Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Ильинский, О гауссовских компонентах конечных смесей вероятностных распределений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 4, 776–783

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:22:24

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bulinski A., Shashkin A.* Limit Theorems for Associated Random Field and Related Systems. (Adv. Ser. Statist. Sci. Appl. Probab., v. 10.) Hackensack: World Scientific, 2007, 436 p.
2. *Bulinski A., Suquet C.* Normal approximation for quasi-associated random fields. — Statist. Probab. Lett., 2001, v. 54, № 2, p. 215–226.
3. *Daley D. J., Vere-Jones D.* An Introduction to the Theory of Point Processes. New York: Springer-Verlag, 1988, 702 p.
4. *Esary J. D., Proschan F., Walkup D. W.* Association of random variables, with applications. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, p. 1466–1474.
5. *Fortuin C. M., Kasteleyn P. W., Ginibre J.* Correlation inequalities on some partially ordered sets. — Comm. Math. Phys., 1971, v. 22, p. 89–103.
6. *Fu J. C., Koutras V.* Poisson approximations for 2-dimensional patterns. — Ann. Inst. Statist. Math., 1994, v. 46, № 1, p. 179–192.
7. *Ganesh A., Hambly B. M., O'Connell N., Stark D., Upton P. J.* Poissonian behavior of Ising spin systems in an external field. — J. Statist. Phys., 2000, v. 99, № 1–2, p. 613–626.
8. *Kallenberg O.* Random Measures. Berlin: Akademie-Verlag, 1976, 104 p.
9. *Newman C. M.* Normal fluctuations and the FKG inequalities. — Comm. Math. Phys., 1980, v. 74, № 2 p. 119–128.

Поступила в редакцию
17.XI.2008

Исправленный вариант
20.VIII.2009

© 2009 г.

ИЛЬИНСКИЙ А. И.*

О ГАУССОВСКИХ КОМПОНЕНТАХ КОНЕЧНЫХ СМЕСЕЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Приведено решение задачи характеризации класса множеств гауссовских компонент (относительно операции свертки) конечных смесей одномерных вероятностных законов.

Ключевые слова и фразы: гауссовское распределение, смеси вероятностных распределений, характеристические функции.

1. Введение и формулировка результатов. Обозначим $\mathcal{P}$ множество всех вероятностных распределений на прямой с операцией свертки. Если $P, P_1 \in \mathcal{P}$, то распределение P_1 называется *компонентой* распределения P (пишем $P_1 | P$), если существует такое P_2 , что $P = P_1 * P_2$. Для положительного числа γ будем обозначать G_γ гауссовское распределение с плотностью $(4\pi\gamma)^{-1/2} \exp(-x^2/(4\gamma))$ и характеристической функцией $g_\gamma(t) = \exp(-\gamma t^2)$. (G_0 — вырожденное распределение, сосредоточенное в начале координат.) Для $P \in \mathcal{P}$ положим

$$H_P := \{\gamma \geq 0: G_\gamma | P\}.$$

Это множество, характеризующее множество гауссовских компонент распределения P , очевидно, может быть лишь отрезком вида $[0, a]$, где $0 \leq a < \infty$.

* Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, механико-математический факультет, пл. Свободы, 4, 61077 Харьков, Украина; e-mail: iljinskii@univer.kharkov.ua

В 1948 году Р. Фишер и Д. Дюге [1] (см. также [2, с. 94], [3, с. 118]) обнаружили, что существуют такие распределения P_1 и P_2 , что

$$H_{P_1} = H_{P_2} = \{0\}, \quad \text{а} \quad H_{P_1 * P_2} = [0, a], \quad \text{где} \quad a > 0.$$

Иначе говоря, существуют распределения, не обладающие (невырожденными) гауссовскими компонентами, свертка которых обладает гауссовской компонентой.

Пример Фишера и Дюге дает ответ на вопрос, какими могут быть множества гауссовских компонент распределений P_1 , P_2 и их свертки $P_1 * P_2$. Именно, справедливо следующее предложение.

Предложение. Пусть числа a_j ($j = 1, 2, 3$) неотрицательны. Для того, чтобы существовали вероятностные распределения P_1 и P_2 такие, что

$$H_{P_1} = [0, a_1], \quad H_{P_2} = [0, a_2], \quad H_{P_1 * P_2} = [0, a_3],$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a_3 \geq a_1 + a_2$.

