Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, О непрерывности естественной фильтрации процесса с независимыми приращениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 4, 783–789

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:17:14

Если $\langle Q, V_0 \rangle \leq 0$, то $e^{-\gamma t^2} | \langle Q, F \rangle$ при любом $0 \leq \gamma \leq S$ (при условии, что β достаточно мало). Если $\langle Q, V_0 \rangle > 0$, то $e^{-\gamma t^2} | \langle Q, F \rangle$ в том и только том случае, когда выполняется условие $0 \leq \gamma \leq S - \kappa^2 / (4 \ln((\beta \langle Q, V_0 \rangle)^{-1} + 1))$. Дальнейшие рассуждения не отличаются от приведенных в п. 2.6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fisher R. A., Dugué D. Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois de probabilité. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1948, v. 227, p. 1205–1206.
2. Линник Ю. В. Разложения вероятностных законов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1960, 264 с.
3. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М.: Наука, 1972, 480 с.
4. Ильинский А. И. О нормальных компонентах двумерных вероятностных законов. — Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов: Сб. науч. трудов ФТИНТ АН УССР, 1990, с. 14–21.
5. P'inskiy A. I. On the Poisson components of the mixtures of the probability laws. — Докл. АН Украины, 1993, № 12, с. 25–28.

Поступила в редакцию
24.V.2007

Исправленный вариант
24.I.2008

© 2009 г.

КРУГЛОВ В. М.*

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФИЛЬТРАЦИЙ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ¹⁾

Исследуется свойство непрерывности естественной фильтрации произвольного случайного процесса с выпуклым параметрическим множеством со значениями в произвольном сепарабельном метрическом пространстве. Доказано, что естественная фильтрация непрерывна слева, если случайный процесс непрерывен слева. Расширенная естественная фильтрация непрерывна слева, если случайный процесс стохастически непрерывен слева. Если стохастически непрерывный справа случайный процесс принимает значения в конечномерном евклидовом пространстве и имеет независимые приращения, то его расширенная естественная фильтрация непрерывна справа. Упомянутые утверждения обобщают давно известное утверждение, что расширенная естественная фильтрация любого процесса Леви, определенного на полном вероятностном пространстве, непрерывна справа.

Ключевые слова и фразы: случайный процесс, независимые приращения, стохастическая непрерывность, фильтрация.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: krugvictor@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 08-01-00563-а, 08-01-567-а, 08-01-90252 Узбекистан.

Непрерывность расширенной естественной фильтрации процесса броуновского движения известна по многим источникам, см., например, [1, с. 97] и [2, с. 281]. Непрерывность справа расширенной естественной фильтрации для произвольного процесса Леви доказана в книгах [3, с. 4], [4, с. 22], [5, с. 69]. В книге [5, с. 70] доказано, что естественная фильтрация и расширенная естественная фильтрация любого непрерывного слева случайного процесса непрерывна слева. Как правило предполагается, что вероятностное пространство, на котором определены случайные процессы, полное. Доказательство упомянутых утверждений основано на применении теоремы Дуба о сходимости мартингала. В настоящей заметке доказаны более общие утверждения такого рода при более слабых предположениях. В частности, полнота вероятностного пространства не требуется. Доказательство приводимых утверждений основано на другой идее без обращения к мартингальной технике.

Под случайным процессом мы будем понимать произвольное семейство $\{X_t, t \in T\}$ случайных элементов со значениями в произвольном сепарабельном метрическом пространстве $(\mathbf{M}, \rho)$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Символ ρ обозначает метрику. В качестве параметрического множества T будет выступать произвольное выпуклое множество вещественных чисел. Обозначим $t_* = \inf\{t: t \in T\}$ и $t^* = \sup\{t: t \in T\}$ граничные точки множества T . Напомним, что для любого $\omega \in \Omega$ функция $X_t(\omega), t \in T$, со значениями в $\mathbf{M}$ называется *траекторией* случайного процесса. Обозначим $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \in T, s \leq t)$ сигма-алгебру, порожденную случайными элементами $X_s, s \in T, s \leq t$. Семейство $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ называется *естественной фильтрацией* случайного процесса $\{X_t, t \in T\}$. Обозначим $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{N})$ сигма-алгебру, порожденную сигма-алгеброй $\mathcal{F}_t$ и классом $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F}: \mathbf{P}\{A\} = 0\}$ множеств нулевой вероятности. Семейство $\{\mathcal{G}_t, t \in T\}$ называется *расширенной естественной фильтрацией* случайного процесса $\{X_t, t \in T\}$. Обозначим $\mathcal{F}_{t-} = \sigma(\mathcal{F}_s, s \in T, s < t)$ для $t \in T, t > t_*$, и $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{T \ni s > t} \mathcal{F}_s$ для $t \in T, t < t^*$. Аналогично определим сигма-алгебры $\mathcal{G}_{t-} = \sigma(\mathcal{G}_s, s \in T, s < t)$ и $\mathcal{G}_{t+} = \bigcap_{T \ni s > t} \mathcal{G}_s$. Если $t_* \in T$, то мы полагаем $\mathcal{F}_{t_*-} = \mathcal{F}_{t_*}$ и $\mathcal{G}_{t_*-} = \mathcal{G}_{t_*}$ по определению. Аналогично, если $t^* \in T$, то мы полагаем $\mathcal{F}_{t^*+} = \mathcal{F}_{t^*}$ и $\mathcal{G}_{t^*+} = \mathcal{G}_{t^*}$ по определению. Фильтрация $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ называется *непрерывной слева*, если для любого $t \in T$ выполняется равенство $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$. Фильтрация $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ называется *непрерывной справа*, если для любого $t \in T$ выполняется равенство $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$. Фильтрация называется *непрерывной*, если она непрерывна слева и справа.

