = 0.5129$ можно установить с помощью более простого алгоритма, не использующего лемму 4. Для этого необходимо заметить,

что функции $\tilde{r}_0(t, \ell + 1/\sqrt{n})$, $r_1(t, \ell, n)$, $\tilde{r}_j(t, \ell, n)$, $j = 2, 3, 4$, монотонно убывают по $n \geq 1$, но использовать их при малых n невыгодно, поскольку неравенство $(1 - 1/n)^n \leq e^{-1}$ является довольно грубым при умеренных n . Использование этих оценок дает удовлетворительный результат для $n \geq 20$: максимум функции $D(\ell, n)$ оценивается по значениям n в небольшом числе точек: $n_*, \dots, \max\{n_*, 20\}$, а по ℓ — на отрезке $0.1 \leq \ell \leq 1.06$ с помощью леммы 7, и не превосходит 0.5129; при этом экстремальными являются значения $n = 5$ и $\ell \approx 0.6659$ ($\beta^3 = 1$), для которых оптимальные значения $t_0 = 0.28$, $T = 7.02$.

3.4. Алгоритм доказательства теоремы 2. Укажем алгоритм доказательства неравенства (17). Обозначим

$$\varepsilon = \ell + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\beta^3 + 1}{\sqrt{n}}.$$

Тогда при $\varepsilon \leq 0.2$ неравенство (17) является следствием леммы 6, а при $\varepsilon \geq 1.77 \geq 0.541/0.3062$ — следствием леммы 5. Таким образом, при вычислении C_k максимизация по ε в формулах (18) проводится на отрезке $0.2 \leq \varepsilon \leq 1.77$.

Для вычисления супремума по $n \geq n_* = \lceil 4/\varepsilon^2 \rceil$ используется четвертая оценка из леммы 4 при $\varepsilon > 0.5$ с $T = 2.2$, а при $\varepsilon \leq 0.5$ — с $T = 3$, что позволяет оценить указанный супремум по значениям n , не превосходящим $N_3(2.2) = (2.2(2.2\varepsilon + 1.5))^2 \in [33, 141]$ для $0.5 < \varepsilon \leq 1.77$ и $N_3(3) = (3(3\varepsilon + 1.5))^2 \in [40, 81]$ для $0.2 \leq \varepsilon \leq 0.5$. При $n = N_3$ из всех оценок r_j , $j = 1, 2, 3, 4$, фигурирующих в определении функции D , используются только r_3 и r_4 , при этом в силу четвертого утверждения леммы 4 величина $r_3(t, \varepsilon - 1/\sqrt{n}, n)$ мажорируется своим предельным при $n \rightarrow \infty$ значением. Таким образом, супремум функции $D(\varepsilon, n)$ доставляет $n \rightarrow \infty$. Максимум по ε оценивается при помощи леммы 7 и не превосходит 0.3062 ($\varepsilon \approx 0.985$, $t_0 = 0.35$, $T = 6.13$), что и доказывает теорему 2.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю признательность Ю. В. Прохорову за поддержку, П. Ван Бику (Вагенинген, Нидерланды), А. Володину (Перт, Австралия) и А. Гуту (Уппсала, Швеция) за неоценимую библиографическую поддержку, а также Н. Ушакову (Тронхейм, Норвегия) за полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенткус В., Кирша К. Оценки близости функции распределения к нормальному закону. — Лит. матем. сб., 1989, т. 29, в. 4, с. 657–673.
2. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотически разложением. М.: Наука, 1982, 286 с.