Необходимость этого условия очевидна. Докажем его достаточность. Пусть Q — вероятностное распределение с характеристической функцией $\psi(t) = (1 - t^2) \exp(-t^2/2)$. Как известно, $H_Q = \{0\}$ (см. [3, с. 118–119]). Положим $\sigma = 2(a_3 - a_1 - a_2)^{1/2}$, и пусть P_j — распределение с характеристической функцией $e^{-a_j t^2} \psi(\sigma t)$ ($j = 1, 2$). Тогда $H_{P_j} = [0, a_j]$ ($j = 1, 2$), а $H_{P_1 * P_2} = [0, a_3]$, поскольку характеристическая функция распределения $P_1 * P_2$ равна

$$e^{-(a_1 + a_2)t^2} e^{-\sigma^2 t^2/4} (1 - (\sigma t)^2)^2 e^{-(3/4)(\sigma t)^2} = e^{-a_3 t^2} (1 - (\sigma t)^2)^2 e^{-(3/4)(\sigma t)^2}$$

и распределение с характеристической функцией $(1 - t^2)^2 e^{-(3/4)t^2}$ не имеет гауссовской компоненты (ибо его плотность имеет корни, см. также [3, с. 119]).

Настоящая заметка посвящена вопросу о возможных множествах гауссовских компонент смесей вероятностных распределений. Уточним постановку вопроса. Будем далее пользоваться языком теории характеристических функций. Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех характеристических функций. Если $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, то $\psi | \varphi$ означает, что $\varphi = \psi \psi_1$ для некоторой $\psi_1 \in \mathcal{F}$. Для характеристической функции f положим $H_f = \{\gamma \geq 0: e^{-\gamma t^2} | f(t)\}$; так что $\gamma \in H_f$ тогда и только тогда, когда $e^{\gamma t^2} f(t) \in \mathcal{F}$. Обозначим $h_f := \max\{\gamma \geq 0: \gamma \in H_f\}$ правую граничную точку отрезка H_f .

Пусть f_0 и f_1 — две характеристические функции. Для каждого числа q , $0 \leq q \leq 1$, положим $f_q := (1 - q)f_0 + qf_1$ и

$$h_{f_0, f_1}(q) := h_{f_q} = \max\{\gamma \geq 0: e^{\gamma t^2} ((1 - q)f_0(t) + qf_1(t)) \in \mathcal{F}\}. \quad (1)$$

Функция $h_{f_0, f_1}(q)$ ($0 \leq q \leq 1$) описывает множество гауссовских делителей выпуклых линейных комбинаций характеристических функций f_0 и f_1 . Требуется дать внутреннее описание класса функций $\{h_{f_0, f_1}(q): f_0, f_1 \in \mathcal{F}\}$. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $h(q)$ — функция на отрезке $[0, 1]$ с конечными неотрицательными значениями. Для того чтобы существовали две характеристические функции f_0 и f_1 такие, что $h_{f_0, f_1}(q) = h(q)$ при всех $q \in [0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $q_0 \in [0, 1]$ такое, что функция $h(q)$

- 1) не убывает на отрезке $[0, q_0]$ и непрерывна справа в каждой точке полуинтервала $[0, q_0)$,
- 2) не возрастает на отрезке $[q_0, 1]$ и непрерывна слева в каждой точке полуинтервала $(q_0, 1]$.

Укажем несколько примеров функций h , удовлетворяющих условиям теоремы 1: (i) $h(q) = 0$ при $q \in [0, 1/3) \cup (2/3, 1]$, $h(q) = 1$ при $q \in [1/3, 2/3]$; (ii) $h(q) = \sqrt{2q}/4$ при $q \in [0, 1/2)$, $h(q) = (1 - q)^2$ при $q \in [1/2, 1]$; (iii) $h(q)$ — «лестница Кантора–Витали» на отрезке $[0, 1]$.

Приведем формулировку теоремы 1 в виде, удобном для обобщения на случай конечных линейных комбинаций характеристических функций $f_1, \dots, f_n$ ($n \geq 3$). Для $f_0, f_1 \in \mathcal{F}$ обозначим

$$H_{f_0, f_1} := \{(q, \gamma) \in \mathbf{R}^2: 0 \leq q \leq 1, 0 \leq \gamma \leq h_{f_0, f_1}(q)\}$$

криволинейную трапецию, порожденную графиком функции $h_{f_0, f_1}(q)$ на отрезке $[0, 1]$. Заметим, что функция $h(q)$ на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет условиям теоремы 1 тогда и только тогда, когда порожденная ею криволинейная трапеция $H = \{(q, \gamma) \in \mathbf{R}^2: 0 \leq q \leq 1, 0 \leq \gamma \leq h(q)\}$ представима в виде разности прямоугольника $[0, 1] \times [0, M]$, где M — некоторое положительное число, и не более чем счетного объединения $\bigcup_i U_i$ углов U_i вида $(-\infty, \alpha) \times (\beta, +\infty)$ или $(\alpha', +\infty) \times (\beta', +\infty)$ ($0 < \alpha, \alpha' < 1, \beta, \beta' > 0$). Поэтому теорема 1 эквивалентна следующей теореме.