Теорема 1. Если все траектории случайного процесса $\{X_t, t \in T\}$ непрерывны слева, то фильтрации $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ и $\{\mathcal{G}_t, t \in T\}$ непрерывны слева.

Доказательство. Так как $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ для любых $s, t \in T, s < t$, то $\mathcal{F}_{t-} \subseteq \mathcal{F}_t$. Для любого $t > t_*$ найдется строго возрастающая последовательность чисел $t_n \in T, t_n < t, n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, сходящаяся к t . Случайный элемент X_{t_n} измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{t_n}$ и, следовательно, измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{t-}$. Случайный элемент X_t , будучи поточечным пределом $\mathcal{F}_{t-}$ -измеримых случайных элементов $X_{t_n}, n \in \mathbf{N}$, измерим относительно $\mathcal{F}_{t-}$. Поэтому сигма-алгебра $\sigma(X_t)$, порожденная случайным элементом X_t , содержится в $\mathcal{F}_{t-}$. Отсюда следует, что $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t-}$. Равенство $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$ следует из включений $\mathcal{F}_{t-} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t-}$. Далее, так как $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{G}_{t-}$ и $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_{t-}$, то $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}_{t-}$. Отсюда и из включения $\mathcal{G}_{t-} \subseteq \mathcal{G}_t$ следует равенство $\mathcal{G}_{t-} = \mathcal{G}_t$. Теорема доказана.

Случайный процесс $\{X_t, t \in T\}$ называется *стохастически непрерывным слева*, если $\lim_{T \ni s \uparrow t} \mathbf{P}\{\rho(X_s, X_t) > \varepsilon\} = 0$ для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $t \in T, t > t_*$.

Теорема 2. Если случайный процесс $\{X_t, t \in T\}$ стохастически непрерывен слева, то его расширенная естественная фильтрация $\{\mathcal{G}_t, t \in T\}$ непрерывна слева.

Доказательство. По условию последовательность $\{X_{t_n}\}_{n \geq 1}$ сходится по вероятности к X_t для любой строго возрастающей последовательности чисел

