Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Тюрин, Равномерные законы средних для последовательностей зависимых случайных элементов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 4, 801–809

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:27:05

14. Pang T., Lin Z. On the rates of the Chung-type law of logarithm. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 4, с. 814–827.
15. Feller W. The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. — Ann. Math. Statist., 1951, v. 22, № 3, p. 427–432.
16. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
17. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
18. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
19. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: 1986, 320 с.

Поступила в редакцию
15.VII.2007

Исправленный вариант
03.VI.2008

© 2009 г.

ТЮРИН И. С.*

РАВНОМЕРНЫЕ ЗАКОНЫ СРЕДНИХ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Изучаются классы последовательностей, обладающих свойствами зависимости, обобщающими абсолютную регулярность и перемешивание по Ибрагимову. Техника каплинга позволяет установить по отношению к ним равномерные законы средних для тех же классов функций, что и в случае, когда рассматриваемая последовательность состоит из независимых случайных элементов.

Ключевые слова и фразы: равномерная сходимость, закон больших чисел, слабая зависимость, каплинг.

1. Введение. Говорят, что для класса функций $\mathcal{F}$ выполнен равномерный закон средних (РЗС) по отношению к последовательности случайных элементов $(X_j)_{j \geq 1}$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n f(X_k) - \mathbf{E} f(X_k) \right| = 0 \quad \text{п.н.} \quad (1)$$

В этом случае соответствующий класс функций называют классом Гливленко–Кантелли.

Предельные теоремы такого типа обобщают законы больших чисел и являются ключевыми для теории статистического обучения, проблем распознавания образов, восстановления зависимостей по эмпирическим данным (см. [1]). Равномерные законы средних по отношению к последовательностям независимых одинаково распределенных случайных элементов хорошо изучены. В [2] найдены необходимые и достаточные условия выполнения (1) для равномерно ограниченного класса функций (т.е. $|f(x)| \leq K$ при всех f, x и некоторой константе K). В работах М. Талагранна [3] и [4] детально изучены классы Гливленко–Кантелли.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: itiurin@gmail.com

Для практических приложений важную роль играют обобщения данных результатов на последовательности зависимых случайных величин. Э. Нобель и А. Дембо [5] распространили РЗС на случай стационарных в узком смысле абсолютно регулярных (т.е. с β -перемешиванием) последовательностей, М. Пелиград [6] получила РЗС для стационарных в узком смысле последовательностей с $\tilde{\varphi}$ -перемешиванием — свойством, несколько более слабым, чем традиционное φ -перемешивание.

В данной работе доказан РЗС для стационарных в узком смысле последовательностей с $\tilde{\beta}$ -перемешиванием — свойством, следующим и из абсолютной регулярности, и из $\tilde{\varphi}$ -перемешивания. Тем самым получено обобщение результатов Нобеля, Дембо [5] и Пелиград [6]. Кроме того, введены новые коэффициенты $\tilde{\varphi}$ -перемешивания. Для последовательностей с $\tilde{\varphi}$ -перемешиванием получен РЗС.

2. Обозначения и формулировки. Если рассматриваемый класс функций $\mathcal{F}$ несчетен, то могут возникнуть проблемы с измеримостью верхней грани, фигурирующей в (1). Поэтому условимся, что рассматриваемые далее классы функций удовлетворяют условиям регулярности (см. [7, с. 196]).

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — две σ -алгебры, состоящие из некоторых событий. Будем использовать коэффициент абсолютной регулярности

$$\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} \sup \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l |\mathbf{P}(A_i B_j) - \mathbf{P}(A_i) \mathbf{P}(B_j)|,$$

где супремум берется по всем конечным разбиениям $\{A_1, \dots, A_k\}$ и $\{B_1, \dots, B_l\}$ вероятностного пространства множествами $A_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq k$, $B_j \in \mathcal{B}$, $1 \leq j \leq l$. Напомним также определение коэффициента равномерно сильного перемешивания

$$\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup \{ \mathbf{P}(B|A) - \mathbf{P}(B) : \mathbf{P}(A) \neq 0, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \}.$$

Пусть $(\mathcal{S}, d)$ — польское пространство, $(X_j)_{j \geq 1}$ — последовательность случайных элементов, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ и принимающих значения в $\mathcal{S}$, причем $X_j \in \mathcal{G} | \mathcal{B}(\mathcal{S})$, здесь $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ — σ -алгебра борелевских множеств в $\mathcal{S}$. Эту последовательность можно рассматривать, как случайный элемент со значениями в S^∞ — пространстве последовательностей элементов пространства $\mathcal{S}$. Снабженное метрикой

$$\rho((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{d(x_k, y_k)}{1 + d(x_k, y_k)},$$