Теорема 1'. Пусть $H \subset [0, 1] \times \mathbf{R}^+$. Для того чтобы существовали характеристические функции f_0 и f_1 такие, что $H_{f_0, f_1} = H$, необходимо и достаточно, чтобы существовали число $M > 0$ и не более чем счетный набор углов $U_i, i = 1, 2, \dots$, вида $(-\infty, \alpha) \times (\beta, +\infty)$ или $(\alpha', +\infty) \times (\beta', +\infty)$, $0 < \alpha, \alpha' < 1, \beta, \beta' > 0$, такие, что

$$H = ([0, 1] \times [0, M]) \setminus \left(\bigcup_i U_i \right).$$

Приведем формулировку результата, обобщающего теорему 1 на случай выпуклых линейных комбинаций n ($n > 2$) характеристических функций. Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\Delta_n = \left\{ (q_1, \dots, q_n) \in \mathbf{R}^n: q_k \geq 0 \ (k = 1, \dots, n), \sum_{k=1}^n q_k = 1 \right\},$$

$$\tilde{\Delta}_n = \left\{ (q_1, \dots, q_n) \in \mathbf{R}^n: \sum_{k=1}^n q_k = 1 \right\}.$$

Если $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ и $(q_1, \dots, q_n) \in \Delta_n$, то положим

$$h_{f_1, \dots, f_n}(q_1, \dots, q_n) := \max \left\{ \gamma \geq 0: e^{\gamma t^2} \sum_{k=1}^n q_k f_k(t) \in \mathcal{F} \right\},$$

$$H_{f_1, \dots, f_n} := \{(q_1, \dots, q_n, \gamma) \in \Delta_n \times \mathbf{R}^+: 0 \leq \gamma \leq h_{f_1, \dots, f_n}(q_1, \dots, q_n)\}.$$

Теорема 2. Класс множеств $\{H_{f_1, \dots, f_n}: f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}\}$ совпадает с классом множеств, представимых в виде

$$H = (\Delta_n \times [0, M]) \setminus \left(\bigcup_i U_i \right),$$

где M — положительное число, $\{U_i\}$ — не более чем счетное семейство открытых множеств вида

$$\{(q_1, \dots, q_n) \in \tilde{\Delta}_n: \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n > 0\} \times (\beta, +\infty) \quad (\alpha_k \in \mathbf{R}, \beta > 0).$$

В следующем разделе приведено доказательство теоремы 1, а в разделе 3 указано, какие модификации в рассуждениях из раздела 2 надо сделать, чтобы получить доказательство теоремы 2. В работе используются некоторые приемы статей [4] и [5]. Заметим, что в [5] на с. 25 в 21-й строке снизу, на с. 26 в 8-й и 23-й строках, на с. 27 в 6-й строке снизу слово if следует заменить на iff (if and only if).

2. Доказательство теоремы 1.

Необходимость. Пусть $f_0, f_1 \in \mathcal{F}$, а $h_{f_0, f_1}(q)$ — функция на отрезке $[0, 1]$, определенная в (1).

2.1. Легко видеть, что функция $h_{f_0, f_1}(q)$ не имеет строгих локальных минимумов внутри интервала $(0, 1)$. Точнее,

$$\forall 0 \leq q_1 < q_2 < q_3 \leq 1: \quad h_{f_0, f_1}(q_2) \geq \min\{h_{f_0, f_1}(q_1), h_{f_0, f_1}(q_3)\}. \quad (2)$$

Это следует из того, что характеристическая функция f_{q_2} является выпуклой линейной комбинацией характеристических функций f_{q_1} и f_{q_3} : $f_{q_2}(t) = ((q_3 - q_2)/(q_3 - q_1))f_{q_1}(t) + ((q_2 - q_1)/(q_3 - q_1))f_{q_3}(t)$. Из (2) следует существование такого числа $q_0 \in [0, 1]$, что функция $h_{f_0, f_1}(q)$ не убывает на отрезке $[0, q_0]$ и не возрастает на отрезке $[q_0, 1]$.