$t_n \in T$, $t_n < t$, $n \in \mathbf{N}$, $t_n \uparrow t \in T$. По теореме Фреше найдется подпоследовательность последовательности $\{X_{t_n}\}_{n \geq 1}$, сходящаяся почти всюду. Можно считать, что сама последовательность сходится почти всюду. Множество $\Omega' = \{\omega \in \Omega: \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(\omega) = X_t(\omega)\}$ является событием единичной вероятности. Возьмем произвольную точку $a \in \mathbf{M}$ и определим случайные элементы Y_{t_n} и Y_t , положив $Y_{t_n}(\omega) = X_{t_n}(\omega)$ и $Y_t(\omega) = X_t(\omega)$, если $\omega \in \Omega'$, и $Y_{t_n}(\omega) = Y_t(\omega) = a$, если $\omega \notin \Omega'$. Убедимся, что случайный элемент Y_t измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}_t$. Действительно, для любого борелевского множества $A \subseteq \mathbf{M}$ справедливо равенство $\{Y_t \in A\} = (\{X_t \in A\} \cap \Omega') \cup (\{Y_t \in A\} \cap (\Omega \setminus \Omega'))$. Множество Ω' и его дополнение принадлежат каждой сигма-алгебре $\mathcal{G}_s$, $s \in T$. Множество $\{X_t \in A\}$ принадлежит $\mathcal{G}_t$ в силу $\mathcal{G}_t$ -измеримости случайного элемента X_t . Поэтому пересечение $\{X_t \in A\} \cap \Omega'$ принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{G}_t$. Множество $\{Y_t \in A\} \cap (\Omega \setminus \Omega')$ принадлежит $\mathcal{G}_t$, так является пустым, если $a \notin A$, и равно $\Omega \setminus \Omega'$, если $a \in A$. Тем самым доказано, что $\{Y_t \in A\} \in \mathcal{G}_t$, т.е. случайный элемент Y_t измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}_t$. Аналогично можно доказать, что случайный элемент Y_{t_n} измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}_{t_n}$. Так как $\mathcal{G}_{t_n} \subseteq \mathcal{G}_{t-}$, то случайный элемент Y_{t_n} измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}_{t-}$. Случайный элемент Y_t , будучи поточечным пределом последовательности $\mathcal{G}_{t-}$ -измеримых случайных элементов Y_{t_n} , $n \in \mathbf{N}$, измерим относительно $\mathcal{G}_{t-}$. Убедимся, что случайный элемент X_t измерим относительно $\mathcal{G}_{t-}$. Действительно, для любого борелевского множества $A \subseteq \mathbf{M}$ справедливо равенство $\{X_t \in A\} = (\{Y_t \in A\} \cap \Omega') \cup \{X_t \in A\} \cap (\Omega \setminus \Omega')$. Множество Ω' и его дополнение принадлежат $\mathcal{G}_{t-}$. Множество $\{Y_t \in A\}$ принадлежит $\mathcal{G}_{t-}$ в силу $\mathcal{G}_{t-}$ -измеримости случайного элемента Y_t . Поэтому пересечение $\{Y_t \in A\} \cap \Omega'$ принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{G}_{t-}$. Множество $\{X_t \in A\} \cap (\Omega \setminus \Omega')$, будучи пересечением множеств $\{X_t \in A\} \in \mathcal{F}_t$ и $\Omega \setminus \Omega' \in \mathcal{N}$, принадлежит классу $\mathcal{N} \subset \mathcal{G}_{t-}$. Тем самым доказано, что $\{X_t \in A\} \in \mathcal{G}_{t-}$, т.е. случайный элемент X_t измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}_{t-}$. Поэтому сигма-алгебра $\sigma(X_t)$, порожденная случайным элементом X_t , принадлежит $\mathcal{G}_{t-}$. Отсюда и из включения $\mathcal{G}_{t-} \subseteq \mathcal{G}_t$ следует равенство $\mathcal{G}_{t-} = \mathcal{G}_t$. Теорема доказана.

Далее речь пойдет о случайных процессах со значениями в d -мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$. Напомним стандартные обозначения. Величина $|x - y| = (\sum_{k=1}^d |x_k - y_k|^2)^{1/2}$ называется *расстоянием* между векторами $x = (x_1, \dots, x_d)$ и $y = (y_1, \dots, y_d)$ из $\mathbf{R}^d$. Величина $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_k y_k$ называется *скалярным произведением* векторов x и y . Нам также понадобится обозначение I_A индикаторной функции множества $A \subseteq \Omega$. Она принимает два значения: $I_A(\omega) = 1$, если $\omega \in A$, и $I_A(\omega) = 0$, если $\omega \notin A$. Случайный процесс $\{X_t, t \in T\}$ называется *стохастически непрерывным справа*, если $\lim_{T \ni s \downarrow t} \mathbf{P}\{|X_s - X_t| > \varepsilon\} = 0$ для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $t \in T$, $t < t^*$. Случайный процесс $\{X_t, t \in T\}$ имеет *независимые приращения*, если для любого числа $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, и для любых чисел $t_1 < \dots < t_n$ из T случайные векторы $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы.

Теорема 3. *Расширенная естественная фильтрация любого стохастически непрерывного справа случайного процесса с независимыми приращениями непрерывна справа.*

Доказательство. По ходу доказательства теоремы нам придется воспользоваться двумя утверждениями — леммами 1 и 2. Они помещены после доказательства теоремы. Для процессов Леви они хорошо известны.

