Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, О вероятностях малых уклонений максимума частных сумм,
Теория вероятн. и ее примен., 2009, том 54, выпуск 4, 794–801

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:44:52

© 2009 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

О ВЕРОЯТНОСТЯХ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ МАКСИМУМА ЧАСТНЫХ СУММ¹⁾

Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$, где $X_1, X_2, \dots$ — независимые копии случайной величины X . Предполагается, что для некоторых положительных B_n распределение S_n/B_n слабо сходится к некоторому невырожденному распределению.

Наша главная цель заключается в изучении асимптотического поведения сумм вида

$$\sum_{n \geq 1} f_n \mathbf{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \leq r \frac{B_n}{\phi_n} \right) \quad \text{при } r \nearrow \infty,$$

где $\phi_n \nearrow \infty$, $f_n \geq 0$, а ряд $\sum f_n$ расходится.

Ключевые слова и фразы: малые уклонения, максимум частных сумм, размах, области притяжения, устойчивые законы.

1. Введение и результаты. Рассмотрим случайную величину X и ее независимые копии $X_1, X_2, \dots$. Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$. В дальнейшем будем предполагать, что для некоторых положительных B_n

$$\text{распределение } B_n^{-1} S_n \text{ слабо сходится к некоторому} \quad (1.1)$$

$$\text{невырожденному распределению.}$$

Имея в виду, что это распределение обязано быть строго устойчивым с некоторым характеристическим показателем α , $0 < \alpha \leq 2$ (см. [1], [12, (1.5)–(1.8) при $a_n = 0$]), обозначим его F_α .

Наша главная цель заключается в изучении асимптотического поведения сумм вида

$$\sum_{n \geq 1} f_n \mathbf{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \leq r \frac{B_n}{\phi_n} \right) \quad \text{при } r \nearrow \infty,$$

где

$$\phi_n \nearrow \infty, \quad f_n \geq 0, \quad \sum_{n \geq 1} f_n = \infty. \quad (1.2)$$

Схожие задачи рассматривались рядом авторов (см., например, [2]–[14], а также более ранние ссылки в [16, Дополнения к гл. VI и VII]). Потребность в подобных исследованиях изначально была стимулирована сильными предельными теоремами типа закона повторного логарифма в форме Колмогорова или Чжуна и возникает при решении ряда других задач, таких, например, как изучение числа выходов случайного блуждания за криволинейную границу.

Непосредственным поводом для настоящего исследования явилась статья [14], в которой с помощью метода сильной аппроксимации было доказано, что если $\mathbf{E} X = 0$, $\mathbf{E} X^2 = 1$ и $\mathbf{E} X^2 (\ln |X|)^{\rho/2} < \infty$ при некотором фиксированном положительном ρ , то

$$\begin{aligned} \lim_{r \nearrow \infty} r^{-\rho} \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^{\rho/2-1}}{n} \mathbf{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \leq r \sqrt{\frac{\pi^2 n}{8 \ln n}} \right) \\ = \frac{4}{\pi} \Gamma \left(\frac{\rho}{2} \right) \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{\rho+1}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия; e-mail: l.rozovski@mail.ru

¹⁾ Исследование выполнено при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-4222.2006.1) и РФФИ (грант № 06-01-00179-а).

В настоящей статье будет показано, что утверждения более общие и более точные, нежели равенство (1.3), можно получить, используя результаты и идеи, содержащиеся в работе [1]. Так, равенство (1.3) остается справедливым без излишних моментных предположений.

Сформулируем результаты. Введем обозначения.

Определим случайную ступенчатую функцию $\xi_n(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $n \geq 1$, положив

$$\xi_n(t) = \frac{S_k}{B_n} \quad \text{при} \quad \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}, \quad (1.4)$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$, $S_0 = 0$. Пусть $\{\xi(t); t \geq 0\}$ обозначает однородный процесс с независимыми приращениями такой, что $\mathbf{P}(\xi(t) < x) = F_\alpha(x t^{-1/\alpha})$ при любых положительных t . Мы также предполагаем, что выборочные траектории $\xi(t)$ непрерывны справа с вероятностью 1.

