Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сенатов, О многомерных аналогах многочленов Чебышёва–Эрмита, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 4, 696–715

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 10:03:01

© 2009 г.

СЕНАТОВ В. В.*

О МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГАХ МНОГОЧЛЕНОВ
ЧЕБЫШЁВА–ЭРМИТА¹⁾

Показано, как с помощью многомерных аналогов многочленов Чебышёва–Эрмита, которые являются обобщениями полных многочленов Чебышёва–Эрмита из [1], можно получать асимптотические разложения для плотностей в центральной предельной теореме в многомерных пространствах. Приведен пример такого разложения.

Ключевые слова и фразы: многомерные распределения, центральная предельная теорема, асимптотические разложения, многочлены Чебышёва–Эрмита.

Пусть $p(x)$, $x \in E^d$, — плотность распределения вероятностей P с нулевым средним и единичным ковариационным оператором в d -мерном евклидовом пространстве E^d . В работе [1] было предложено представление плотности p , все моменты которой конечны, в виде

$$p(x) = \varphi(x) + \sum_{l=3}^{\infty} \frac{\theta H_l(x; p)}{l!} \varphi(x), \quad (1)$$

являющееся аналогом известного разложения Чебышёва при $d = 1$. Здесь $\varphi(x) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/2}$ — плотность нормального закона Φ с нулевым средним и единичным ковариационным оператором, $|x|$ — норма вектора $x \in E^d$, $\theta H_l(x; p)$ — функции, определенные равенствами

$$\theta H_l(x; p) = \int H H_l(x, u) p(u) du, \quad l = 3, 4, \dots,$$

где $H H_l(x, u)$ — линейные комбинации полилинейных функционалов:

$$H H_l(x, u) = l! \sum_{j=0}^{[l/2]} \frac{H_{l-2j}^{(2j)}(x)(u, \dots, u)}{(l-2j)!} \frac{(-1)^j}{j! 2^j}, \quad x, u \in E^d.$$

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: vladimir-cenatov@rambler.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №08-01-00563, 07-01-00362, 09-01-12173-офи-м).

Здесь и далее мы не указываем область интегрирования, поскольку она всегда совпадает со всем пространством E^d . Для полилинейных функционалов $H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l)$, $x, h_1, \dots, h_l \in E^d$, справедливы равенства

$$\frac{i^{l+2j}}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j} (t, h_1) \cdots (t, h_l) dt = H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l) \varphi(x),$$

$$l = 0, 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Здесь и далее i означает мнимую единицу, а (t, x) — скалярное произведение в E^d .

В [1] функционалы $H_l^{(2j)}$ назывались частичными, а HH_l — полными многочленами Чебышёва–Эрмита. По-видимому, прилагательное «полные» является неудачным, это будет ясно из дальнейшего. Отметим, что в одномерном случае функции $\theta H_l(x; p)$ распадаются в произведения моментов Чебышёва–Эрмита θ_l распределения P (см. [2]) и многочленов Чебышёва–Эрмита $H_l(x)$. Отметим также, что функции $\theta H_l(x; p)$ ортогональны с весом $\varphi(x)$.

Вопрос о сходимости ряда (1) в работе [1] не обсуждался, это связано с несколькими причинами, одна из которых состоит в том, что в теории вероятностей обычно интересуются не задачей о разложении плотности $p(x)$ в ряды (1), а задачей об аппроксимации плотностей (если они существуют) распределений P_n нормированных сумм независимых случайных величин отрезками рядов вида (1), при этом предполагается конечность лишь нескольких моментов.

Оказывается, что для решения второй задачи функций θH_l , вообще говоря, недостаточно. Основная цель данной работы — продемонстрировать, как можно расширить множество функций θH_l с тем, чтобы получить решение второй из упомянутых задач.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины с общим распределением P , принимающие значения в E^d . Предположим, что распределение P имеет нулевое среднее, единичный ковариационный оператор и для некоторого натурального $m \geq 2$ величина $\mathbf{E}|X_1|^{m+2}$ конечна. Для каждого $e \in E^d$, $|e| = 1$, обозначим

$$\alpha_k(e) = \int (e, u)^k P(du), \quad \beta_k(e) = \int |(e, u)|^k P(du),$$

$$\beta_k = \sup_{|e|=1} \beta_k(e), \quad \Delta_k(e) = \int (e, u)^k (P - \Phi)(du), \quad k = 3, 4, \dots, m+2,$$

кроме того, обозначим

$$f(t) = \int e^{i(t,u)} P(du)$$

характеристическую функцию распределения P . Мы будем также использовать величины $\bar{\beta}_k$, $k > 0$, которые определяются аналогично β_k , но интегрирование по мере P заменяется интегрированием по мере Φ . Легко понять, что величины $\bar{\beta}_k$ совпадают с абсолютными моментами порядка k одномерного стандартного нормального закона.

Далее рассматриваются только гладкие распределения P , а под гладкостью P понимается выполнение следующего условия.

У с л о в и е А. Существуют функция $\mu(t)$, $t \in E^d$, $e^{-|t|^2/2} \leq \mu(t) \leq 1$, и число $\nu > 0$ такие, что $|f(t)| \neq \mu(t)$, $t \in E^d$, и при всех $n \geq \nu$ интегралы

$$\int |t|^{(m+1)^2+1} \mu^{n-(m+1)} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt$$

не превосходят некоторой величины, не зависящей от n .

Это ограничение можно ослабить. Его аналоги в виде условий « $\int |f(t)|^\nu dt < \infty$ для некоторого $\nu > 0$ » и «существует пара (μ, T) , где функция $\mu(t) \geq e^{-t^2/2}$ и число $T > 0$ таковы, что $|f(t)| \leq \mu(t)$ при всех $|t| \leq T$ » присутствуют и обсуждаются в [3].

Отметим, что из выполнения условия А следует конечность величин

$$B_{m+2, n-1} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int |t|^{m+2} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt$$

при $n \geq \nu$. Отметим также, что для некоторых распределений P функцию μ можно подобрать так, что при фиксированных k, l и $n \rightarrow \infty$

$$B_{k, n-l} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int |t|^k \mu^{n-l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int |x|^k \varphi(x) dx.$$

В этом случае условие А заведомо выполнено.