Пусть дан случайный процесс с независимыми приращениями $\{X_t, t \in T\}$. Фиксируем произвольные числа $a > 0$ и $s \in T$, $s < t^*$. Обозначим $T_s = [0, t^* - s]$, если $t^* \in T$, и $T_s = [0, t^* - s)$, если $t^* \notin T$. Разумеется, $t^* - s = \infty$, если $t^* = \infty$. Возьмем произвольное конечное число чисел $t_1 < \dots < t_n$ из множества T . Обозначим $Y_s = X_s I_{\{|X_s| < a\}}$, $Y_{t_k, s} = (X_{t_k} - X_s) I_{\{|X_{t_k} - X_s| < a\}}$, $k = 1, \dots, n$. Докажем, что для условных математических ожиданий выполняется равенство

$$\mathbf{E}(e^{i\langle u, Y_s \rangle + i \sum_{k=1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle} | \mathcal{G}_s) = \mathbf{E}(e^{i\langle u, Y_s \rangle + i \sum_{k=1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle} | \mathcal{G}_{s+}) \text{ п.в.} \quad (1)$$

для любых векторов $u, u_1, \dots, u_n \in \mathbf{R}^d$. Запись п.в. является сокращением термина почти всюду по отношению к вероятности P .

Если $s < t_1$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{i\langle u, Y_s \rangle + i \sum_{k=1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle} | \mathcal{G}_{s+}) &= e^{i\langle u, Y_s \rangle} \mathbf{E}(e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle} | \mathcal{G}_{s+}) \\ &= e^{i\langle u, Y_s \rangle} \mathbf{E} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle} \text{ п.в.} \end{aligned} \quad (2)$$

Первое равенство выполняется в силу того, что случайная величина $e^{i\langle u, Y_s \rangle}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}_{s+}$. Второе равенство выполняется в силу независимости случайной величины $\mathbf{E} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle}$ от сигма-алгебры $\mathcal{G}_{s+}$. Действительно, по лемме 2 случайный процесс $\{X_{t+s} - X_s, t \in T_s\}$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{G}_{s+}$ и, следовательно, набор случайных векторов $X_{t_k} - X_s, k = 1, \dots, n$, не зависит от $\mathcal{G}_{s+}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что случайная величина $e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle}$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{G}_{s+}$. В этих рассуждениях сигма-алгебру $\mathcal{G}_{s+}$ можно заменить сигма-алгеброй $\mathcal{G}_s$. Единственное изменение в рассуждениях состоит в замене ссылки на лемму 2 ссылкой на лемму 1. Из равенств (2) и из аналогичных равенств с заменой $\mathcal{G}_{s+}$ на $\mathcal{G}_s$ следует равенство (1).

Если $t_r \leq s < t_{r+1}$ для некоторого $r, 1 \leq r < n$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{i\langle u, Y_s \rangle + i \sum_{k=1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle} | \mathcal{G}_{s+}) \\ = e^{i\langle u, Y_s \rangle + i \sum_{k=1}^r \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle} \mathbf{E}(e^{i \sum_{k=r+1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle} | \mathcal{G}_{s+}) \\ = e^{i\langle u, Y_s \rangle + i \sum_{k=1}^r \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle} \mathbf{E} e^{i \sum_{k=r+1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle} \text{ п.в.} \end{aligned} \quad (3)$$

Нам фактически знакомо доказательство этих равенств. Первое из них выполняется в силу измеримости случайной величины $e^{i\langle u, Y_s \rangle + i \sum_{k=1}^r \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle}$ относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}_{s+}$. Второе равенство выполняется в силу независимости случайной величины $e^{i \sum_{k=r+1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle}$ от сигма-алгебры $\mathcal{G}_{s+}$. В этих рассуждениях можно заменить сигма-алгебру $\mathcal{G}_{s+}$ на сигма-алгебру $\mathcal{G}_s$. Из равенств (3) и из аналогичных равенств с заменой $\mathcal{G}_{s+}$ на $\mathcal{G}_s$ следует равенство (1).

Если $t_n \leq s$, то случайная величина $e^{i\langle u, Y_s \rangle + i \sum_{k=1}^n \langle u_k, Y_{t_k, s} \rangle}$ измерима относительно каждой из сигма-алгебр $\mathcal{G}_s$ и $\mathcal{G}_{s+}$ и совпадает почти всюду с каждым из условных математических ожиданий, о которых идет речь в (1).