2.2. Покажем, что функция $h_{f_0, f_1}(q)$ является полунепрерывной сверху в каждой точке отрезка $[0, 1]$:

$$\forall q \in [0, 1]: \quad h_{f_0, f_1}(q) \geq \limsup_{q' \rightarrow q} h_{f_0, f_1}(q'). \quad (3)$$

Действительно, пусть $\limsup_{q' \rightarrow q} h_{f_0, f_1}(q') = \gamma_0$. Тогда для некоторой последовательности $q_n \rightarrow q$ выполняется $\exp(h_{f_0, f_1}(q_n)t^2)f_{q_n}(t) \in \mathcal{F}$ и $h_{f_0, f_1}(q_n) \rightarrow \gamma_0$. Отсюда по теореме непрерывности Леви $\exp(\gamma_0 t^2)f_q(t) \in \mathcal{F}$, т.е. $h_{f_0, f_1}(q) \geq \gamma_0$. Аналогичное рассуждение показывает, что функция $h_{f_0, f_1}(q)$ ($q \in [0, 1]$) — ограниченная. В противном случае нашлись бы последовательность $\{q_n\}$ и точка $q_0 \in [0, 1]$, для которых $q_n \rightarrow q_0$ и $h_{f_0, f_1}(q_n) \rightarrow +\infty$. Тогда при всяком сколь угодно большом $A > 0$ выполнялось бы включение $\exp(At^2)f_{q_0}(t) \in \mathcal{F}$, что невозможно. Из (3) и п. 2.1 следует, что выполняются условия 1) и 2) теоремы 1.

Достаточность. Пусть ε_c — вероятностное распределение, сосредоточенное в точке c . Рассмотрим заряд

$$\nu := 0.5 \cdot (1 + b)\varepsilon_{-\kappa} - b\varepsilon_0 + 0.5 \cdot (1 + b)\varepsilon_{\kappa} \quad (b > 0, \kappa > 0). \quad (4)$$

Пусть $\hat{\nu}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \nu(dx)$ — преобразование Фурье–Стилтьеса заряда ν .

2.3. Выясним, при каких соотношениях между параметрами δ , b , κ функция $\hat{\nu}(t)e^{-\delta t^2}$ является характеристической функцией.

Лемма 1. Функция $\hat{\nu}(t)e^{-\delta t^2}$ является характеристической тогда и только тогда, когда

$$\delta \geq \frac{\kappa^2}{4 \ln(b^{-1} + 1)}. \quad (5)$$

Для доказательства леммы вычислим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\nu}(t) e^{-\delta t^2} e^{-itx} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi\delta}} e^{-x^2/(4\delta)} \left\{ (1 + b)e^{-\kappa^2/(4\delta)} \operatorname{ch} \frac{x\kappa}{2\delta} - b \right\}. \quad (6)$$

Выражение в фигурных скобках в правой части равенства (6) принимает минимальное значение, равное $(1 + b)e^{-\kappa^2/(4\delta)} - b$, в точке $x = 0$. Условие неотрицательности этого значения совпадает с условием (5).

Из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие. Пусть ν — такой же заряд, как в (4), число S удовлетворяет условию $S \geq \kappa^2/(4 \ln(b^{-1} + 1))$ и $\gamma \geq 0$. Тогда $e^{-\gamma t^2} |\hat{\nu}(t)e^{-St^2}|$ в том и только том случае, когда

$$\gamma \leq S - \frac{\kappa^2}{4 \ln(b^{-1} + 1)}. \quad (7)$$

2.4. Цель этого пункта — построение таких характеристических функций f_0 и f_1 , для которых график функции $h_{f_0, f_1}(q)$ является «почти ступенькой».

Лемма 2. Пусть S, D, q', ε — числа, удовлетворяющие условиям $0 < D < S, q' \in (0, 1), 0 < \varepsilon < \min\{q', 1 - q', D\}$. Тогда существуют характеристические функции f_0 и f_1 такие, что

- а) $h_{f_0, f_1}(q)$ непрерывна и не возрастает на $[0, 1]$,
- б) $h_{f_0, f_1}(q) = S$ при $0 \leq q \leq q'$,
- в) $S - D \leq h_{f_0, f_1}(q) \leq S - D + \varepsilon$ при $q' + \varepsilon \leq q \leq 1$.