Обозначим P_n распределение нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$. Выполнение условия А влечет существование плотности p_n распределения P_n при $n \geq \nu$, эту плотность можно вычислять по формуле обращения

$$p_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt.$$

Аналогичная формула справедлива и для плотности φ нормального закона Φ с нулевым средним и единичным ковариационным оператором:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt,$$

где $g(t) = e^{-|t|^2/2}$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Для $n \geq \max(\nu, 2m)$ при всех $x \in E^d$

$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \sum_{k=1}^m C_n^k e^{k|t|^2/(2n)} \times \left(\sum_{s=3}^{m+1} \frac{i^s \Delta_s(e_t)}{s!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^s \right)^k dt + R,$$

$$2de \, e_t = t/|t| \, u$$

$$|R| \leq \frac{\beta_{m+2} + \bar{\beta}_{m+2}}{(m+2)!} \frac{B_{m+2,n-1}}{n^{m/2}} + O\left(\frac{1}{n^{(m+1)/2}}\right)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы основано на многократном использовании хорошо известного равенства

$$a^n - b^n = \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} b^j (a - b), \quad (3)$$

которое справедливо для любых натуральных n и комплексных a, b .

Легко видеть, что разность $p_n(x) - \varphi(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} p_n(x) - \varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) dt \\ &= \sum_{j_1=0}^{n-1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^{j_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &\quad \times \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) dt. \end{aligned}$$

Из формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме следует, что для любого действительного α

$$e^{i\alpha} = \sum_{s=0}^k \frac{(i\alpha)^s}{s!} + \gamma \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!},$$

где k — произвольное неотрицательное целое число и γ — непрерывная комплекснозначная функция такая, что $|\gamma| \leq 1$. Поскольку средние и ковариационные операторы распределений P и Φ совпадают, то

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \int e^{i(u,t/\sqrt{n})} (P - \Phi)(du) \\ &= \sum_{s=3}^{m+1} \int \frac{i^s (u, t/\sqrt{n})^s}{s!} (P - \Phi)(du) + r(t) = A_n(t) + r(t), \end{aligned}$$

где

$$A_n(t) = \sum_{s=3}^{m+1} \frac{i^s \Delta_s(e_t)}{s!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^s \quad \text{и} \quad |r(t)| \leq \frac{\beta_{m+2} + \bar{\beta}_{m+2}}{(m+2)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+2}.$$

С помощью этих обозначений мы можем записать разность $p_n(x) - \varphi(x)$ в виде

$$\sum_{j_1=0}^{n-1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g^{j_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n(t) dt + R_1, \quad (4)$$

где

$$|R_1| \leq \frac{n}{(2\pi)^d} \int \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) |r(t)| dt.$$

Используя еще раз равенство (3), мы можем записать сумму по $j_1 = 0, \dots, n-1$ из (4) в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=0}^{n-2} \sum_{j_2=0}^{n-j_1-2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-j_2-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g^{j_1+j_2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ & \quad \times \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) A_n(t) dt \\ & + \frac{n}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n(t) dt \\ & = \sum^{(2)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-j_2-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g^{j_1+j_2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^2(t) dt \\ & + \sum^{(2)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-j_2-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g^{j_1+j_2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n(t) r(t) dt \\ & + \frac{n}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n(t) dt. \end{aligned}$$

Здесь и далее $\sum^{(l)}$, где $2 \leq l < n$ — целое число, означает суммирование по всем таким наборам $j_1, \dots, j_l$ неотрицательных целых чисел, что $j_1 + \dots + j_l \leq n-l$. Нетрудно проверить, что число таких наборов равно C_n^l .

Из сказанного следует, что разность $p_n(x) - \varphi(x)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum^{(2)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-j_2-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g^{j_1+j_2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^2(t) dt \\ & + C_n^1 \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n(t) dt + R_1 + R_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |R_1| & \leq C_n^1 \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) |r(t)| dt, \\ |R_2| & \leq C_n^2 \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) |A_n(t)| |r(t)| dt. \end{aligned}$$

Повторяя преобразование (3) многократно, мы приходим к выводу о том, что разность $p_n(x) - \varphi(x)$ для любого $2 \leq l < n$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum^{(l)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-\dots-j_l-l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g^{j_1+\dots+j_l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^l(t) dt \\ & + \sum_{k=1}^{l-1} C_n^k \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^{n-k} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^k(t) dt + \sum_{k=1}^l R_k, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$|R_k| \leq C_n^k \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mu^{n-k} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) |A_n(t)|^{k-1} |r(t)| dt.$$

Действительно, мы только что видели, что это утверждение справедливо для $l = 2$. Пусть $2 \leq l < n - 1$. Рассмотрим в первой из сумм из (5) те наборы $j_1, \dots, j_l$, для которых $j_1 + \dots + j_l \leq n - l - 1$. Для таких наборов показатели степени у $f(t/\sqrt{n})$ положительны. Обозначив часть суммы $\sum^{(l)}$ по таким наборам через $\sum^{[l]}$, мы видим, что она равна

$$\begin{aligned} & \sum^{[l]} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} \left(f^{n-j_1-\dots-j_l-l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g^{n-j_1-\dots-j_l-l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) \\ & \times g^{j_1+\dots+j_l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^l(t) dt + \frac{N}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^{n-l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^l(t) dt \\ & = \sum^{[l]} \sum_{j_{l+1}=0}^{n-j_1-\dots-j_l-l-1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-\dots-j_l-l-j_{l+1}-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g^{j_{l+1}} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ & \times \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) g^{j_1+\dots+j_l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^l(t) dt \\ & + \frac{N}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^{n-l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^l(t) dt \\ & = \sum^{[l]} \sum_{j_{l+1}=0}^{n-j_1-\dots-j_l-(l+1)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-\dots-j_l-j_{l+1}-(l+1)} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ & \times g^{j_1+\dots+j_{l+1}} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^{l+1}(t) dt \\ & + \sum^{[l]} \sum_{j_{l+1}=0}^{n-j_1-\dots-j_l-(l+1)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-\dots-j_l-j_{l+1}-(l+1)} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ & \times g^{j_1+\dots+j_{l+1}} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^l(t) r(t) dt \\ & + \frac{N}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^{n-l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^l(t) dt, \end{aligned} \quad (6)$$

где N — число таких наборов.

Заметим теперь, что правую часть (6), за исключением последнего слагаемого, можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum^{(l+1)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-\dots-j_l-j_{l+1}-(l+1)} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ & \quad \times g^{j_1+\dots+j_{l+1}} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^{l+1}(t) dt \\ & + \sum^{(l+1)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-\dots-j_l-j_{l+1}-(l+1)} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ & \quad \times g^{j_1+\dots+j_{l+1}} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^l(t) r(t) dt. \end{aligned}$$

В сумме $\sum^{(l)}$ из (5) присутствуют также наборы $j_1, \dots, j_l$, для которых $j_1 + \dots + j_l = n - l$. Для таких наборов слагаемые в сумме $\sum^{(l)}$ из (5) имеют вид

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^{n-l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n(T) dt,$$

т.е. с точностью до множителя N совпадают с последним слагаемым в (6).