Обозначим через $D(0, 1)$ пространство вещественных функций $f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, без разрывов второго рода, непрерывных справа при $0 \leq t < 1$ и слева при $t = 1$.

Для любого борелевского множества $G \subseteq D(0, 1)$ и любого положительного a положим

$$\mathcal{P}_G(a) = \mathbf{P}(a\xi(\cdot) \in G), \quad \mathcal{P}_G^n(a) = \mathbf{P}(a\xi_n(\cdot) \in G). \quad (1.5)$$

Начнем со следующего довольно общего утверждения, в котором собраны observable и в то же время близкие к оптимальным условия, позволяющие вычислить асимптотику суммы $\sum_{n \geq 1} f_n \mathcal{P}_G^n(\varepsilon \phi_n)$ при $\varepsilon \searrow 0$.

Предложение 1.1. Пусть выполняются условия (1.2), а также условия

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} < \infty, \quad (1.6)$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \phi_k^\delta \sum_{n > k} f_n \phi_n^{-\delta} \left(\sum_{n=1}^k f_n \right)^{-1} < \infty \quad (\exists \delta > 0). \quad (1.7)$$

Предположим, что борелевское множество $G \subseteq D(0, 1)$ таково, что

$$\sup_{a > 0} |\mathcal{P}_G^n(a) - \mathcal{P}_G(a)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

$$\inf_{0 < b < a} \mathcal{P}_G(b) > 0 \quad (\forall a \in (0, \infty)) \quad (1.9)$$

и, кроме того, при некотором $\gamma > \delta$ (где δ определяется условием (1.7))

$$\sup_{a > 0} a^\gamma \mathcal{P}_G(a) < \infty, \quad (1.10a)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 < a < \phi_n} a^\gamma \mathcal{P}_G^n(a) < \infty. \quad (1.10b)$$

Тогда

$$\sum_{n \geq 1} f_n \mathcal{P}_G^n(\varepsilon \phi_n) \sim \sum_{n \geq 1} f_n \mathcal{P}_G(\varepsilon \phi_n), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (1.11)$$

Теперь обсудим условия предложения 1.

З а м е ч а н и е 1. Если

$$0 \leq f_n \sim \int_{\phi_n}^{\phi_{n+1}} g(u) \frac{du}{u}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.12)$$

где положительная функция $g(u)$ удовлетворяет условиям

$$\int_1^\infty g(u) \frac{du}{u} = \infty, \quad (1.13)$$

$$\frac{g(u)}{u^\delta} \text{ убывает при некотором } \delta > 0 \text{ и всех} \quad (1.14)$$

достаточно больших u ,

то имеет место (1.7). Кроме того, если

$$\phi_n \nearrow \infty, \quad \phi_{n+1} \sim \phi_n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.15)$$

и

$$\mathcal{P}_G(a) — \text{невозрастающая положительная функция } a, \quad (1.16)$$

то

$$\sum_{n \geq 1} f_n \mathcal{P}_G(\varepsilon \phi_n) \sim \psi_G(\varepsilon) = \int_1^\infty g(u) \mathcal{P}_G(\varepsilon u) \frac{du}{u}, \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (1.17)$$

З а м е ч а н и е 2. Пусть положительная функция $g(u)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\rho \geq 0$. Тогда из условий (1.16) и (1.10а) следует, что при $\varepsilon \searrow 0$

$$\psi_G(\varepsilon) \sim g\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \int_0^\infty u^{\rho-1} \mathcal{P}_G(u) du, \quad \rho > 0, \quad (1.18)$$

а если имеет место (1.13), то

$$\psi_G(\varepsilon) \sim \mathcal{P}_G(0) \int_1^{1/\varepsilon} g(u) \frac{du}{u}, \quad \rho = 0, \quad (1.19)$$

где

$$\mathcal{P}_G(0) = \lim_{a \searrow 0} \mathcal{P}_G(a). \quad (1.20)$$

Отметим (см. [12, замечание 2]), что если $f_\gamma(u)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\gamma > -1$ и $g(u) = f_\gamma(\ln u)$, то

$$\int_1^z g(u) \frac{du}{u} \sim \frac{\ln z}{1+\gamma} g(z), \quad z \rightarrow \infty;$$

если $g(u) = f_\gamma(\ln \ln u)/\ln u$, то

$$\int_1^z g(u) \frac{du}{u} \sim \frac{\ln z \ln \ln z}{1+\gamma} g(z), \quad z \rightarrow \infty.$$

Заметим также, что в некоторых случаях коэффициент $\int_0^\infty u^{\rho-1} \mathcal{P}_G(u) du$ ($\rho > 0$) может быть вычислен.