Семейство $\mathcal{M}$ функций $P_{u, u_1, \dots, u_n}(x, x_1, \dots, x_n) = e^{i\langle u, x \rangle + i \sum_{k=1}^n \langle u_k, x_k \rangle}$, $x, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^d$, зависящих от параметров $u, u_1, \dots, u_n \in \mathbf{R}^d$, разделяет точки евклидова пространства $\mathbf{R}^{d(n+1)}$ в том смысле, что для любых различных точек $v, w \in \mathbf{R}^{d(n+1)}$ найдется функция $P_{u, u_1, \dots, u_n}(x, x_1, \dots, x_n)$, которая принимает различные значения в точках v и w . Наряду с любой функцией $P_{u, u_1, \dots, u_n}(x, x_1, \dots, x_n)$ семейство $\mathcal{M}$ содержит функцию, комплексно сопряженную с ней. По теореме Стоуна–Вейерштрасса ([6, с. 97]) любая ограниченная непрерывная комплексная и, в частности, вещественная функция переменных $x, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^d$ на любом компактном множестве $K \subset \mathbf{R}^{d(n+1)}$ является равномерным пределом некоторой последовательности конечных линейных комбинаций функций из семейства $\mathcal{M}$ с комплексными коэффициентами. Возьмем произвольную ограниченную непрерывную вещественную функцию $g(x_1, \dots, x_n)$ переменных $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^d$. Ограниченная непрерывная вещественная функция $g(x_1 + x, \dots, x_n + x)$ переменных $x, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^d$ является равномерным пределом на компактном множестве $\{(x, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{d(n+1)}: |x| \leq a, |x_1| \leq a, \dots, |x_n| \leq a\}$ некоторой последовательности $Q_m(x, x_1, \dots, x_n)$, $m \in \mathbf{N}$, конечных линейных комбинаций функций из семейства $\mathcal{M}$ с комплексными коэффициентами. В силу (1) для любого $m \in \mathbf{N}$ выполняется равенство

$$\mathbf{E}(Q_m(Y_s, Y_{t_1, s}, \dots, Y_{t_n, s}) | \mathcal{G}_s) = \mathbf{E}(Q_m(Y_s, Y_{t_1, s}, \dots, Y_{t_n, s}) | \mathcal{G}_{s+}) \text{ п.в.}$$

Равномерная сходимость гарантирует возможность предельного перехода под знаком условного математического ожидания. Предельный переход по $m \rightarrow \infty$ приведет к

равенству

$$\mathbf{E}(g(Y_{t_1,s} + Y_s, \dots, Y_{t_n,s} + Y_s) | \mathcal{G}_s) = \mathbf{E}(g(Y_{t_1,s} + Y_s, \dots, Y_{t_n,s} + Y_s) | \mathcal{G}_{s+}) \text{ п.в.}$$

Напомним, что $Y_s = X_s I_{\{|X_s| < a\}}$, $Y_{t_k,s} = (X_{t_k} - X_s) I_{\{|X_{t_k} - X_s| < a\}}$. Предыдущее равенство выполняется для любого $a = r \in \mathbf{N}$. Снова можно перейти к пределу под знаком условного математического ожидания. Полагая $a = r \rightarrow \infty$, мы придем к равенству

$$\mathbf{E}(g(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) | \mathcal{G}_s) = \mathbf{E}(g(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) | \mathcal{G}_{s+}) \text{ п.в.} \quad (4)$$

Возьмем произвольное замкнутое множество $A \subseteq \mathbf{R}^{dn}$. Функция $\rho(x, A) = \inf\{|x - y|: y \in A\}$, $x \in \mathbf{R}^{dn}$, непрерывна, обращается в нуль на множестве A и строго положительна на дополнении множества A . Последовательность ограниченных непрерывных функций $g_m(x) = 1 + \rho(x, A)/(1 + m\rho(x, A))$, $x \in \mathbf{R}^{dn}$, $m \in \mathbf{N}$, поточечно сходится к индикаторной функции I_A множества A . Для каждого $m \in \mathbf{N}$ выполняется равенство (4) с $g = g_m$. Здесь снова можно перейти к пределу под знаком условного математического ожидания. Полагая $m \rightarrow \infty$ в равенстве (4) с $g = g_m$ мы придем к равенству

$$\mathbf{E}(I_A(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) | \mathcal{G}_s) = \mathbf{E}(I_A(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) | \mathcal{G}_{s+}) \text{ п.в.} \quad (5)$$

Обозначим $\mathcal{B}^{dn}$ сигма-алгебру борелевских подмножеств евклидова пространства $\mathbf{R}^{dn}$ и класс $\mathcal{L}_{dn}$ множеств $A \in \mathcal{B}^{dn}$, для которых выполняется равенство (5). Класс $\mathcal{L}_{dn}$ содержит $\mathbf{R}^{dn}$. Если $A, B \in \mathcal{L}_{dn}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{L}_{dn}$. Если $A_m \in \mathcal{L}_{dn}$ и $A_m \subseteq A_{m+1}$ для всех $m \in \mathbf{N}$, то $\cup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{L}_{dn}$. Докажем, например, последнее утверждение. Для любого $m \in \mathbf{N}$ выполняется равенство (5) с $A = A_m$. Устремим m к бесконечности. По теореме о монотонной сходимости для условных математических ожиданий равенство (5) выполняется для $A = \cup_{m=1}^{\infty} A_m$. Тем самым доказано, что класс $\mathcal{L}_{dn}$ является λ -классом. По доказанному выше он содержит все замкнутые подмножества евклидова пространства $\mathbf{R}^{dn}$. По теореме Серпинского [2, с. 5] класс $\mathcal{L}_{dn}$ совпадает с борелевской сигма-алгеброй $\mathcal{B}^{dn}$.