Теперь понятно, что величину (5) для $2 \leq l < n - 1$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum^{(l+1)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-\dots-j_{l+1}-(l+1)} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g^{j_1+\dots+j_{l+1}} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^{l+1}(t) dt \\ & + C_n^l \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^{n-l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^l(t) dt \\ & + \sum_{k=1}^{l-1} C_n^k \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} g^{n-k} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^k(t) dt + \sum_{k=1}^l R_k + R_{l+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{l+1} &= \sum^{(l+1)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} f^{n-j_1-\dots-j_{l+1}-(l+1)} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ & \quad \times g^{j_1+\dots+j_{l+1}} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) A_n^l(t) r(t) dt, \\ |R_{l+1}| &\leq C_n^{l+1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mu^{n-(l+1)} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) |A_n(t)|^l |r(t)| dt, \end{aligned}$$

т.е. представление (5) верно и при замене l на $l + 1$, если $l + 1 < n$, что и требовалось.

Положив в (5) $l = m + 1$ и вспоминая о том, что $A_n(t) = \sum_{s=3}^{m+1} (i^s \Delta_s(e_t)/s!) |t/\sqrt{n}|^s$ и $g(t) = e^{-|t|^2/2}$, мы видим, что разность

$p_n(x) - \varphi(x)$ можно записать в виде

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \sum_{k=1}^m C_n^k e^{k|t|^2/(2n)} \left(\sum_{s=3}^{m+1} \frac{i^s \Delta_s(e_t)}{s!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^s \right)^k dt + \sum_{k=1}^{m+1} R_k + R,$$

где $|R| \leq C_n^{m+1} (2\pi)^{-d} \int \mu^{n-(m+1)} (t/\sqrt{n}) |A_n(t)|^{m+1} dt$. Абсолютная величина функции $A_n(t)$ не превосходит суммы величин $|t|^a/n^b$ с коэффициентами, не зависящими от t и n . При этом натуральные числа a не превосходят $m+1$, а числа b не меньше $3/2$. Поэтому $|A_n(t)|^{m+1}$ не превосходит суммы величин $|t|^\alpha/n^\beta$ с некоторыми коэффициентами, не зависящими от t и n , при этом натуральные числа α не превосходят $(m+1)^2$, а числа β не меньше $3(m+1)/2$. Так как при росте n величины C_n^{m+1} растут как n^{m+1} , то в силу условия А величина R есть $O(1/n^{(m+1)/2})$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогичные рассуждения показывают, что и величины R_k , $k \geq 2$, суть $O(n^{-(m+1)/2})$ при $n \rightarrow \infty$. Простая оценка

$$|R_1| \leq \frac{\beta_{m+2} + \bar{\beta}_{m+2}}{(m+2)!} \frac{B_{m+2,n-1}}{n^{m/2}}$$

завершает доказательство леммы.

Отметим, что доказательство леммы во многом повторяет доказательство теоремы § 14 главы 4 из [3].

Из утверждения леммы следует, что с точностью до величины R , указанной в ее формулировке, разность $p_n(x) - \varphi(x)$ есть

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} C_n^k e^{k|t|^2/(2n)} \left(\sum_{s=3}^{m+1} \frac{i^s \Delta_s(e_t)}{s!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^s \right)^k dt \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{k_3, \dots, k_{m+1}} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} C_n^k e^{k|t|^2/(2n)} \frac{k!}{k_3! \dots k_{m+1}!} \\ & \quad \times \left(\frac{i^3 \Delta_3(e_t)}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 \right)^{k_3} \dots \left(\frac{i^{m+1} \Delta_{m+1}(e_t)}{(m+1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+1} \right)^{k_{m+1}} dt, \quad (7) \end{aligned}$$

где внутреннее суммирование ведется по всем наборам неотрицательных целых чисел $k_3, \dots, k_{m+1}$ таким, что $k_3 + \dots + k_{m+1} = k$. Зависимость наборов $k_3, \dots, k_{m+1}$ от величины k мы не указываем, это не должно вызвать недоразумений. Для данного k число этих наборов $k_3, \dots, k_{m+1}$ равно C_{k+m-2}^{m-2} .

Правую часть (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \sum_{k_3, \dots, k_{m+1}} \frac{i^l}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} e^{k|t|^2/(2n)} \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \\ & \quad \times \left(\frac{\Delta_3(e_t)}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 \right)^{k_3} \dots \left(\frac{\Delta_{m+1}(e_t)}{(m+1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+1} \right)^{k_{m+1}} dt, \quad (8) \end{aligned}$$

где $l = 3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1}$.

Слагаемые в (8), которые соответствуют наборам $k_3, \dots, k_{m+1}$ таким, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^{l/2}} = O\left(\frac{1}{n^{(m+1)/2}}\right) \quad \left(\text{или } o\left(\frac{1}{n^{(m+1)/2}}\right)\right),$$

мы включим в остаточную часть разложения p_n . Эти слагаемые при росте n убывают как $1/n^{(m+1)/2}$ или быстрее. Для того чтобы проверить это, можно использовать рассуждения, аналогичные тем, что проводились в конце доказательства леммы, но при этом вместо условия А нужно использовать присутствие в подынтегральных выражениях в (8) множителя $e^{-|t|^2/2}$ и условие $m \leq n/2$ из формулировки леммы.

Таким образом, главная часть разложения p_n будет формироваться только суммой из (8) (назовем ее основной) по $k = 1, \dots, m$ и по таким наборам $k_3, \dots, k_{m+1}$, для которых $k_3 + \dots + k_{m+1} = k$ и

$$3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1} \leq m + 2k. \quad (9)$$

Отметим, что в основную сумму войдут все слагаемые из (8), связанные с $k = 1$, и войдет лишь одно слагаемое, связанное с $k = m$ (оно соответствует набору $k_3, \dots, k_{m+1}$, для которого $k_3 = m, k_4 = \dots = k_{m+1} = 0, m \geq 3$).