Для положительного a и борелевского множества $G \subseteq D(0, 1)$ положим

$$aG = \{f \in D(0, 1): a^{-1}f(t) \in G\}.$$

З а м е ч а н и е 3. Пусть

$$aG \subseteq bG \quad (\forall 0 < a < b < \infty). \quad (1.21)$$

Тогда из условия (1.10а), а также из условий

$$\mathcal{P}_G(a) — \text{непрерывная положительная функция } a, \quad (1.22)$$

$$\mathcal{P}_{\partial G}(a) = 0 \quad (\forall a > 0), \text{ где } \partial G — \text{граница } G, \quad (1.23)$$

и (см. (1.20))

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lim_{a \searrow 0} \mathcal{P}_G^n(a) \leq \mathcal{P}_G(0) \quad (1.24)$$

следует (1.8). Кроме того, из (1.21) и (1.22) вытекает условие (1.9).

Введем класс $\mathcal{N}$ множеств

$$G = G(c; t_1, t_2) = \{f \in D(0, 1): f(0) = 0, |f(t)| < c; t_1 \leq t < t_2\}, \quad (1.25)$$

где $0 < c < \infty$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$.

З а м е ч а н и е 4. Пусть

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \phi_n}{n} = 0. \quad (1.26)$$

Если

$$G \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq N} G_i \quad (1.27)$$

при некоторых $G_i \in \mathcal{N}$ и конечном $N = 1, 2, \dots$, то условия (1.10) выполняются при любом $\gamma > 0$.

Отметим, что (1.26) является следствием (1.15).

З а м е ч а н и е 5. Пусть

$$0 < F_\alpha(0) < 1. \quad (1.28)$$

Если

$$G \supseteq \tilde{G} \quad (\exists \tilde{G} \in \mathcal{N}), \quad (1.29)$$

то справедливо (1.9).

Заметим, что предположение (1.28) информативно лишь при $0 < \alpha < 1$.

Обращаем внимание на то, что множества G типа

$$J_a = \left\{ f \in D(0, 1): f(0) = 0, \sup_{0 \leq t \leq 1} f(t) - \inf_{0 \leq t \leq 1} f(t) \leq a \right\}, \quad a > 0,$$

$$I_c^b = \left\{ f \in D(0, 1): f(0) = 0, c \leq \inf_{0 \leq t \leq 1} f(t) \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} f(t) \leq b \right\}, \quad c < 0 < b,$$

удовлетворяют условиям (1.27), (1.29) при $N = 1$.

Далее приведем некоторые следствия предложения 1.

Для краткости обозначим $\Delta\phi_n = \phi_{n+1} - \phi_n$,

$$m_n = \min_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad R_n = M_n - m_n. \quad (1.30)$$

Теорема 1.1. Пусть удовлетворяются условия (1.15), (1.28), а положительная функция $g(u)$ медленно меняется на бесконечности с показателем $\rho \geq 0$ и при $\rho = 0$ удовлетворяет условию (1.13). Тогда

1) для любых $0 < a, b < \infty$

$$\lim_{r \nearrow \infty} \left(\int_1^r g(u) \frac{du}{u} \right)^{-1} \sum_{n \geq 1} g(\phi_n) \frac{\Delta\phi_n}{\phi_n} \mathbf{P} \left(-ar \frac{B_n}{\phi_n} \leq m_n \leq M_n \leq br \frac{B_n}{\phi_n} \right) = A_\alpha(\rho; a, b);$$