Доказательство. Функции f_0 и f_1 будем искать в виде

$$\begin{aligned} f_0 &= (0.5 \cdot (1 - b_0)e^{-i\kappa t} + b_0 + 0.5 \cdot (1 - b_0)e^{i\kappa t})e^{-St^2}, \\ f_1 &= (0.5 \cdot (1 + b_1)e^{-i\kappa t} - b_1 + 0.5 \cdot (1 + b_1)e^{i\kappa t})e^{-St^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $0 < b_0 < 1, b_1 > 0, \kappa > 0$. (Выбор параметров κ, b_0, b_1 будет уточнен ниже; сейчас отметим лишь, что b_0 и b_1 будут малыми, а κ — большим.) Вычисления показывают, что

$$e^{\gamma t^2} f_q(t) = \{0.5 \cdot (1 + b)e^{-i\kappa t} - b + 0.5 \cdot (1 + b)e^{i\kappa t}\}e^{-(S-\gamma)t^2}, \quad (9)$$

где $b = -b_0 + q(b_0 + b_1)$. Далее будем считать, что числа b_0 и b_1 связаны соотношением $b_0/(b_0 + b_1) = q'$, т.е.

$$b_1 = b_0 \frac{1 - q'}{q'}. \quad (10)$$

Тогда $b \leq 0$ при $q \leq q'$, и выражение в фигурных скобках в правой части (9) будет характеристической функцией. Следовательно, $h_{f_0, f_1}(q) = S$, если $0 \leq q \leq q'$. При $q \in (q', 1]$ выполнено неравенство $b > 0$, поэтому в силу следствия из леммы 1 (см. (7)) после простых вычислений получим

$$h_{f_0, f_1}(q) = S - \frac{\kappa^2}{4 \ln((qb_1 - (1 - q)b_0)^{-1} + 1)} = S - \frac{\kappa^2}{4 \ln(b_0^{-1}q'(q - q')^{-1} + 1)}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что функция $h_{f_0, f_1}(q)$ является убывающей на интервале $(q', 1]$ и $\lim_{q \rightarrow q'+0} h_{f_0, f_1}(q) = S$. Этим доказано, что при любом выборе параметров $\kappa > 0, b_0$ и при b_1 , определенном в (10), выполняются утверждения а) и б) леммы 2. Покажем, что если взять

$$b_0 = \frac{q'}{1 - q'} \frac{1}{e^{\kappa^2/(4D)} - 1}, \quad (12)$$

а число κ — достаточно большим, то будет выполняться и утверждение в). В силу (12) и (11) верно равенство $h_{f_0, f_1}(1) = S - D$. Простые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} &\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} h_{f_0, f_1}(q' + \varepsilon) \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \left\{ S - \left(4 \left(\frac{\ln(1/b_0)}{\kappa^2} + \frac{\ln(q'/\varepsilon)}{\kappa^2} + \frac{\ln(1 + b_0\varepsilon/q')}{\kappa^2} \right) \right)^{-1} \right\} = S - D, \end{aligned}$$

так как $(4\kappa^{-2} \ln(1/b_0))^{-1} \rightarrow D$ ($\kappa \rightarrow +\infty$), что завершает доказательство леммы 2.

З а м е ч а н и е 1. Если перед параметрами b_0 и b_1 в (8) изменить знаки на противоположные, то при подходящем выборе $\kappa > 0$ и $b_0, b_1 > 0$ график функции $h_{f_0, f_1}(q)$ будет *возрастающей* «почти ступенькой», точнее: а') функция $h_{f_0, f_1}(q)$ будет непрерывной и монотонно неубывающей на отрезке $[0, 1]$; б') $h_{f_0, f_1}(q) = S$ при $q' \leq q \leq 1$; в') $S - D \leq h_{f_0, f_1}(q) \leq S - D + \varepsilon$ при $0 \leq q < q' - \varepsilon$.

З а м е ч а н и е 2. Будем далее использовать следующее обозначение: $p(x; \psi(t)) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-itx} dt$. Обозначим (в случае убывающей «почти ступеньки»)

$$\Pi_{q', \varepsilon, S, D} := [q' + 2\varepsilon, 1] \times [S - D + 2\varepsilon, S - \varepsilon].$$

Тогда преобразование Фурье $p(x; e^{\gamma t^2} f_q(t))$ таково, что его значение в нуле $p(0; e^{\gamma t^2} f_q(t))$, непрерывно зависящее от γ и q , отрицательно на компакте $\Pi_{q', \varepsilon, S, D}$. Значит,

$$\exists \delta > 0 \quad \forall (q, \gamma) \in \Pi_{q', \varepsilon, S, D}: \quad p(0; e^{\gamma t^2} f_q(t)) \leq -\delta.$$

Это легко следует из доказательства леммы 2 и формулы (6).