Для каждого набора $k_3, \dots, k_{m+1}$, $k_3 + \dots + k_{m+1} = k$, для которого выполняется условие (9), представим $e^{k|t|^2/(2n)}$ в виде

$$\sum_{j=0}^J \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{k}{n}\right)^j (i|t|)^{2j} + R^{(J)},$$

где $J = J(k_3, \dots, k_{m+1})$ — минимальное неотрицательное целое число, для которого

$$\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^{l/2}} \frac{1}{n^J} = O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right).$$

Нетрудно проверить, что

$$J = \left\lfloor \frac{m}{2} + k - \frac{3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{2} - \frac{k_3 + \dots + (m-1)k_{m+1}}{2} \right\rfloor, \quad (10)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ означает целую часть, и

$$|R^{(J)}| \leq \frac{1}{(J+1)! 2^{J+1}} \left(\frac{k}{n}\right)^{J+1} e^{k|t|^2/(2n)}.$$

Теперь должно стать ясно, что

$$\begin{aligned}
 p_n(x) = & \varphi(x) + \sum_{k=1}^m \sum_{k_3, \dots, k_{m+1}} \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \\
 & \times \sum_{j=0}^J \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{k}{n}\right)^j \frac{i^{l+2j}}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j} \\
 & \times \left(\frac{\Delta_3(e_t)}{3!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^3\right)^{k_3} \dots \left(\frac{\Delta_{m+1}(e_t)}{(m+1)!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{m+1}\right)^{k_{m+1}} dt \\
 & + R_1 + O\left(\frac{1}{n^{(m+1)/2}}\right) \quad (11)
 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по x , где для наборов $k_3, \dots, k_{m+1}$, $k_3 + \dots + k_{m+1} = k$, выполнено условие (9), числа J определены в (10) и величина R_1 определена при доказательстве леммы.

Сумму по $k = 1, \dots, m$ в правой части (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^m \sum_{k_3, \dots, k_{m+1}} \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \frac{1}{(3!)^{k_3} \dots ((m+1)!)^{k_{m+1}}} \frac{1}{n^{l/2}} \\
 & \times \sum_{j=0}^J \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{k}{n}\right)^j \frac{i^{l+2j}}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j} \\
 & \times \left(\int (t, u)^3 Q(du)\right)^{k_3} \dots \left(\int (t, u)^{m+1} Q(du)\right)^{k_{m+1}} dt, \quad (12)
 \end{aligned}$$

где Q обозначает разность мер P и Φ . Последние интегралы, т.е.

$$\int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j} \left(\int (t, u)^3 Q(du)\right)^{k_3} \dots \left(\int (t, u)^{m+1} Q(du)\right)^{k_{m+1}} dt, \quad (13)$$

мы можем записать в виде

$$\begin{aligned}
 & \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j} \int (t, u_1^{(3)})^3 Q(du_1^{(3)}) \dots \int (t, u_{k_3}^{(3)})^3 Q(du_{k_3}^{(3)}) \times \dots \\
 & \times \int (t, u_1^{(m+1)})^{m+1} Q(du_1^{(m+1)}) \dots \int (t, u_{k_{m+1}}^{(m+1)})^{m+1} Q(du_{k_{m+1}}^{(m+1)}) dt \\
 & = \int \left\{ \int \dots \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j} (t, u_1^{(3)})^3 \times \dots \right. \\
 & \quad \times (t, u_{k_3}^{(3)}) \dots (t, u_1^{(m+1)})^{m+1} \dots (t, u_{k_{m+1}}^{(m+1)})^{m+1} \\
 & \quad \left. \times Q(du_1^{(3)}) \dots Q(du_{k_3}^{(3)}) \dots Q(du_1^{(m+1)}) \dots Q(du_{k_{m+1}}^{(m+1)}) \right\} dt, \quad (14)
 \end{aligned}$$

где $u_r^{(s)} \in E^d$, $s = 3, \dots, m+1$, $r = 1, \dots, k_s$, величины, связанные с $u_r^{(s)}$, следует опустить, если $k_s = 0$. Изменив в правой части (14) порядок

интегрирования по t и по $u_1^{(3)}$ (если $k_3 > 0$), мы видим, что она равна

$$\int \left\{ \int \dots \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j} (t, u_1^{(3)})^3 (t, u_2^{(3)})^3 \dots (t, u_{k_{m+1}}^{(m+1)})^{m+1} \right. \\ \left. \times Q(du_2^{(3)}) \dots Q(du_{k_{m+1}}^{(m+1)}) dt \right\} Q(du_1^{(3)})$$

(величины, связанные с $u_2^{(3)}$, следует опустить, если $k_3 = 1$). Повторяя изменение порядка интегрирования (число таких изменений равно k), мы видим, что правую часть (14) можно представить в виде

$$\int \dots \int \left\{ \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j} (t, u_1^{(3)})^3 \dots (t, u_{k_3}^{(3)})^3 \times \dots \right. \\ \left. \times (t, u_1^{(m+1)})^{m+1} \dots (t, u_{k_{m+1}}^{(m+1)})^{m+1} dt \right\} \\ \times Q(du_1^{(3)}) \dots Q(du_{k_3}^{(3)}) \dots Q(du_1^{(m+1)}) \dots Q(du_{k_{m+1}}^{(m+1)}).$$

Воспользовавшись формулой обращения (2), мы видим, что произведение $i^{l+2j}/(2\pi)^d$ и интеграла (13) равно

$$\varphi(x) \int \dots \int H_l^{(2j)}(x) (u_1^{(3)}, u_1^{(3)}, u_1^{(3)}, \dots, u_{k_3}^{(3)}, u_{k_3}^{(3)}, u_{k_3}^{(3)}, \\ \dots, \underbrace{u_{k_{m+1}}^{(m+1)}, \dots, u_{k_{m+1}}^{(m+1)}}_{(m+1) \text{ раз}} Q(du_1^{(3)}) \dots Q(du_{k_3}^{(3)}) \dots Q(du_{k_{m+1}}^{(m+1)}),$$

если $k_3 > 1$ (если $k_3 = 1$, то интегрирование по $u_{k_3}^{(3)}$, $k_3 > 1$, отсутствует и в аргументах $H_l^{(2j)}$ сразу после тройки $u_1^{(3)}, u_1^{(3)}, u_1^{(3)}$ следует четверка переменных $u_1^{(4)}, u_1^{(4)}, u_1^{(4)}, u_1^{(4)}$, при условии $k_4 > 0$; это изменение и ему аналогичные достаточно очевидны). Здесь l -линейный функционал $H_l^{(2j)}(x)(\dots)$ (напомним, что $l = 3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1}$) действует на векторы $u_1^{(3)}, \dots, u_{k_{m+1}}^{(m+1)}$, для $k_s > 0$ каждый из векторов $u_r^{(s)}$, $s = 3, \dots, m+1$, $r = 1, \dots, k_s$, среди аргументов $H_l^{(2j)}(x)(\dots)$ встречается s раз, интегрирование проводится k раз.

Отметим, что в одномерном случае последний интеграл равен

$$H_{l+2j}(x) \Delta_3^{k_3} \dots \Delta_{m+1}^{k_{m+1}},$$

где $H_{l+2j}(x)$ — многочлен Чебышёва–Эрмита порядка $l+2j$, а Δ_s , $s = 3, \dots, m+1$, — разность моментов порядка s распределений P и Φ .

Из сказанного выше следует справедливость следующего утверждения.