2) справедливо равенство

$$\lim_{r \nearrow \infty} \left(\int_1^r g(u) \frac{du}{u} \right)^{-1} \sum_{n \geq 1} g(\phi_n) \frac{\Delta\phi_n}{\phi_n} \mathbf{P} \left(R_n \leq r \frac{B_n}{\phi_n} \right) = C_\alpha(\rho).$$

Здесь постоянные $A_\alpha(\rho; a, b)$ и $C_\alpha(\rho)$ в случае положительного ρ равны $\rho \int_0^\infty u^{\rho-1} \mathcal{P}_G(u) du$ при $G = I_{-a}^b$ и $G = J_1$ соответственно, а в случае $\rho = 0$ равны единице.

Кроме того, при $\rho > 0$

$$\int_1^r g(u) \frac{du}{u} \sim \frac{g(r)}{\rho}, \quad r \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 6. 1) $A_\alpha(\rho; 1, 1) = \rho^{-1} \mathbf{E} \Xi^{-\rho}$ и $C_\alpha(\rho) = \rho^{-1} \mathbf{E} R^{-\rho}$, где $\Xi = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi(t)|$, $R = \sup_{0 \leq t \leq 1} \xi(t) - \inf_{0 \leq t \leq 1} \xi(t)$.

2) Пусть $\rho > 0$. Если $\alpha = 2$, т.е. $\xi(\cdot)$ — стандартный винеровский процесс $W(\cdot)$, то

$$A_2(\rho; a, b) = \frac{2\rho}{\pi} \left(\frac{c\sqrt{2}}{\pi} \right)^\rho \Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right) \sum_{k \geq 0} (2k+1)^{-1-\rho}$$

$$\times \sin(2k+1)\pi \frac{a}{c}, \quad c = a + b, \quad (1.31)$$

$$C_2(\rho) = \frac{4(1+\rho)}{\pi^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi} \right)^\rho \Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right) \sum_{k \geq 0} (2k+1)^{-(2+\rho)}. \quad (1.32)$$

Чтобы получить (1.3), воспользуемся первым утверждением теоремы 1 при

$$\alpha = 2, \quad \mathbf{E} X = 0, \quad \mathbf{E} X^2 = 1, \quad g(u) = u^\rho, \quad \phi_n = \sqrt{\frac{8 \ln n}{\pi^2}},$$

$$a = b = 1, \quad B_n = \sqrt{n},$$

и тем, что

$$A_2(\rho, 1, 1) = \frac{2\rho}{\pi} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right)^\rho \Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right) \sum_{k \geq 0} (-1)^k (2k+1)^{-1-\rho}.$$

2. Доказательства. Докажем предложение 1. Пусть положительная функция $M = M(\varepsilon)$ растет к бесконечности при $\varepsilon \searrow 0$. Обозначим $n_1 = \max(n: \phi_n \leq 1/\varepsilon)$, $n_2 = \max(n: \phi_n \leq M/\varepsilon)$ и

$$\left(\sum_{1 \leq n < M} + \sum_{M \leq n \leq n_2} + \sum_{n > n_2} \right) f_n \mathcal{P}_G^n(\varepsilon \phi_n) = S_1 + S_2 + S_3. \quad (2.1)$$

Из (1.8), (1.9) следует, что если функция M достаточно медленно растет к бесконечности, то

$$\mathcal{P}_G^n(\varepsilon \phi_n) \sim \mathcal{P}_G(\varepsilon \phi_n), \quad \varepsilon \searrow 0,$$

равномерно по n таким, что $M \leq n \leq n_2$, и поэтому

$$S_2 \sim \sum_{M \leq n \leq n_2} f_n \mathcal{P}_G(\varepsilon \phi_n), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (2.2)$$

Принимая во внимание (см. (1.2) и (1.9)), что

$$S(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} f_n \mathcal{P}_G(\varepsilon \phi_n) \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \searrow 0,$$

получим

$$\sum_{1 \leq n < M} f_n (\mathcal{P}_G^n(\varepsilon \phi_n) + \mathcal{P}_G(\varepsilon \phi_n)) \leq 2 \sum_{1 \leq n < M} f_n = o(S(\varepsilon)), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (2.3)$$