2.5. Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1 в части достаточности. Пусть $h(q)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Зафиксируем число $S > \max\{h(q): 0 \leq q \leq 1\}$. Положим $H := \{(q, \gamma): 0 \leq q \leq 1, 0 \leq \gamma \leq h(q)\}$. В силу условий 1) и 2) теоремы 1 множество H является компактом и существует счетное множество замкнутых углов U_j вида

$$U_{q_j, \gamma_j}^+ := [q_j, +\infty) \times [\gamma_j, +\infty) \quad \text{или} \quad U_{q_j, \gamma_j}^- := (-\infty, q_j] \times [\gamma_j, +\infty)$$

таких, что $H = ([0, 1] \times [0, S]) \setminus (\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j)$. Пусть j — такое, что $U_j = U_{q_j, \gamma_j}^+$. Так как $U_{q_j, \gamma_j}^+ \cap H = \emptyset$, то существует $\varepsilon_j > 0$ такое, что $h(q_j - \varepsilon_j) < \gamma_j - \varepsilon_j$. Имея в виду применение леммы 2, возьмем в качестве q' число $q_j - \varepsilon_j$, в качестве ε — число $\varepsilon_j/2$. Число D возьмем таким, чтобы выполнялось равенство $S - D = \gamma_j - \varepsilon_j$, т.е. $D = S - \gamma_j + \varepsilon_j$. В качестве прямоугольника $\Pi_{q', \varepsilon, S, D}$ из замечания 2 к лемме 2 возьмем $\Pi_j = [q_j, 1] \times [\gamma_j, S - \varepsilon_j/2]$. Применяя лемму 2 и замечание 2 к ней, получим характеристические функции f_{0j} и f_{1j} такие, что $h_{f_{0j}, f_{1j}}(q)$ будет невозрастающей непрерывной функцией, удовлетворяющей условиям $h_{f_{0j}, f_{1j}}(q) = S$ при $0 \leq q \leq q_j - \varepsilon_j$ и $\gamma_j - \varepsilon_j \leq h_{f_{0j}, f_{1j}}(q) \leq \gamma_j - \varepsilon_j/2$ при $q_j \leq q \leq 1$, причем для некоторого $\delta_j > 0$ и для всех точек $(q, \gamma) \in \Pi_j$ будет выполняться неравенство $p(0; e^{\gamma t^2} f_{qj}(t)) \leq -\delta_j$. (Напомним, что $f_{qj}(t) = (1 - q)f_{0j}(t) + qf_{1j}(t)$ при $q \in [0, 1]$.) Рассуждения для тех j , для которых $U_j = U_{q_j, \gamma_j}^-$, аналогичны приведенным.

2.6. Искомые функции $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{F}$ определим так. Фиксируем произвольную последовательность $c_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots$) такую, что $\sum_{j=0}^{\infty} c_j = 1$. Для положительных чисел a_j ($j = 1, 2, \dots$) положим

$$\varphi_k(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_{kj}(t) e^{ia_j t} \quad (k = 0, 1),$$

где $f_{kj}(t)$ — характеристические функции, определенные в п. 2.5. Покажем, что если последовательность $\{a_j\}$ достаточно быстро стремится к бесконечности, то $\varphi_k(t)$ — искомые характеристические функции. То, что при любом выборе последовательности $\{a_j\}$ выполняется неравенство $h_{\varphi_0, \varphi_1}(q) \geq h(q)$ для всех $q \in [0, 1]$, очевидно, поскольку при всех $q \in [0, 1]$ и $0 \leq \gamma \leq h(q)$ имеем $e^{\gamma t^2} f_{qj} \in \mathcal{F}$ ($j = 0, 1, \dots; k = 0, 1$). Покажем, что последовательность $\{a_j\}$ можно выбрать столь быстро возрастающей, что при всех $q \in [0, 1]$ и любом $\gamma > h(q)$ выполняется $e^{\gamma t^2} \varphi_q \notin \mathcal{F}$. Число a_1 возьмем произвольно. После этого число a_2 выберем столь большим, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\begin{aligned} c_1 p(0; e^{\gamma t^2} f_{q1}(t)) + c_2 p(a_1 - a_2; e^{\gamma t^2} f_{q2}(t)) &< -\frac{c_1 \delta_1}{2} & (\forall (q, \gamma) \in \Pi_1), \\ c_1 p(a_2 - a_1; e^{\gamma t^2} f_{q1}(t)) + c_2 p(0; e^{\gamma t^2} f_{q2}(t)) &< -\frac{c_2 \delta_2}{2} & (\forall (q, \gamma) \in \Pi_2). \end{aligned}$$