Теорема. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины, имеющие общее распределение P с нулевым средним и единичным ковариационным оператором, для которого существует момент β_{m+2} ,

$m \geq 2$, и выполнено условие А. При всех $n \geq \max(\nu, 2m)$ у распределения P_n нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ существует плотность $p_n(x)$ и для всех $x \in E^d$

$$\begin{aligned} p_n(x) = & \varphi(x) + \sum_{k=1}^m \sum_{k_3, \dots, k_{m+1}} \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \\ & \times \frac{1}{(3!)^{k_3} \dots ((m+1)!)^{k_{m+1}}} \frac{\varphi(x)}{n^{(3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1})/2}} \\ & \times \sum_{j=0}^J \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{k}{n}\right)^j \int \dots \int H_{3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1}}^{(2j)}(x) (u_1^{(3)}, \dots, u_{k_{m+1}}^{(m+1)}) \\ & \times Q(du_1^{(3)}) \dots Q(du_{k_{m+1}}^{(m+1)}) + R, \end{aligned} \quad (15)$$

где $Q = P - \Phi$ и

$$|R| \leq \frac{\beta_{m+2} + \bar{\beta}_{m+2}}{(m+2)!} \frac{B_{m+2, n-1}}{n^{m/2}} + O\left(\frac{1}{n^{(m+1)/2}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Здесь внутреннее суммирование проводится по всем наборам неотрицательных целых чисел $k_3, \dots, k_{m+1}$ таким, что

$$k_3 + \dots + k_{m+1} = k, \quad 3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1} \leq m + 2k,$$

$$\text{и } J = [m/2 + k - (3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1})/2].$$

Отметим, что если слагаемые, участвующие в главной части разложения (15), разделить на $\varphi(x)$, то получатся функции переменной $x \in E^d$, которые для различных значений сумм $3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1} + 2j$ ортогональны с весом $\varphi(x)$.

Рассмотрим суммы слагаемых из главной части разложения (15), соответствующие некоторым значениям переменной суммирования k .

При $k = 1$ существует $m-1$ решение уравнения $k_3 + \dots + k_{m+1} = k$, в каждом из которых ровно одна из величин $k_3, \dots, k_{m+1}$ равна единице, а остальные — нули. Легко проверить, что для каждого из этих решений выполняется условие (9). Для набора $k_3, \dots, k_{m+1}$, в котором $k_s = 1$, $s = 3, \dots, m+1$, величина J равна $[m/2 + 1 - s/2]$. Поэтому сумму слагаемых из (15), соответствующую $k = 1$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{s=3}^{m+1} n \frac{1}{s!} \frac{\varphi(x)}{n^{s/2}} \sum_{j=0}^{[(m-s)/2+1]} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \int H_s^{(2j)}(x) (u_1^{(s)}, \dots, u_1^{(s)}) Q(du_1^{(s)}) \\ & = \sum_{s=3}^{m+1} \frac{\varphi(x)}{s! n^{(s-2)/2}} \sum_{j=0}^{[(m-s)/2+1]} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \int H_s^{(2j)}(x) \underbrace{(u, \dots, u)}_{s \text{ раз}} Q(du). \end{aligned} \quad (16)$$

В частности, при $m = 4$ (т.е., когда $\beta_6 < \infty$) сумма (16) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=3}^5 \frac{\varphi(x)}{s! n^{(s-2)/2}} \sum_{j=0}^{[3-s/2]} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \int H_s^{(2j)}(x)(u, \dots, u) Q(du) \\
 &= \frac{\varphi(x)}{3! \sqrt{n}} \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \int H_3^{(2j)}(x)(u, u, u) Q(du) \\
 &+ \frac{\varphi(x)}{4! n} \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \int H_4^{(2j)}(x)(u, u, u, u) Q(du) \\
 &+ \frac{\varphi(x)}{5! n^{3/2}} \int H_5^{(0)}(x)(u, u, u, u, u) Q(du) \\
 &= \frac{\varphi(x)}{3! \sqrt{n}} \int H_3^{(0)}(x)(u, u, u) Q(du) - \frac{\varphi(x)}{3! \cdot 2n^{3/2}} \int H_3^{(2)}(x)(u, u, u) Q(du) \\
 &+ \frac{\varphi(x)}{4! n} \int H_4^{(0)}(x)(u, u, u, u) Q(du) - \frac{\varphi(x)}{4! \cdot 2n^2} \int H_4^{(2)}(x)(u, u, u, u) Q(du) \\
 &+ \frac{\varphi(x)}{5! n^{3/2}} \int H_5^{(0)}(x)(u, u, u, u, u) Q(du).
 \end{aligned}$$

Отметим, что последняя сумма без четвертого слагаемого совпадает при $n = 1$ с суммой по $l = 3, 4, 5$ отрезка ряда (1). Другие значения переменной k мы рассмотрим ниже, а сейчас разберемся с вопросом о связи разложения, полученного в теореме, с разложением (1). Положим в (16) $n = 1$ и запишем правую часть этого равенства в виде

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=3}^{m+1} \sum_{j=0}^{[(m-s)/2+1]} \frac{\varphi(x)}{s!} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \int H_s^{(2j)}(x)(u, \dots, u) Q(du) \\
 &= \sum_{s=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{[(m-s)/2+1]} a_s^{(2j)}
 \end{aligned} \tag{17}$$

(нетрудно проверить, что величины $a_s^{(2j)}$ при $s = 0, 1, 2$ равны нулю). По условию теоремы величина n строго больше единицы, но сейчас нас это не смущает, мы также не делаем очевидных оговорок, необходимых для справедливости рассуждений, проводимых ниже. Сумму в правой части (17) можно записать в виде

$$\sum_{l=3}^{m+1} \sum_{j=0}^{[l/2]} a_{l-2j}^{(2j)} + \sum_{j=1}^{[(m+1)/2]} a_{m+2-2j}^{(2j)}. \tag{18}$$

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим на плоскости с декартовой системой координат точки

$$(s, j), \quad j = 0, \dots, \left[\frac{m-s}{2} + 1 \right], \quad s = m+1, \dots, 3, 2, 1, 0. \tag{19}$$

Здесь мы считаем, что $m \geq 5$, случаи $m = 4, 3, 2$ рассматриваются аналогично. Отметим точки $(m+1-2j, j)$, $j = 0, 1, \dots, [(m+1)/2]$, и составим сумму

$$\sum_{j=0}^{[l/2]} a_{l-2j}^{(2j)},$$

где $l = m+1$, соответствующую этим точкам. Далее отметим точки $(m-2j, j)$, $j = 0, 1, \dots, [m/2]$, и составим сумму

$$\sum_{j=0}^{[l/2]} a_{l-2j}^{(2j)},$$

где $l = m$, соответствующую этим точкам. Продолжая этот процесс, мы отметим все точки, координаты которых указаны в (19) и которые лежат ниже уже указанных точек. Сумма величин $a_s^{(2j)}$, соответствующих отмеченным точкам, есть

$$\sum_{l=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{[l/2]} a_{l-2j}^{(2j)} = \sum_{l=3}^{m+1} \sum_{j=0}^{[l/2]} a_{l-2j}^{(2j)}.$$