Обозначим $\mathcal{F}_{\infty} = \sigma(\mathcal{F}_t, t \in T, \mathcal{N})$ сигма-алгебру, порожденную классом $\mathcal{N}$ множеств нулевой вероятности и фильтрацией $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$. Класс $\mathcal{L}$ множеств $B \in \mathcal{F}_{\infty}$, для которых выполняется равенство $\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) = \mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_{s+})$ п.в., является λ -классом. В силу (5) класс $\mathcal{L}$ содержит все множества вида $B = \{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A\}$, где $A \in \mathcal{B}^{nd}$. Класс таких множеств замкнут относительно операции пересечения конечного числа множеств и порождает сигма-алгебру $\mathcal{F}_{\infty}$. По упомянутой теореме Серпинского выполняется равенство $\mathcal{L} = \mathcal{F}_{\infty}$. Заметим, что для любого $s \in T$ каждая из сигма-алгебр $\mathcal{G}_s$ и $\mathcal{G}_{s+}$ является частью сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\infty}$. Поэтому для индикаторной функции любого множества $B \in \mathcal{G}_{s+}$ выполняется равенство $\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) = I_B$ почти всюду, т.е. $\{\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) \neq I_B\} \in \mathcal{N}$. Отсюда следует, что индикаторная функция I_B измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}_s$. Достаточно доказать, что $\{I_B = 1\} \in \mathcal{G}_s$. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что каждое слагаемое справа в равенстве $\{I_B = 1\} = (\{\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) = 1\} \cap \{\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) = I_B\}) \cup (\{I_B = 1\} \cap \{\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) \neq I_B\})$ принадлежит $\mathcal{G}_s$. Так как $\{I_B = 1\} \in \mathcal{G}_{s+}$ и $\{\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) \neq I_B\} \in \mathcal{N}$, то $\{I_B = 1\} \cap \{\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) \neq I_B\} \in \mathcal{N} \subset \mathcal{G}_s$. Так как $\{\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) \neq I_B\} \in \mathcal{N} \subset \mathcal{G}_s$, то $\{\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) = I_B\} \in \mathcal{G}_s$ и, следовательно, $\{\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) = 1\} \cap \{\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) = I_B\} \in \mathcal{G}_s$. Здесь принято во внимание, что $\{\mathbf{E}(I_B | \mathcal{G}_s) = 1\} \in \mathcal{G}_s$. Доказано, что $\{I_B = 1\} \in \mathcal{G}_s$, т.е. индикаторная функция I_B измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}_s$. Это означает, что $B \in \mathcal{G}_s$. Тем самым доказано, что $\mathcal{G}_{s+} \subseteq \mathcal{G}_s$. Так как $\mathcal{G}_s \subseteq \mathcal{G}_{s+}$, то $\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_{s+}$. Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 вытекает следующее следствие.

Следствие. Если стохастически непрерывный случайный процесс имеет независимые приращения, то его расширенная фильтрация непрерывна.

При доказательстве теоремы мы воспользовались двумя леммами. Докажем их.

Лемма 1. Если случайный процесс $\{X_t, t \in T\}$ имеет независимые приращения, то для любого $s \in T, s < t^*$, случайный процесс $\{X_{t+s} - X_s, t \in T_s\}$ не зависит от каждой из сигма-алгебр $\mathcal{F}_s, \mathcal{G}_s$.

