Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Бахтин, Пуассоновский предел для ассоциированных случайных полей,
Теория вероятн. и ее примен., 2009, том 54, выпуск 4, 772–776

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 07:49:18

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2009 г.

БАХТИН Ю. Ю.*

ПУАССОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ АССОЦИИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ¹⁾

В заметке предлагаются легко проверяемые условия, гарантирующие сходимость последовательности ассоциированных случайных полей к пуассоновскому точечному процессу, устанавливается оптимальность этих условий, рассматриваются простые примеры.

Ключевые слова и фразы: пуассоновская предельная теорема, ассоциированность, неравенство Ньюмена.

1. Введение и основной результат. В этой заметке мы доказываем пуассоновскую предельную теорему для последовательности ассоциированных случайных полей. Напомним, что конечный набор (вектор) $(X_1, \dots, X_m)$ случайных величин называется ассоциированным, если для любой пары ограниченных и покоординатно неубывающих функций $f, g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$

$$\text{cov}(f(X_1, \dots, X_m), g(X_1, \dots, X_m)) \geq 0. \quad (1)$$

Бесконечный набор случайных величин называется ассоциированным, если любой его конечный поднабор ассоциирован.

Понятие ассоциированности было введено в работе [4]. Неравенства (1) и их эквиваленты часто называют ФКЖ-неравенствами по инициалам авторов работы [5], независимо изучавших этот вид положительной зависимости.

Ассоциированные случайные величины часто возникают в задачах статистической механики и многих других областях, см. многочисленные примеры, исторический обзор, обширный теоретический материал и приложения в недавней монографии [1].

Из свойств ассоциированных случайных векторов укажем два: взаимно независимые случайные величины образуют ассоциированный набор; случайный вектор, полученный из ассоциированного случайного вектора монотонным преобразованием, также ассоциирован.

К настоящему времени получено много предельных теорем для сумм ассоциированных случайных величин (см. [1] и библиографию там же). Насколько известно автору, теорем о сходимости к пуассоновскому точечному полю не появлялось в литературе, хотя пуассоновские предельные теоремы для систем с ФКЖ-неравенствами и публиковались, например, в работе [7], см. также библиографические ссылки в ней.

Теперь мы переходим к постановке задачи. Мы фиксируем размерность $d \in \mathbf{N}$ и для каждого $n \in \mathbf{N}$ рассматриваем стационарное в широком смысле (т.е. в смысле

* School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 30332, USA; e-mail: bakhtin@math.gatech.edu

¹⁾ Работа выполнена при поддержке NSF (грант CAREER DMS-0742424).

первого момента и ковариаций) ассоциированное случайное поле $(X_j^{(n)})_{j \in \mathbf{Z}^d}$. Допустим, что для любых n, j случайная величина $X_j^{(n)}$ принимает два значения, 0 и 1, и найдется такое число $\lambda > 0$, что

$$p_n = \frac{\lambda + o(1)}{n^d}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $p_n = \mathbf{P}\{X_0^{(n)} = 1\}$. Мы также предполагаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^d b(n) = 0, \quad (2)$$

где

$$b(n) = \sum_{j \neq 0} \text{cov}(X_0^{(n)}, X_j^{(n)}).$$

Для каждого n мы вводим случайную меру μ_n , значение которой на любом ограниченном борелевском множестве $A \subset \mathbf{R}^d$ задается формулой

$$\mu_n(A) = \sum_{j \in \mathbf{Z}^d \cap nA} X_j^{(n)},$$

где $nA = \{nx: x \in A\}$.

Напомним, что грубая топология на локально ограниченных борелевских мерах порождается конечными пересечениями множеств вида $\{\nu: s < \int_{\mathbf{R}^d} f d\nu < t\}$, где $s, t \in \mathbf{R}$, а f — произвольная неотрицательная непрерывная функция с компактным носителем (см. [8, приложение 7]).