Среди точек с координатами (19) остались неотмеченные, и легко видеть, что сумма соответствующих им величин $a_s^{(2j)}$ есть

$$\sum_{j=1}^{[(m+1)/2]} a_{m+2-2j}^{(2j)}.$$

Таким образом, левую часть (17) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{l=3}^{m+1} \sum_{j=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \frac{1}{(l-2j)!} \int H_{l-2j}^{(2j)}(x)(u, \dots, u) (P - \Phi)(du) \\ & + \varphi(x) \sum_{j=1}^{[(m+1)/2]} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \int H_{m+2-2j}^{(2j)}(x)(u, \dots, u) (P - \Phi)(du). \quad (20) \end{aligned}$$

Формально переходя к пределу по $m \rightarrow \infty$, мы видим, что последнее выражение в пределе совпадает с рядом в (1). Формальность этого перехода состоит в том, что число слагаемых в левой части (17) больше числа слагаемых в сумме по $l = 3, \dots, m+1$ в (20), но для каждого фиксированного m последняя сумма из (20) в пределе войдет в сумму по $l = 3, 4, \dots$ из (20).

Рассмотрим теперь суммы из (15), соответствующие значениям $k = 2$, $k = m$ и $k = m-1$.

При $k = 2$ имеется $C_m^{m-2} = m(m-1)/2$ решений уравнения $k_3 + \dots + k_{m+1} = k$, среди них $m-1$ решение, в котором ровно одно число

из $k_3, \dots, k_{m+1}$ равно двум, остальные нули, и $C_{m-1}^2 = (m-1)(m-2)/2$ решений, в которых ровно две единицы, остальные — нули. Рассмотрим вначале наборы чисел $k_3, \dots, k_{m+1}$, в которых ровно два числа k_{s_1} и k_{s_2} , $3 \leq s_1 < s_2 \leq m+1$, равны единице, а остальные — нули. Легко проверить, что условие (9) можно записать в виде $s_1 + s_2 \leq m+4$, а величины J для таких наборов равны $[(m+4)/2 - (s_2 + s_2)/2]$. Поэтому для $k = 2$ часть суммы (15), соответствующая таким наборам $k_3, \dots, k_{m+1}$, есть

$$\sum_{\substack{3 \leq s_1 < s_2 \leq m+1 \\ s_1 + s_2 \leq m+4}} n(n-1) \frac{1}{s_1! s_2!} \frac{\varphi(x)}{n^{(s_1+s_2)/2}} \sum_{j=0}^{[(m+4)/2 - (s_1+s_2)/2]} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{2}{n}\right)^j \times \iint H_{s_1+s_2}^{(2j)}(x) (\underbrace{u, \dots, u}_{s_1}, \underbrace{v, \dots, v}_{s_2}) Q(du) Q(dv). \quad (21)$$

В частности, при $m = 4$ величины $J = [4 - (s_1 + s_2)/2]$ равны нулю и сумма (21) приобретает вид

$$\frac{n-1}{n} \sum_{\substack{3 \leq s_1 < s_2 \leq 5 \\ s_1 + s_2 \leq 8}} \frac{1}{s_1! s_2!} \frac{\varphi(x)}{n^{(s_1-2)/2 + (s_2-2)/2}} \times \iint H_{s_1+s_2}^{(0)}(x) (u, \dots, u, v, \dots, v) Q(du) Q(dv).$$

Легко видеть, что последняя сумма состоит лишь из двух слагаемых, для которых $s_1 = 3$, $s_2 = 4$ и $s_1 = 3$, $s_2 = 5$, т.е. она равна

$$\frac{n-1}{n} \frac{\varphi(x)}{3! 4! n^{3/2}} \iint H_7^{(0)}(x) (u, u, u, v, v, v, v) Q(du) Q(dv) + \frac{n-1}{n} \frac{\varphi(x)}{3! 5! n^2} \iint H_8^{(0)}(x) (u, u, u, v, v, v, v) Q(du) Q(dv).$$

Рассмотрим теперь наборы $k_3, \dots, k_{m+1}$, в которых число k_s равно 2, $3 \leq s \leq m+1$, а остальные — нули. Для таких наборов условие (9) превращается в условие $2s \leq m+4$, или $s \leq m/2 + 2$. Последнее неравенство сильнее неравенства $s \leq m+1$ при $m \geq 2$, а только такие m мы и рассматриваем. Величины J для рассматриваемых наборов суть $[(m+4)/2 - s]$. Поэтому для $k = 2$ часть суммы (15), соответствующая таким наборам $k_3, \dots, k_{m+1}$, есть

$$\sum_{s=3}^{[m/2+2]} \frac{n!}{(n-2)! 2!} \frac{1}{(s!)^2} \frac{\varphi(s)}{n^s} \sum_{j=0}^{[(m+4)/2 - s]} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{2}{n}\right)^j \times \iint H_{2s}^{(2j)}(x) (\underbrace{u, \dots, u}_s, \underbrace{v, \dots, v}_s) Q(du) Q(dv). \quad (22)$$

В частности, при $m = 4$ сумма (22) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \frac{n-1}{2n} \frac{1}{(3!)^2} \frac{\varphi(x)}{n} \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^j}{j!} \left(\frac{1}{n}\right)^j \iint H_6^{(2j)}(x)(u, u, u, v, v, v) Q(du) Q(dv) \\ & + \frac{n-1}{2n} \frac{1}{(4!)^2} \frac{\varphi(x)}{n^2} \iint H_8^{(0)}(x)(u, u, u, u, v, v, v, v) Q(du) Q(dv), \end{aligned}$$

и ясно, что сумма по $j = 0, 1$ дает слагаемые

$$\frac{n-1}{2n} \frac{1}{(3!)^2} \frac{\varphi(x)}{n} \iint H_6^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v) Q(du) Q(dv)$$

и

$$-\frac{n-1}{2n} \frac{1}{(3!)^2} \frac{\varphi(x)}{n^2} \iint H_6^{(2)}(x)(u, u, u, v, v, v) Q(du) Q(dv).$$

При $k = m$ существует лишь один набор $k_3, \dots, k_{m+1}$, для которого $k_3 + \dots + k_{m+1} = m$ и выполнено условие (9). В этом наборе число k_3 равно m , все остальные — нули. Величина J на этом наборе равна нулю и сумма слагаемых из (15), соответствующая $k = m$, сведется к одной величине