Из условий (1.10) и (1.7) следует, что при некоторых положительных γ, δ

$$\begin{aligned} \sum_{n > n_2} f_n (\mathcal{P}_G^n(\varepsilon \phi_n) + \mathcal{P}_G(\varepsilon \phi_n)) &\leq A_1 M^{-\gamma} \sum_{n > n_1} f_n (\varepsilon \phi_n)^{-\delta} \\ &\leq A_2 M^{-\gamma} (\varepsilon \phi_{n_1})^{-\delta} \sum_{n=1}^{n_1} f_n \leq A_2 M^{-\gamma} \frac{(\phi_{n_1+1}/\phi_{n_1})^\delta}{\inf_{0 < b \leq 1} \mathcal{P}_G(b)} S(\varepsilon), \end{aligned}$$

где постоянные A_i не зависят от ε . Таким образом, из (1.6), (1.9), (2.1)–(2.3) вытекает (1.11). Тем самым, доказательство предложения 1 закончено.

Теперь займемся замечаниями.

Сначала проверим справедливость замечания 1. То, что (1.12), (1.14) влечет (1.7), было доказано в [12, доказательство следствия 2]. Покажем, что (1.17) следует из (1.12)–(1.16). В силу условия (1.16) имеем

$$\mathcal{P}_G(\varepsilon \phi_n) \int_{\phi_n}^{\phi_{n+1}} g(u) \frac{du}{u} \geq \int_{\phi_n}^{\phi_{n+1}} \mathcal{P}_G(\varepsilon u) g(u) \frac{du}{u},$$

и при $0 < \lambda < \phi_n/\phi_{n+1} \leq 1$ выполнено неравенство

$$\mathcal{P}_G(\varepsilon \phi_n) \int_{\phi_n}^{\phi_{n+1}} g(u) \frac{du}{u} \leq \int_{\phi_n}^{\phi_{n+1}} \mathcal{P}_G(\varepsilon \lambda u) g(u) \frac{du}{u}.$$

Кроме того, легко убедиться в том, что из (1.14), (1.16) следует

$$\psi_G(\varepsilon) \leq \psi_G(\lambda\varepsilon) \leq \lambda^{-\delta} \psi_G(\varepsilon) + g(1)(\lambda^{-\delta} - 1)\delta^{-1}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Теперь, с учетом (1.12), соотношение (1.17) представляется достаточно очевидным.

Доказательство справедливости замечания 2 может быть проведено аналогично доказательству замечания 2 (утверждения 1) и 2)) в [12] (см. также [13, формулы (3.2)–(3.5)]).

Замечание 3 проверяется с помощью стандартных рассуждений — как в [16, п. 5, теорема 13], с учетом того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_G^n(a) = \mathcal{P}_G(a)$ ($\forall a > 0$) в соответствии с (1.1) и хорошо известными теоремами о сходимости вероятностных процессов [18], [19].

Докажем теперь замечание 4. Изучая (1.10b), мы можем ограничиться множеством $G \in \mathcal{N}$. Обозначим (см. (1.25)) $m = [n(t_2 - t_1)]$, $k_0 = [nt_1]$, $\delta = 2cB_n/a$. Тогда по (1.4) и [1, формула (32)] (см. обозначения в (1.30))

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_G^n(a) &\leq \mathbf{P}\left(\max_{k_0 \leq i \leq m+k_0} |S_i| < \frac{cB_n}{a}\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\max_{0 \leq j \leq m} |S_j| < \delta\right) \leq [\mathbf{P}(R_k < 2\delta)]^l \leq \left[\mathbf{P}\left(\max_{0 \leq i \leq k} |S_i| < 2\delta\right)\right]^l \end{aligned} \quad (2.4)$$

для любого $1 \leq k \leq m$ и для $l = [m/k]$.