Доказательство. Независимость случайного процесса $\{X_{t+s} - X_s, t \in T_s\}$ и сигма-алгебры $\mathcal{F}_s$ по определению означает независимость сигма-алгебр $\mathcal{A} = \sigma(X_{t+s} - X_s, t \in T_s)$ и $\mathcal{F}_s$. Сигма-алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}_s$ порождаются классами $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ множеств вида $A = \{X_{t_k+s} - X_s \in A_k, k = 1, \dots, n\}$ и $B = \{X_{s_k} \in B_k, k = 1, \dots, m\}$, где $m, n \in \mathbf{N}, t_1 < \dots < t_n$ — произвольные числа из $T_s, s_1 < \dots < s_m \leq s$ — произвольные числа из $T, A_1, \dots, A_n$ и $B_1, \dots, B_m$ — произвольные борелевские подмножества евклидова пространства $\mathbf{R}^d$. Напомним, что s является фиксированным числом, $s \in T, s < t^*$. Каждый из классов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ является π -классом; другими словами, каждый из них содержит пересечение любых двух своих множеств. Выше было сказано, что $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ и $\mathcal{F}_s = \sigma(\mathcal{D})$. Известно [7, с. 238–239], что сигма-алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}_s$ независимы, если независимы любые представители классов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$. По предположению случайные векторы $X_{s_1}, X_{s_k} - X_{s_{k-1}}, k = 2, \dots, m, X_{t_1+s} - X_s, X_{t_j+s} - X_{t_{j-1}+s}, j = 2, \dots, n$, независимы. Пусть даны произвольные d -мерные векторы $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$. Обозначим $u'_k = \sum_{r=k}^m u_r$ для $k = 1, \dots, m$ и $v'_k = \sum_{r=k}^n v_r$ для $k = 1, \dots, n$. Привлекая независимость перечисленных случайных векторов, мы получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(e^{i \sum_{k=1}^m \langle u_k, X_{s_k} \rangle + i \sum_{k=1}^n \langle v_k, (X_{t_k+s} - X_s) \rangle} \right) \\ &= \mathbf{E} \left(e^{i \langle u'_1, X_{s_1} \rangle + i \sum_{k=2}^m \langle u'_k, (X_{s_k} - X_{s_{k-1}}) \rangle + i \langle v'_1, (X_{t_1+s} - X_s) \rangle + i \sum_{k=2}^n \langle v'_k, (X_{t_k+s} - X_{t_{k-1}+s}) \rangle} \right) \\ &= \mathbf{E} \left(e^{i \langle u'_1, X_{s_1} \rangle + i \sum_{k=2}^m \langle u'_k, (X_{s_k} - X_{s_{k-1}}) \rangle} \right) \\ & \quad \times \mathbf{E} \left(e^{i \langle v'_1, (X_{t_1+s} - X_s) \rangle + i \sum_{k=2}^n \langle v'_k, (X_{t_k+s} - X_{t_{k-1}+s}) \rangle} \right) \\ &= \mathbf{E} \left(e^{i \sum_{k=1}^m \langle u_k, X_{s_k} \rangle} \right) E \left(e^{i \sum_{k=1}^n \langle v_k, (X_{t_k+s} - X_s) \rangle} \right). \end{aligned}$$

Мы видим, что совместная характеристическая функция двух групп случайных векторов $X_{t_1+s} - X_s, \dots, X_{t_n+s} - X_s$ и $X_{s_1}, \dots, X_{s_m}$ может быть записана в виде произведения совместных характеристических функций отдельных групп случайных векторов. По известному критерию [7, с. 241–242] упомянутые две группы случайных векторов независимы и, следовательно, множества $A \in \mathcal{C}$ и $B \in \mathcal{D}$ независимы и, следовательно, сигма-алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}_s$ независимы.

Независимость случайного процесса $\{X_{t+s} - X_s, t \in T_s\}$ и сигма-алгебры $\mathcal{G}_s$ по определению означает независимость сигма-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{G}_s$. Докажем равенство $\mathcal{G}_s = \sigma(\mathcal{R}_s)$, где $\mathcal{R}_s = \{A \cup B: A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{F}_s\}$. Легко видеть, что пересечение любых двух множеств из класса $\mathcal{R}_s$ принадлежит $\mathcal{R}_s$. Это означает, что $\mathcal{R}_s$ является π -классом. Из соотношений $\mathcal{N} \subseteq \sigma(\mathcal{R}_s), \mathcal{F}_s \subseteq \sigma(\mathcal{R}_s), \mathcal{R}_s \subseteq \mathcal{G}_s$ следует требуемое равенство $\mathcal{G}_s = \sigma(\mathcal{R}_s)$. Сигма-алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{G}_s$ независимы, если любые представители классов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{R}_s$ независимы. Требуется доказать равенство $\mathbf{P}\{C \cap D\} = \mathbf{P}\{C\}\mathbf{P}\{D\}$ для любых $C \in \mathcal{A}$ и $D \in \mathcal{R}_s$. Множество D можно записать в виде объединения $A \cup B$ множеств $A \in \mathcal{N}$ и $B \in \mathcal{F}_s$. По доказанному выше выполняется равенство $\mathbf{P}\{C \cap B\} = \mathbf{P}\{C\}\mathbf{P}\{B\}$ и, следовательно, $\mathbf{P}\{C \cap D\} = \mathbf{P}\{C\}\mathbf{P}\{D\}$, так как $\mathbf{P}\{C \cap D\} = \mathbf{P}\{C \cap B\}$ и $\mathbf{P}\{D\} = \mathbf{P}\{B\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если стохастически непрерывный справа случайный процесс $\{X_t, t \in T\}$ имеет независимые приращения, то для любого $s \in T, s < t^*$, случайный процесс $\{X_{t+s} - X_s, t \in T_s\}$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{G}_{s+}$.