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{(n-m)!m!} \frac{\varphi(x)}{(3!)^m n^{3m/2}} \\ & \times \int \dots \int H_{3m}^{(0)}(x)(u_1, u_1, u_1, \dots, u_m, u_m, u_m) Q(du_1) \dots Q(du_m). \end{aligned}$$

В частности, при $m = 4$ последняя величина равна

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!n^3} \frac{\varphi(x)}{(3!)^4 n^2} \\ & \times \int \dots \int H_{12}^{(0)}(x)(u_1, u_1, u_1, u_2, u_2, u_2, u_3, u_3, u_3, u_4, u_4, u_4) \\ & \times Q(du_1) Q(du_2) Q(du_3) Q(du_4). \end{aligned}$$

При $k = m - 1$ условие (9) принимает вид $3k_3 + \dots + (m+1) \times k_{m+1} \leq 3m - 2$. Этому условию удовлетворяют только два набора чисел $k_3, \dots, k_{m+1}$, для которых $k_3 + \dots + k_{m+1} = m - 1$. В одном из них $k_3 = m - 1$, остальные — нули, а в другом $k_3 = m - 2, k_4 = 1$, остальные — нули. Сумма слагаемых из (15), соответствующая $k = m - 1$, сводится к сумме двух величин

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{(n-(m-1))!(m-1)!} \frac{\varphi(x)}{(3!)^{m-1} n^{3(m-1)/2}} \\ & \times \int \dots \int H_{3m-3}^{(0)}(x)(u_1^{(3)}, u_1^{(3)}, u_1^{(3)}, \dots, u_{m-1}^{(3)}, u_{m-1}^{(3)}, u_{m-1}^{(3)}) \\ & \times Q(du_1^{(3)}) \dots Q(du_{m-1}^{(3)}) \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$\frac{n!}{(n-(m-1))!(m-2)!} \frac{\varphi(x)}{(3!)^{m-2} 4! n^{(3m-2)/2}} \times \int \cdots \int H_{3m-2}^{(0)}(x)(u_1^{(3)}, u_1^{(3)}, u_1^{(3)}, \dots, u_{m-2}^{(3)}, u_{m-2}^{(3)}, u_{m-2}^{(3)}, u_1^{(4)}, u_1^{(4)}, u_1^{(4)}, u_1^{(4)}) \times Q(du_1^{(3)}) \cdots Q(du_{m-2}^{(3)}) Q(du_1^{(4)}). \quad (24)$$

В частности, при $m = 4$ величина (23) принимает вид

$$\frac{(n-1)(n-2)}{3! n^2} \frac{\varphi(x)}{(3!)^3 n^{3/2}} \iiint H_9^{(0)}(x)(u_1, u_1, u_1, u_2, u_2, u_2, u_3, u_3, u_3) \times Q(du_1) Q(du_2) Q(du_3),$$

а величина (24) — вид

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2n^2} \frac{\varphi(x)}{(3!)^2 4! n^2} \iiint H_{10}^{(0)}(x)(u_1, u_1, u_1, u_2, u_2, u_2, v, v, v, v) \times Q(du_1) Q(du_2) Q(dv).$$

Теперь мы можем получить разложение плотности $p_n(x)$, справедливое при выполнении условий теоремы для $m = 4$. Нам будет удобно несколько преобразовать полученные интегралы.

Заметим, что произведения зарядов $Q(du_1) \cdots Q(du_k)$ можно представить в виде знакопеременных сумм мер $P(du_1)P(du_2) \cdots P(du_k)$, $-\Phi(du_1)P(du_2) \cdots P(du_k), \dots, \pm \Phi(du_1) \cdots \Phi(du_k)$. В каждом из полученных интегралов можно провести интегрирование по произведениям мер, содержащих сомножитель $\Phi(du)$. При этом, если переменная u , по которой производится интегрирование, входит в аргументы частичных многочленов Чебышёва–Эрмита нечетное число раз, то результатом интегрирования будет нуль, а если переменная u входит в аргументы этих многочленов четное число, скажем s , раз, то в результате интегрирования нижний индекс частичного многочлена Чебышёва–Эрмита и число его аргументов уменьшатся на величину s , верхний индекс многочлена Чебышёва–Эрмита увеличится на величину s и перед интегралом появится множитель $\bar{\beta}_c$. Это легко следует из равенства (2). В частности,

$$\begin{aligned} \int H_3^{(0)}(x)(u, u, u) Q(du) &= \int H_3^{(0)}(x)(u, u, u) P(du), \\ \int H_4^{(0)}(x)(u, u, u, u) Q(du) &= \int H_4^{(0)}(x)(u, u, u, u) P(du) \\ &\quad - \int H_4^{(0)}(x)(u, u, u, u) \Phi(du) \\ &= \int H_4^{(0)}(x)(u, u, u, u) P(du) - 3H_0^{(4)}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint H_7^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v, v) Q(du) Q(dv) \\
&= \iint H_7^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v, v) (P(du) P(dv) \\
&\quad - P(du) \Phi(dv) - \Phi(du) P(dv) + \Phi(du) \Phi(dv)) \\
&= \iint H_7^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v, v) P(du) P(dv) - 3 \int H_3^{(4)}(x)(u, u, u) P(du).
\end{aligned}$$

Теперь нетрудно проверить, что упомянутое разложение для $p_n(x)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
p_n(x) = & \varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{3! \sqrt{n}} \int H_3^{(0)}(x)(u, u, u) P(du) \\
& + \frac{\varphi(x)}{4! n} \left(\int H_4^{(0)}(x)(u, u, u, u) P(du) - 3H_0^{(4)}(x) \right) \\
& + \frac{n-1}{2n} \frac{\varphi(x)}{(3!)^2 n} \iint H_6^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v) P(du) P(dv) \\
& - \frac{\varphi(x)}{4! \cdot 2n^2} \left(\int H_4^{(2)}(x)(u, u, u, u) P(du) - 3H_0^{(6)}(x) \right) \\
& + \frac{\varphi(x)}{5! \cdot n^{3/2}} \int H_5^{(0)}(x)(u, u, u, u, u) P(du) \\
& - \frac{\varphi(x)}{3! \cdot 2n^{3/2}} \int H_3^{(2)}(x)(u, u, u) P(du) \\
& + \frac{n-1}{n} \frac{\varphi(x)}{3! 4! n^{3/2}} \left(\iint H_7^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v, v) P(du) P(dv) \right. \\
& \quad \left. - 3 \int H_3^{(4)}(x)(u, u, u) P(du) \right) \\
& + \frac{(n-1)(n-2)}{3! n^2} \frac{\varphi(x)}{(3!)^3 n^{3/2}} \iiint H_9^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v, s, s, s) \\
& \quad \times P(du) P(dv) P(ds) \\
& + \frac{n-1}{2n} \frac{\varphi(x)}{(4!)^2 n^2} \left(\iint H_8^{(0)}(x)(u, u, u, u, v, v, v, v) P(du) P(dv) \right. \\
& \quad \left. - 6 \int H_4^{(4)}(x)(u, u, u, u) P(du) + 9H_0^{(8)}(x) \right) \\
& - \frac{n-1}{2n} \frac{\varphi(x)}{(3!)^2 n^2} \iint H_6^{(2)}(x)(u, u, u, v, v, v) P(du) P(dv) \\
& + \frac{n-1}{n} \frac{\varphi(x)}{3! 5! n^2} \iint H_8^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v, v, v) P(du) P(dv) \\
& + \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2} \frac{\varphi(x)}{(3!)^2 4! n^2} \left(\iiint H_{10}^{(0)}(x)(u, u, u, v, v, v, s, s, s, s) \right. \\
& \quad \times P(du) P(dv) P(ds) \\
& \quad \left. - 3 \iint H_6^{(4)}(x)(u, u, u, v, v, v) P(du) P(dv) \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!n^3} \frac{\varphi(x)}{(3!)^4 n^2} \iiint H_{12}^{(0)}(x)(u_1^{(3)}, \dots, u_4^{(3)}) \times P(du_1^{(3)}) \cdots P(du_4^{(3)}) + R, \quad (25)$$