Пусть $a < \phi_n$ достаточно велико. Положим в (2.4) $k = [m/\ln a]$. Принимая во внимание (1.26) и то, что последовательность B_n правильно меняется, находим, что вероятность $\mathbf{P}(\max_{0 \leq i \leq k} |S_i| < 2\delta)$ может быть сделана произвольно малой, и легко выводим (1.10b) из (2.4). Условие (1.10a) можно получить аналогично с упрощениями.

Справедливость замечания 5 следует непосредственно из [1, теорема 1].

Пусть положительная функция $g(u)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\rho \geq 0$. Положим $f_n = g(\phi_n)\Delta\phi_n/\phi_n$. Очевидно (см. обозначения после замечания 5), что вероятности $\mathbf{P}(-arB_n/\phi_n \leq m_n \leq M_n \leq brB_n/\phi_n)$ и $\mathbf{P}(R_n \leq rB_n/\phi_n)$ совпадают с $\mathcal{P}_G(\phi_n/r)$ при $G = I_{-a}^b$ и $G = J_1$ соответственно. Поэтому, чтобы доказать теоремы 1 и 2, воспользуемся предложением 1. Нам требуется проверить выполнение условий (1.2), (1.6)–(1.10).

Пусть условия теоремы 1, т.е. (1.15), (1.28) и (1.13), выполняются (заметим, что (1.13) в случае положительного ρ имеет место). Без потери общности считая выполненным условие (1.14), с помощью замечания 1 получим (1.2), (1.6) и (1.7). Условия (1.9), (1.10) и (1.8) справедливы в силу замечаний 4 и 5 соответственно (условие (1.21) при $G = I_{-a}^b$ или $G = J_1$, очевидно, выполняется, причем $\mathcal{P}_G(0) = 1$).

Итак (см. (1.11)), нами показано, что при $G = I_{-a}^b$ или $G = J_1$

$$\sum_{n \geq 1} f_n \mathcal{P}_G^n\left(\frac{\phi_n}{r}\right) \sim \sum_{n \geq 1} f_n \mathcal{P}_G\left(\frac{\phi_n}{r}\right), \quad r \nearrow \infty.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 остается оценить сумму справа, используя соотношения (1.17)–(1.19).

Заметим, что прямое применение найденной в [1] логарифмической асимптотики вероятностей вида $\mathcal{P}_G(\phi_n/r)$ для исследования поведения соответствующих рядов в теореме 1 невозможно, поскольку для этой цели требуются оценки, *равномерные* по параметру r .

Соотношения (1.31), (1.32) следуют из предложения 1 и соответствующих представлений вероятностей $G(a, b) = \mathbf{P}(-a < W(t) < b; 0 \leq t \leq 1)$ и $\mathbf{P}(R < r)$, где $R = \sup_{0 \leq t \leq 1} W(t) - \inf_{0 \leq t \leq 1} W(t)$.

Так, чтобы проверить (1.31), нами применяется равенство (см. [17])

$$G(a, b) = \frac{4}{\pi} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2j+1} e^{-((2j+1)\pi)^2/(2c^2)} \sin \frac{(2j+1)\pi a}{c},$$

где a, b положительны и $c = a + b$.

Чтобы получить (1.32), мы используем следующее, принадлежащее Феллеру (см. [15]), представление плотности

$$\frac{d\mathbf{P}(R \leq r)}{dr} = \delta(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{-1} L'\left(\frac{r}{2}\right),$$

где

$$L(z) = \sqrt{2\pi} z^{-1} \sum_{k \geq 1} e^{-(2k-1)^2 \pi^2 / (8z^2)}. \quad (2.5)$$

Мы должны показать, что (см. (1.5), (1.32) и обозначения после замечания 5)

$$I = \int_0^\infty u^{\rho-1} \mathcal{P}_{J_1}(u) du = C_2(\rho).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \mathbf{P}\left(R < \frac{1}{u}\right) du^\rho = \int_0^\infty u^{\rho-2} \delta\left(\frac{1}{u}\right) du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u^{\rho-1} L'\left(\frac{1}{2u}\right) du \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u^{\rho+1} \left(-dL\left(\frac{1}{2u}\right)\right) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} (1+\rho) \int_0^\infty u^\rho L\left(\frac{1}{2u}\right) du. \end{aligned}$$