Теорема 1. *В условиях, описанных выше, последовательность мер μ_n сходится по распределению в грубой топологии к пуассоновской случайной мере μ с параметром λ .*

Доказательство. По теореме 4.2 в [8], достаточно проверить, что для любой неотрицательной непрерывной функции f с компактным носителем

$$\int_{\mathbf{R}^d} f d\mu_n \xrightarrow{\text{Law}} \int_{\mathbf{R}^d} f d\mu, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для любого $t \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{it \int f d\mu_n} &= \mathbf{E} e^{it \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} f(j/n) X_j^{(n)}} \\ &= \prod_{j \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{E} e^{it f(j/n) X_j^{(n)}} + \left| \mathbf{E} e^{it \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} f(j/n) X_j^{(n)}} - \prod_{j \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{E} e^{it f(j/n) X_j^{(n)}} \right| \\ &= I_1(n) + I_2(n). \end{aligned}$$

В силу финитности функции f , в бесконечном произведении $I_1(n)$ лишь конечное число множителей отлично от единицы, и

$$I_1(n) = \prod_{j \in \mathbf{Z}^d} \left(1 + p_n (e^{it f(j/n)} - 1) \right).$$

Выбирая главную ветвь натурального логарифма $\ln$ и пользуясь разложением Тейлора, для всех достаточно больших n мы получаем

$$\begin{aligned} I_1(n) &= \exp \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} \ln(1 + p_n (e^{it f(j/n)} - 1)) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\lambda + o(1)}{n^d} \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} (e^{it f(j/n)} - 1) \right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Выражение в правой части при $n \rightarrow \infty$ сходится к

$$\phi(t) = \exp \left\{ \lambda \int_{\mathbf{R}^d} (e^{itf(x)} - 1) dx \right\},$$

характеристической функции величины $\int_{\mathbf{R}^d} f d\mu$, и для завершения доказательства достаточно установить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2(n) = 0. \quad (3)$$

Чтобы оценить $I_2(n)$, нам потребуется следующее неравенство Ньюмена.

Лемма 1 [9]. Если случайные величины $(Y_1, \dots, Y_m)$ с конечным вторым моментом образуют ассоциированный случайный вектор, то

$$\left| \mathbf{E} e^{i \sum_{j=1}^m r_j Y_j} - \prod_{j=1}^m \mathbf{E} e^{ir_j Y_j} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{j_1 \neq j_2} |r_{j_1} r_{j_2}| \operatorname{cov}(Y_{j_1}, Y_{j_2})$$

для любых $r_1, \dots, r_m \in \mathbf{R}$.

Применяя это неравенство к $I_2(n)$, мы получаем оценку

$$\begin{aligned} I_2(n) &\leq \frac{t^2 \|f\|_{L^\infty}^2}{2} \sum_{\substack{j_1, j_2 \in \mathbf{Z}^d \cap n \operatorname{supp}(f) \\ j_1 \neq j_2}} \operatorname{cov}(X_{j_1}^{(n)}, X_{j_2}^{(n)}) \\ &\leq \frac{t^2 \|f\|_{L^\infty}^2}{2} |\mathbf{Z}^d \cap n \operatorname{supp}(f)| b(n), \end{aligned}$$

где $\operatorname{supp}(f)$ обозначает носитель функции f , а $|\cdot|$ обозначает число элементов множества. Так как $|\mathbf{Z}^d \cap n \operatorname{supp}(f)| \leq K n^d$ для некоторой константы $K > 0$ и всех $n > 0$, соотношение (3) следует из (2), и доказательство теоремы завершено.

З а м е ч а н и е 1. Основной шаг в этом доказательстве — применение неравенства Ньюмена для ассоциированных случайных величин. Аналогичные ковариационные неравенства верны для широкого класса зависимых случайных величин. Например, заключение нашей теоремы остается верным, если условие ассоциированности заменить на условие квазиассоциированности (см. [2] и доказательство теоремы 1 в работе [9]).