где

$$|R| \leq \frac{\beta_6 + 15}{6!} \frac{B_{6,n-1}}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отметим, что сумма величин, связанных с $H_6^{(0)}$ и $H_4^{(2)}$, в правой части последнего равенства в одномерном случае превращается в

$$\left(\frac{n-1}{2n} \frac{\alpha_3^2}{(3!)^2 n} - \frac{\alpha_4 - 3}{4! \cdot 2n^2}\right) H_6(x) \varphi(x). \quad (26)$$

Коэффициент

$$\frac{n-1}{2n} \left(\frac{\alpha_3}{3!}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(-\frac{\alpha_4}{4! \cdot 2} + \frac{1}{16}\right) \frac{1}{n^2}$$

при $H_6(x)\varphi(x)$ можно назвать несформировавшейся величиной $\theta_6(P_n)/6!$, где $\theta_6(P_n)$ — момент Чебышёва–Эрмита шестого порядка распределения P_n . Величина $\theta_6(P_n)/6!$ равна

$$\frac{\theta_6}{6!n^2} + \frac{n-1}{2n} \left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 \frac{1}{n},$$

где θ_6 и θ_3 — моменты Чебышёва–Эрмита шестого и третьего порядков распределения P , $\theta_3 = \alpha_3$, а

$$\frac{\theta_6}{6!} = \frac{\alpha_6}{6!} - \frac{\alpha_4}{4! \cdot 2} + \frac{\alpha_2}{2! \cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{\alpha_0}{0! \cdot 2^3 \cdot 3!} = \frac{\alpha_6}{6!} - \frac{\alpha_4}{4! \cdot 2} + \frac{1}{24},$$

где $\alpha_6, \alpha_4, \alpha_2, \alpha_0$ — (степенные) моменты распределения P . Если бы мы при разложении разности $f(t/\sqrt{n}) - g(t/\sqrt{n})$ включили в главную часть разложения слагаемое $((m+2)!n^{(m+2)/2})^{-1} \int f(t, u)^{m+2} Q(du)$, взяв в качестве остаточной части разложения величину $o((t/\sqrt{n})^{m+2})$, $n \rightarrow \infty$, то в главную часть разложения плотности p_n вошло бы слагаемое

$$\frac{\varphi(x)}{(m+2)!n^{m/2}} \int H_{m+2}^{(0)}(x)(u, \dots, u) Q(du),$$

что при $m = 4$ равно $\varphi(x)(6!n^2)^{-1}(\int H_6^{(0)}(x)(u, \dots, u) P(du) - 15H_0^{(6)}(x))$. Последнее выражение в одномерном случае превращается в $(\alpha_6 - 15) \times (6!n^2)^{-1} H_6(x)\varphi(x)$, оно добавилось бы к (26) и в результате коэффициент при $H_6(x)\varphi(x)$ стал бы равным $\theta_6(P_n)/6!$. Последние рассуждения показывают, что разложения, полученные в теореме, переходят, хотя и не совсем очевидным образом, в известные разложения в одномерном случае.

Стоит отметить, что разложения, указанные в теореме, родственны длинным разложениям Грама–Шарлье из [3].

В заключение скажем о еще одном подходе к построению асимптотических разложений. Заметим, что величину (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \sum_{k_3, \dots, k_{m+1}} \frac{i^l}{(2\pi)^d} \int e^{-i(t,x)} e^{-(n-k)|t|^2/(2n)} \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \\ \times \frac{1}{(3!)^{k_3} \dots ((m+1)!)^{k_{m+1}}} \frac{1}{n^{l/2}} \\ \times \left(\int (t, u)^3 Q(du) \right)^{k_3} \dots \left(\int (t, u)^{m+1} Q(du) \right)^{k_{m+1}} dt. \end{aligned}$$

Сделав замену переменной $\tau = \sqrt{(n-k)/n} t$, мы видим, что последнее выражение равно

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \sum_{k_3, \dots, k_{m+1}} \left(\sqrt{\frac{n}{n-k}} \right)^{l+d} \frac{i^l}{(2\pi)^d} \int e^{-i(\tau, \sqrt{n/(n-k)}x)} e^{-|\tau|^2/2} \\ \times \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \frac{1}{(3!)^{k_3} \dots ((m+1)!)^{k_{m+1}}} \frac{1}{n^{l/2}} \\ \times \left(\int (\tau, u)^3 Q(du) \right)^{k_3} \dots \left(\int (\tau, u)^{m+1} Q(du) \right)^{k_{m+1}} d\tau. \end{aligned}$$

Действуя далее аналогично предыдущему, можно получить аналоги разложений, указанных в теореме, в которых суммирование по j отсутствует, верхние индексы у частичных многочленов Чебышёва–Эрмита равны нулю, аргумент x у этих многочленов и у функций φ при $k > 0$ заменен на $\sqrt{n/(n-k)}x$ и присутствуют множители $(\sqrt{n/(n-k)})^{l+d}$. Такие разложения родственны разложениям Бергстрёма–Чебышёва (см. [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сенатов В. В. Об одном многомерном аналоге разложения Чебышёва. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 603–610.
2. Сенатов В. В. Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме с явными оценками остаточных членов. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 4, с. 810–816.
3. Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009, 352 с.
4. Сюлюкин А. В. Об асимптотических разложениях Бергстрёма–Чебышёва. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 1, с. 176–185.

Поступила в редакцию
10.VII.2008