Чтобы получить нужный результат, остается использовать здесь соотношение (2.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мозульский А. А.* Малые отклонения в пространстве траекторий. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, в. 4, с. 755–765.
2. *Chen R.* A remark on the tail probability of a distribution. — J. Multivariate Anal., 1978, v. 8, № 2, p. 328–333.
3. *Гафуров М. У., Сластников А. Д.* О распределении момента последнего выхода, эксцесса и числа выходов случайного блуждания за криволинейную границу. — Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 3, с. 526–529.
4. *Гафуров М. У., Ротарь В. И.* О выходе случайного блуждания за криволинейную границу. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 1, с. 169–175.
5. *Розовский Л. В.* Некоторые оценки для вероятностей односторонних больших отклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. 30, в. 4, с. 800–804.
6. *Розовский Л. В.* Нормальная аппроксимация при вычислении скорости сходимости в слабом законе больших чисел. — Матем. заметки, 1986, т. 40, № 2, с. 252–268.
7. *Li D. L., Wang X. C., Rao M. B.* Some results on convergence rates for probabilities of moderate deviations for sums of random variables. — Internat. J. Math. Math. Sci., 1992, v. 15, № 3, p. 481–497.
8. *Spătaru A.* Precise asymptotics in Spitzer's law of large numbers. — J. Theoret. Probab., 1999, v. 12, № 3, p. 811–819.
9. *Gut A., Spătaru A.* Precise asymptotics in the Baum–Katz and Davis laws of large numbers. — J. Math. Anal. Appl., 2000, v. 248, № 1, p. 233–246.
10. *Gut A., Spătaru A.* Precise asymptotics in the law of the iterated logarithm. — Ann. Probab., 2000, v. 28, № 4, p. 1870–1883.
11. *Zhang L. X.* On the rates of the other law of the logarithm. arXiv: math/0610521.
12. *Розовский Л. В.* О точной асимптотике в слабом законе больших чисел для сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения устойчивого закона. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 3, с. 589–596.
13. *Розовский Л. В.* О точной асимптотике в слабом законе больших чисел для сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения устойчивого закона. II. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 4, с. 803–813.

14. Pang T., Lin Z. On the rates of the Chung-type law of logarithm. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 4, с. 814–827.
15. Feller W. The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. — Ann. Math. Statist., 1951, v. 22, № 3, p. 427–432.
16. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
17. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
18. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
19. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: 1986, 320 с.

Поступила в редакцию
15.VII.2007

Исправленный вариант
03.VI.2008

© 2009 г.

ТЮРИН И. С.*

РАВНОМЕРНЫЕ ЗАКОНЫ СРЕДНИХ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Изучаются классы последовательностей, обладающих свойствами зависимости, обобщающими абсолютную регулярность и перемешивание по Ибрагимову. Техника каплинга позволяет установить по отношению к ним равномерные законы средних для тех же классов функций, что и в случае, когда рассматриваемая последовательность состоит из независимых случайных элементов.

Ключевые слова и фразы: равномерная сходимость, закон больших чисел, слабая зависимость, каплинг.

1. Введение. Говорят, что для класса функций $\mathcal{F}$ выполнен равномерный закон средних (РЗС) по отношению к последовательности случайных элементов $(X_j)_{j \geq 1}$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n f(X_k) - \mathbf{E} f(X_k) \right| = 0 \quad \text{п.н.} \quad (1)$$

В этом случае соответствующий класс функций называют классом Гливленко–Кантелли.

Предельные теоремы такого типа обобщают законы больших чисел и являются ключевыми для теории статистического обучения, проблем распознавания образов, восстановления зависимостей по эмпирическим данным (см. [1]). Равномерные законы средних по отношению к последовательностям независимых одинаково распределенных случайных элементов хорошо изучены. В [2] найдены необходимые и достаточные условия выполнения (1) для равномерно ограниченного класса функций (т.е. $|f(x)| \leq K$ при всех f, x и некоторой константе K). В работах М. Талаграны [3] и [4] детально изучены классы Гливленко–Кантелли.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: itiurin@gmail.com