2. Примеры. Пусть G — конечное подмножество $\mathbf{Z}^d$ для некоторого $d \in \mathbf{N}$. Обозначим $m = |G|$ и для каждого $n \in \mathbf{N}$ рассмотрим семейство независимых одинаково распределенных бернуллиевских величин $(Y_k^{(n)})_{k \in \mathbf{Z}^d}$ с

$$\mathbf{P}\{Y_0^{(n)} = x\} = \begin{cases} q_n, & x = 1, \\ 1 - q_n, & x = 0, \end{cases}$$

где $q_n = 1/n^{d/m}$. Для любого конечного множества $H \subset \mathbf{Z}^d$ и любого $n \in \mathbf{N}$ обозначим

$$\chi_H^{(n)} = \prod_{j \in H} Y_j^{(n)} = \mathbf{1}\{Y_j^{(n)} = 1, j \in H\}$$

и определим случайное поле $(X_k^{(n)})_{k \in \mathbf{Z}^d}$ посредством равенства $X_k^{(n)} = \chi_{k+G}^{(n)}$, где $k + G = \{k + j : j \in G\}$. Пуассоновские аппроксимации для похожей модели с прямоугольными множествами G рассматривались в работе [6].

Проверим, что поля $X^{(n)}$, $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяют условиям теоремы 1. Случайное поле $Y^{(n)}$ ассоциировано, так как его компоненты независимы. Следовательно, поле $X^{(n)}$ также ассоциировано, будучи монотонным преобразованием ассоциированного поля $Y^{(n)}$. Оно стационарно в силу стационарности поля $Y^{(n)}$.

Для любого n случайная величина $X_0^{(n)}$ является бернуллиевской с

$$\mathbf{P}\{X_0^{(n)} = 1\} = \mathbf{P}\{Y_j^{(n)} = 1, j \in G\} = (n^{-d/m})^m = n^{-d}.$$

Оценим $b(n)$. Заметим, что $\text{cov}(X_0^{(n)}, X_j^{(n)}) = 0$ для достаточно больших значений $|j|$. Поэтому найдется такое число M , что для всех $n \in \mathbf{N}$

$$b(n) \leq M \max_{j \neq 0} \text{cov}(X_0^{(n)}, X_j^{(n)}). \quad (4)$$

Заметим, что

$$\text{cov}(X_0^{(n)}, X_j^{(n)}) = \mathbf{E} \chi_{G \cup (j+G)}^{(n)} - \mathbf{E} \chi_G^{(n)} \mathbf{E} \chi_{j+G}^{(n)}.$$

Конечное множество не может быть инвариантным относительно сдвига. Следовательно, $|G \cup (j+G)| \geq m+1$ для любого $j \neq 0$, и

$$\text{cov}(X_0^{(n)}, X_j^{(n)}) \leq n^{-d(m+1)/m} = o(n^{-d}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из соотношения (4) следует условие (2), и все условия теоремы 1 выполнены.

Для ассоциированного случайного поля $X^{(n)}$ корреляционное условие (2) означает, что случайная величина $X_0^{(n)}$ асимптотически независима от остальных компонент случайного поля. Ослабление этого условия приводит к появлению новых разнообразных ситуаций. В следующем примере предельное поле будет сложным пуассоновским процессом с неслучайной массой каждого атома, равной 2 (определение и свойства сложного пуассоновского процесса см. в [3, п. 6.4]).

Пусть $d = 1$ и для любых $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$

$$X_k^{(n)} = Y_k^{(n)} \vee Y_{k+1}^{(n)} = Y_k^{(n)} + Y_{k+1}^{(n)} - Y_k^{(n)} Y_{k+1}^{(n)},$$

где $Y^{(n)}$ — последовательность независимых бернуллиевских величин с $\mathbf{P}\{Y_0^{(n)} = 1\} = 1/n$. Тогда, как показывает простое вычисление, $b(n) \sim 1/n$, так что условие (2) нарушено. Следующий результат показывает, что и заключение теоремы 1 тоже нарушено.

Теорема 2. Последовательность случайных мер μ_n сходится по распределению к 2μ , где μ — пуассоновская случайная мера с единичной интенсивностью.