(Так как $p(x; \psi(t) e^{iat}) = p(x - a; \psi(t))$, то в левой части первого неравенства стоит значение преобразования Фурье функции $e^{\gamma t^2} (f_{q1}(t) + f_{q2}(t))$, где $f_{qj}(t) = (1 - q)f_{0j}(t) + qf_{1j}(t)$, в точке a_1 , а в левой части второго неравенства стоит значение преобразования Фурье той же функции в точке a_2 .) Если $a_1, \dots, a_{m-1}$ уже выбраны, то a_m берем настолько большим, чтобы при всех $l = 1, \dots, m$ выполнялись следующие m условий:

$$c_1 p(a_l - a_1; e^{\gamma t^2} f_{q1}(t)) + \dots + c_l p(0; e^{\gamma t^2} f_{ql}(t)) + \dots$$

$$+ c_m p(a_l - a_m; e^{\gamma t^2} f_{qm}(t)) < -\frac{c_l \delta_l}{2} \quad (\forall (q, \gamma) \in \Pi_l). \quad (13)$$

(В сумме, стоящей в левой части (13), l -е слагаемое отрицательно и относительно велико по модулю, а остальные слагаемые малы по модулю по сравнению с ним.) Так как каждая точка (q, γ) , не принадлежащая H и такая, что $\gamma < S$, принадлежит некоторому прямоугольнику Π_j , то получается, что $p(x; e^{\gamma t^2} \varphi_q(t)) < 0$ в некоторой окрестности точки a_j , т.е. $e^{\gamma t^2} \varphi_q(t)$ не является характеристической функцией и тем более $e^{\gamma' t^2} \varphi_q(t) \notin \mathcal{F}$ при $\gamma' > \gamma$. Значит, $h_{\varphi_0, \varphi_1}(q) \leq h(q)$. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Будем далее использовать следующие обозначения: $Q = (q_1, \dots, q_n)$ ($q_j \in \mathbf{R}$), $F = (f_1, \dots, f_n)$ ($f_j \in \mathcal{F}$), $\langle Q, F \rangle = \sum_{k=1}^n q_k f_k$, $S^n = \{V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n: \sum_{k=1}^n v_k^2 = 1\}$. Если $Q \in \mathbf{R}^n$, $\gamma \in \mathbf{R}$, то (Q, γ) будет обозначать точку $(q_1, \dots, q_n, \gamma)$ из $\mathbf{R}^{n+1}$. Для $Q_0 \in \Delta_n$, $V \in S^n$ таких, что $\langle Q_0, V \rangle = 0$, положим $P_{Q_0, V} := \{Q \in \tilde{\Delta}_n: \langle Q, V \rangle \geq 0\}$. Введенные обозначения позволяют сформулировать теорему 2 следующим образом.

Теорема 2'. Пусть $H \subset \Delta_n \times [0, +\infty)$. Для того чтобы существовали характеристические функции $f_1, \dots, f_n$ такие, что $H_{f_1, \dots, f_n} = H$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) H — компакт,
- 2) $\Delta_n \times \{0\} \subset H$,
- 3) если $(Q_0, \gamma_0) \notin H$, то найдется вектор $V \in S^n$ такой, что $\langle Q_0, V \rangle = 0$ и $(P_{Q_0, V} \times [\gamma_0, +\infty)) \cap H = \emptyset$.

3.1. Докажем теорему 2' в части необходимости. То, что множество $H_{f_1, \dots, f_n}$ ($f_k \in \mathcal{F}$) является компактом, доказывается точно так же, как в случае $n = 2$, применением теоремы непрерывности Леви. Выполнение условия 2) очевидно. Покажем, что выполняется условие 3). Пусть дано $(Q_0, \gamma_0) \notin H_{f_1, \dots, f_n}$. Рассмотрим множество $H_{f_1, \dots, f_n} \cap (\Delta_n \times [\gamma_0, +\infty))$. Если оно пусто, то можно взять любой вектор $V \in S^n$ такой, что $\langle V, Q_0 \rangle = 0$. Предположим, что $H_{f_1, \dots, f_n} \cap (\Delta_n \times [\gamma_0, +\infty)) \neq \emptyset$. Рассмотрим проекцию A_{γ_0} этого множества на Δ_n параллельно второму множителю в декартовом произведении $\Delta_n \times \mathbf{R}$. Очевидно, $A_{\gamma_0} = \{Q \in \Delta_n: (Q, \gamma_0) \in H_{f_1, \dots, f_n}\}$, поскольку условие $(Q, \gamma) \in H_{f_1, \dots, f_n}$ влечет выполнение условия $(Q, \gamma') \in H_{f_1, \dots, f_n}$ при всяком $0 \leq \gamma' \leq \gamma$. Множество A_{γ_0} — компактно и выпукло, а точка Q_0 ему не принадлежит. Поэтому его и точку Q_0 можно разделить гиперплоскостью. Это значит, что существует вектор $V \in S^n$ такой, что $\langle Q_0, V \rangle = 0$ и для всех точек Q из A_{γ_0} выполняется неравенство $\langle Q, V \rangle < 0$. Следовательно, $(P_{Q_0, V} \times [\gamma_0, +\infty)) \cap H_{f_1, \dots, f_n} = \emptyset$.