3. Гапонова М. О., Шевцова И. Г. Асимптотические оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для распределений, не имеющих третьего момента. — Информатика и ее примен., 2009, т. 3, в. 4, в печати.
4. Золотарев В. М. О близости распределений двух сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 3, с. 519–526.
5. Золотарев В. М. Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 1, с. 108–119.
6. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 416 с.
7. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестник Моск. ун-та, 1953, № 10, с. 29–38.
8. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена. — Докл. РАН, 2010, в печати.
9. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для смешанных пуассоновских случайных сумм. — Докл. РАН, 2010, в печати.
10. Крамер Г. Случайные величины и распределения вероятностей. М.: ИЛ, 1947, 144 с.
11. Нагаев С. В., Чеботарев В. И. Новый подход к оценке абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена. — Тезисы докладов XXXI Дальневосточной школы-семинара им. акад. Е. В. Золотова. Владивосток, 2006, с. 19.
12. Паулаускас В. И. О неравенстве сглаживания. — Лит. матем. сб., 1971, т. 11, в. 4, с. 861–866.
13. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
14. Рогозин Б. А. Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме». — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 1, с. 125–128.
15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967, 752 с.
16. Чистяков Г. П. Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I, II, III. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 326–344; т. 46, в. 3, с. 573–579; 2002, т. 47, в. 3, с. 475–497.
17. Шевцова И. Г. Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 3, с. 622–626.
18. Шевцова И. Г. Об абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — Сб. статей молодых ученых факультета ВМиК МГУ, вып. 5. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2008, с. 101–110.
19. Шевцова И. Г. О неравенстве сглаживания. — Докл. РАН, 2010, т. 430, № 5, в печати.
20. Шевцова И. Г. Нижняя асимптотически правильная постоянная в центральной предельной теореме. — Докл. РАН, 2010, т. 430, № 4, в печати.
21. Шуганов И. С. Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара. М.: Изд-во ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.
22. van Beek P. Fourier-analytische Methoden zur Verscharfung der Berry–Esseen Schranke. — Doctoral dissertation, Friedrich Wilhelms Universität, Bonn, 1971.
23. van Beek P. An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry–Esseen inequality. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1972, B. 23, S. 187–196.
24. Bentkus V. On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality, Preprint 91–078, Universität Bielefeld, 1991.
25. Bentkus V. On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. — J. Theor. Probab., 1994, v. 2, № 2, p. 211–224.
26. Bergström H. On the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1944, v. 27, p. 139–153.
27. Bergström H. On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables. — Skand. Aktuarietidskr., 1949, v. 32, p. 37–62.

28. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variables. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–136.
29. *Cramér H.* Das Gesetz von Gauss und die Theorie des Risikos. — Skand. Aktuarietidskr., 1923, v. 6, p. 209–237.
30. *Cramér H.* On the composition of elementary errors. — Skand. Aktuarietidskr., 1928, v. 11, p. 141–180.
31. *Esseen C.-G.* On the Liapunoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19.
32. *Esseen C.-G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
33. *Hipp C., Mattner L.* On the normal approximation to symmetric binomial distributions. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 610–617.
34. *Hsu P. L.* The approximate distributions of the mean and variance of a sample of independent variables. — Ann. Math. Statist., 1945, v. 16, № 1, p. 1–29.
35. *Ikeda S.* A note on the normal approximation to the sum of independent random variables. — Ann. Inst. Statist. Math., 1959, v. 11, p. 121–130.
36. *Liapunoff A.* Sur une proposition de la théorie des probabilités. — Bull. Acad. Sci. St.-Petersbourg, 1900, v. 13, p. 359–386.
37. *Liapunoff A.* Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. — Mem. Acad. Sci. St.-Petersbourg, 1901, v. 12, № 5, p. 1–24.
38. *Prawitz H.* Limits for a distribution, if the characteristic function is given in a finite domain. — Scand. Aktuarietidskr., 1972, № 2, p. 138–154.
39. *Prawitz H.* Remainder term estimation for convolution of identical components. — Unpublished manuscript of the lecture given on 16 June, 1972 at the Summer School of the Swedish Statistical Society, 12–21 June, 1972, Lötörp, Sweden.
40. *Prawitz H.* Ungleichungen für den absoluten Betrag einer charakteristischen funktion. — Skand. Aktuarietidskr., 1973, № 1, p. 11–16.
41. *Prawitz H.* On the remainder in the central limit theorem. I. — Scand. Actuarial J., 1975, № 3, p. 145–156.
42. *Takano K.* A remark on Berry's paper. — Kakyuraku Inst. Statist. Math., 1950, v. 6 (in Japanese).
43. *Takano K.* A remark to a result of A. C. Berry. — Res. Mem. Inst. Math., 1951, v. 9, № 6, p. 4.08–4.15.
44. *Wallace D. L.* Asymptotic approximations to distributions. — Ann. Math. Statist., 1958, v. 29, p. 635–654.
45. *Wallace D. L.* A corrected computation of Berry's bound for the central limit theorem error. Chicago: Stat. Res. Cent., University of Chicago, 1959.
46. *Zahl S.* Bounds for the central limit theorem error. — Ph.D. Thesis, Harvard University, Cambridge, MA, 1963.
47. *Zahl S.* Bounds for the central limit theorem error. — SIAM J. Appl. Math., 1966, v. 14, № 6, p. 1225–1245.
48. *Zolotarev V. M.* A sharpening of the inequality of Berry–Esseen. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1967, B. 8, S. 332–342.

Поступила в редакцию
14.IX.2009

Исправленный вариант
20.X.2009