Доказательство. Возьмем непрерывную неотрицательную функцию f с компактным носителем и напомним

$$\mathbf{E} e^{it \int_{\mathbf{R}} f d\mu_n} = \mathbf{E} \exp \left\{ it \sum_{j \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{j}{n}\right) (Y_j^{(n)} + Y_{j+1}^{(n)}) - it \sum_{j \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{j}{n}\right) Y_j^{(n)} Y_{j+1}^{(n)} \right\}.$$

Из неравенства Маркова следует, что

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{j}{n}\right) Y_j^{(n)} Y_{j+1}^{(n)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

так как математическое ожидание выражения в левой части есть $O(1/n)$. Теперь, применяя те же рассуждения, которые были использованы в доказательстве главного результата при анализе $I_1(n)$, мы видим, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} e^{it \int_{\mathbf{R}} f d\mu_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \exp \left\{ it \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(f\left(\frac{j}{n}\right) + f\left(\frac{j-1}{n}\right) \right) Y_j^{(n)} \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_{\mathbf{R}} (e^{it2f(x)} - 1) dx \right\}. \end{aligned}$$

Автор начал заниматься ассоциированными случайными величинами в 1990-х годах на мехмате МГУ под руководством профессора А. В. Булинского, которому он благодарен за неизменную многолетнюю поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bulinski A., Shashkin A.* Limit Theorems for Associated Random Field and Related Systems. (Adv. Ser. Statist. Sci. Appl. Probab., v. 10.) Hackensack: World Scientific, 2007, 436 p.
2. *Bulinski A., Suquet C.* Normal approximation for quasi-associated random fields. — Statist. Probab. Lett., 2001, v. 54, № 2, p. 215–226.
3. *Daley D. J., Vere-Jones D.* An Introduction to the Theory of Point Processes. New York: Springer-Verlag, 1988, 702 p.
4. *Esary J. D., Proschan F., Walkup D. W.* Association of random variables, with applications. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, p. 1466–1474.
5. *Fortuin C. M., Kasteleyn P. W., Ginibre J.* Correlation inequalities on some partially ordered sets. — Comm. Math. Phys., 1971, v. 22, p. 89–103.
6. *Fu J. C., Koutras V.* Poisson approximations for 2-dimensional patterns. — Ann. Inst. Statist. Math., 1994, v. 46, № 1, p. 179–192.
7. *Ganesh A., Hambly B. M., O'Connell N., Stark D., Upton P. J.* Poissonian behavior of Ising spin systems in an external field. — J. Statist. Phys., 2000, v. 99, № 1–2, p. 613–626.
8. *Kallenberg O.* Random Measures. Berlin: Akademie-Verlag, 1976, 104 p.
9. *Newman C. M.* Normal fluctuations and the FKG inequalities. — Comm. Math. Phys., 1980, v. 74, № 2 p. 119–128.

Поступила в редакцию
17.XI.2008

Исправленный вариант
20.VIII.2009

© 2009 г.

ИЛЬИНСКИЙ А. И.*

О ГАУССОВСКИХ КОМПОНЕНТАХ КОНЕЧНЫХ СМЕСЕЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Приведено решение задачи характеризации класса множеств гауссовских компонент (относительно операции свертки) конечных смесей одномерных вероятностных законов.

Ключевые слова и фразы: гауссовское распределение, смеси вероятностных распределений, характеристические функции.

1. Введение и формулировка результатов. Обозначим $\mathcal{P}$ множество всех вероятностных распределений на прямой с операцией свертки. Если $P, P_1 \in \mathcal{P}$, то распределение P_1 называется *компонентой* распределения P (пишем $P_1 | P$), если существует такое P_2 , что $P = P_1 * P_2$. Для положительного числа γ будем обозначать G_γ гауссовское распределение с плотностью $(4\pi\gamma)^{-1/2} \exp(-x^2/(4\gamma))$ и характеристической функцией $g_\gamma(t) = \exp(-\gamma t^2)$. (G_0 — вырожденное распределение, сосредоточенное в начале координат.) Для $P \in \mathcal{P}$ положим

$$H_P := \{\gamma \geq 0: G_\gamma | P\}.$$

Это множество, характеризующее множество гауссовских компонент распределения P , очевидно, может быть лишь отрезком вида $[0, a]$, где $0 \leq a < \infty$.

* Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, механико-математический факультет, пл. Свободы, 4, 61077 Харьков, Украина; e-mail: iljinskii@univer.kharkov.ua