Доказательство. Сначала мы предположим, что $t^* \notin T$. Пусть $s \in T$. Возьмем произвольные числа $t_* \leq t_1 < \dots < t_n < t^* - s$. Найдется $h > 0$ такое, что

$t_n + h < t^* - s - h$. По лемме 1 случайный процесс $\{X_{t+s+h} - X_{s+h}, t \in T_{s+h}\}$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{G}_{s+h}$ и, следовательно, не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{G}_s$, так как $\mathcal{G}_s = \bigcap_{s+h \geq v > s} \mathcal{G}_v \subseteq \mathcal{G}_{s+h}$. Для любого числа $u \in \mathbf{R}^1$, для любых d -мерных векторов $u_1, \dots, u_n$ и для любого множества $A \in \mathcal{G}_s$ выполняется равенство

$$\mathbf{E} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+s+h} - X_{s+h}) \rangle + iuI_A} = \mathbf{E} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+s+h} - X_{s+h}) \rangle} \mathbf{E} e^{iuI_A}.$$

Устремив $h = h_m \downarrow 0$ по некоторой последовательности, мы получим

$$\mathbf{E} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+s} - X_s) \rangle + iuI_A} = \mathbf{E} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+s} - X_s) \rangle} \mathbf{E} e^{iuI_A} \quad (6)$$

по теореме об ограниченной сходимости. Заметим, что функции под знаком математического ожидания ограничены и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+s+h_m} - X_{s+h_m}) \rangle} = e^{i \sum_{k=1}^n \langle u_k, (X_{t_k+s} - X_s) \rangle}$$

по вероятности. Равенство (6) означает, что случайные векторы $X_{t_k+s} - X_s$, $k = 1, \dots, n$, не зависят от индикаторной функции I_A . Это означает, что случайный процесс $\{X_{t+s} - X_s, t \in T_s\}$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{G}_s$.

Пусть $t^* \in T$. Возьмем произвольные числа $t_* \leq t_1 < \dots < t_n \leq t^* - s$. Если $t_n < t^* - s$, то применимы предыдущие рассуждения. В результате мы убедимся, что случайные векторы $X_{t_k+s} - X_s$, $k = 1, \dots, n$, не зависят от индикаторной функции I_A . Пусть $t_n = t^* - s$. Так как $t_{n-1} < t^* - s$, то найдется $h > 0$ такое, что $t_{n-1} + h < t^* - s - h$. По лемме 1 случайная величина $e^{i \sum_{k=1}^{n-1} \langle u_k, (X_{t_k+s+h} - X_{s+h}) \rangle + i \langle u_n, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}+s+h}) \rangle}$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{G}_{s+h}$ и, следовательно, выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} e^{i \sum_{k=1}^{n-1} \langle u_k, (X_{t_k+s+h} - X_{s+h}) \rangle + \langle u_n, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}+s+h}) \rangle + iuI_A} \\ &= \mathbf{E} e^{i \sum_{k=1}^{n-1} \langle u_k, (X_{t_k+s+h} - X_{s+h}) \rangle + \langle u_n, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}+s+h}) \rangle} \mathbf{E} e^{iuI_A}. \end{aligned}$$

Полагая $h = h_m \downarrow 0$ по некоторой последовательности мы приходим к равенству (6). Лемма доказана.

В заключение я благодарю А. А. Гущина, обратившего мое внимание на книги [3] и [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
2. Yeh J. Martingales and Stochastic Analysis. Singapore: World Scientific, 1995, 516 p.
3. Bretnolle J. L., Chatterji S. D., Meyer P. A. Ecole d'ete de probabilites: Processus Stochastiques. Berlin: Springer, 2008.
4. Protter P. E. Stochastic Integration and Differential Equations. Second ed. Berlin: Springer, 2004, 444 p.
5. Medvedev P. Stochastic Integration Theory. New York: Oxford Univ. Press, 2008, 632 p.
6. Hewitt E., Stromberg K. Real and Abstract Analysis. A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable. New York: Springer-Verlag, 1965, 476 p.
7. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.

Поступила в редакцию
23.IV.2009