3.2. Доказательство теоремы 2' в части достаточности проводится аналогично случаю $n = 2$. Из условий 1)–3) вытекает, что заданное множество можно представить в виде $(\Delta_n \times [0, M]) \setminus (\bigcup_i U_i)$, где M — некоторое положительное число, а $\{U_i\}$ — не более чем счетный набор открытых множеств вида

$$U_i = \{Q \in \tilde{\Delta}_n: \langle Q, Y_i \rangle > 0\} \times (\gamma'_i, +\infty) \quad (Y_i \in S^n, \gamma'_i > 0).$$

Тогда H можно представить в виде разности множества $\Delta_n \times [0, M]$ и объединения $\bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$ счетного семейства замкнутых множеств вида $W_j = \{Q \in \tilde{\Delta}_n: \langle Q, V_j \rangle \geq 0\} \times [\gamma_j, +\infty) = P_{Q_j, V_j} \times [\gamma_j, +\infty)$, где $Q_j \in \Delta_n$. Покажем, как по заданному «углу» $P_{Q_0, V_0} \times [\delta_0, +\infty)$ построить характеристические функции $f_1, \dots, f_n$, для которых график функции $h_{f_1, \dots, f_n}(Q)$ имеет вид «почти ступеньки». Пусть $S > \max\{\gamma: \exists Q \in \Delta_n, (Q, \gamma) \in H\}$. Положим для $k = 1, \dots, n$

$$f_k = (0.5 \cdot (1 + \beta_k) e^{-i\kappa t} - \beta_k + 0.5 \cdot (1 + \beta_k) e^{i\kappa t}) e^{-St^2},$$

где $\beta_k = \beta v_k$, $\beta > 0$, а v_k — это k -я координата вектора V_0 . Тогда для $Q \in \Delta_n$ выпуклая линейная комбинация $\langle Q, F \rangle = \sum_{k=1}^n q_k f_k$ будет равна

$$(0.5 \cdot (1 + \beta \langle Q, V_0 \rangle) e^{-i\kappa t} - \beta \langle Q, V_0 \rangle + 0.5 \cdot (1 + \beta \langle Q, V_0 \rangle) e^{i\kappa t}) e^{-St^2}.$$

Если $\langle Q, V_0 \rangle \leq 0$, то $e^{-\gamma t^2} | \langle Q, F \rangle$ при любом $0 \leq \gamma \leq S$ (при условии, что β достаточно мало). Если $\langle Q, V_0 \rangle > 0$, то $e^{-\gamma t^2} | \langle Q, F \rangle$ в том и только том случае, когда выполняется условие $0 \leq \gamma \leq S - \kappa^2 / (4 \ln((\beta \langle Q, V_0 \rangle)^{-1} + 1))$. Дальнейшие рассуждения не отличаются от приведенных в п. 2.6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fisher R. A., Dugué D. Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois de probabilité. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1948, v. 227, p. 1205–1206.
2. Линник Ю. В. Разложения вероятностных законов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1960, 264 с.
3. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М.: Наука, 1972, 480 с.
4. Ильинский А. И. О нормальных компонентах двумерных вероятностных законов. — Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов: Сб. науч. трудов ФТИНТ АН УССР, 1990, с. 14–21.
5. P'inskiy A. I. On the Poisson components of the mixtures of the probability laws. — Докл. АН Украины, 1993, № 12, с. 25–28.

Поступила в редакцию
24.V.2007

Исправленный вариант
24.I.2008

© 2009 г.

КРУГЛОВ В. М.*

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФИЛЬТРАЦИЙ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ¹⁾

Исследуется свойство непрерывности естественной фильтрации произвольного случайного процесса с выпуклым параметрическим множеством со значениями в произвольном сепарабельном метрическом пространстве. Доказано, что естественная фильтрация непрерывна слева, если случайный процесс непрерывен слева. Расширенная естественная фильтрация непрерывна слева, если случайный процесс стохастически непрерывен слева. Если стохастически непрерывный справа случайный процесс принимает значения в конечномерном евклидовом пространстве и имеет независимые приращения, то его расширенная естественная фильтрация непрерывна справа. Упомянутые утверждения обобщают давно известное утверждение, что расширенная естественная фильтрация любого процесса Леви, определенного на полном вероятностном пространстве, непрерывна справа.

Ключевые слова и фразы: случайный процесс, независимые приращения, стохастическая непрерывность, фильтрация.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: krugvictor@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 08-01-00563-а, 08-01-567-а, 08-01-90252 Узбекистан.