S^∞ является польским пространством. Обозначим $\mathcal{F}_n^m = \sigma\{X_n, \dots, X_m\}$, где $1 \leq n \leq m$, и $\mathcal{F}_n^\infty = \sigma\{X_j, j \geq n\}$. Положим для $k = 1, 2, \dots$

$$\tilde{\beta}_k = \sup_{m \geq 1} \beta(\mathcal{F}_1^m, \mathcal{F}_{m+k}^{m+k}), \quad \tilde{\varphi}_k = \sup_{m \geq 1} \varphi(\mathcal{F}_1^m, \mathcal{F}_{m+k}^{m+k}). \quad (2)$$

Классические коэффициенты β_k и φ_k получаются, если в (2) вместо $\mathcal{F}_{m+k}^{m+k}$ использовать $\mathcal{F}_{m+k}^\infty$. Последовательность $(X_j)_{j \geq 1}$ называется $\tilde{\beta}$ -, β -, $\tilde{\varphi}$ - или φ -перемешивающейся, если соответственно $\tilde{\beta}_k$, β_k , $\tilde{\varphi}_k$ или φ_k стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$. Из теории перемешивания известно, что $\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, поэтому из $\tilde{\varphi}$ -перемешивания следует $\tilde{\beta}$ -перемешивание. Для любого $m \geq 1$, очевидно, $\beta(\mathcal{F}_1^m, \mathcal{F}_{m+k}^{m+k}) \leq \beta(\mathcal{F}_1^m, \mathcal{F}_{m+k}^\infty)$. Значит, из β -перемешивания следует $\tilde{\beta}$ -перемешивание. Аналогично φ -перемешивание влечет $\tilde{\varphi}$ -перемешивание.

Наш первый результат — это уточнение аппроксимационной теоремы из [9] (см. далее теорему 4) для случая стационарных в узком смысле последовательностей.

Теорема 1. Пусть $(X_j)_{j \geq 1}$ — стационарная в узком смысле последовательность случайных элементов со значениями в польском пространстве $\mathcal{S}$. Тогда на некотором вероятностном пространстве существует последовательность

$(\tilde{X}_j)_{j \geq 1}$, совпадающая по распределению с данной, а также последовательность независимых случайных элементов $(\tilde{Y}_j)_{j \geq 1}$ таких, что

- а) $\text{Law}(\tilde{X}_j) = \text{Law}(\tilde{Y}_j)$ при всех $j \in \mathbf{N}$,
- б) $\mathbf{P}(\tilde{X}_j \neq \tilde{Y}_j) \leq \tilde{\beta}_1$ для каждого $j \in \mathbf{N}$,
- в) последовательность $(I_j := I\{\tilde{X}_j \neq \tilde{Y}_j\})_{j \geq 1}$ стационарна в узком смысле.

Эту теорему мы используем для того, чтобы доказать следующее утверждение, обобщающее аналогичные теоремы из [5] и [6].

Теорема 2. Если для класса функций $\mathcal{F}$ выполнен равномерный закон средних по отношению к последовательности независимых одинаково распределенных случайных элементов $(Y_j)_{j \geq 1}$, то он верен также по отношению к любой стационарной в узком смысле $\tilde{\beta}$ -перемешивающейся последовательности элементов $(X_j)_{j \geq 1}$ таких, что $\text{Law}(X_k) = \text{Law}(Y_1)$, $k \geq 1$.

Положим $\varphi_k^{(m)} := \varphi(\mathcal{F}_1^{m-k}, \mathcal{F}_m^m)$ для $m-k \geq 1$. Если $m \leq k$, то $\varphi_k^{(m)} := 0$. Введем новые коэффициенты, задаваемые формулами

$$\hat{\varphi}_k := \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varphi_k^{(i)}, \quad k \geq 1.$$

Последовательность будем называть $\hat{\varphi}$ -перемешивающейся, если $\hat{\varphi}_k$ стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что $\hat{\varphi}_k \leq \tilde{\varphi}_k$ при всех $k \in \mathbf{N}$. Поэтому из $\tilde{\varphi}$ -перемешивания следует $\hat{\varphi}$ -перемешивание. Как показывает следующий пример, обратное неверно.

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $(X_j)_{j \geq 1}$. Заменим величины с номерами 2^k , $k \geq 1$, на копии X_1 . Получим последовательность без $\tilde{\varphi}$ -перемешивания, но с $\hat{\varphi}$ -перемешиванием. Действительно, если $m+k$ не степень двойки, то $\varphi(\mathcal{F}_1^m, \mathcal{F}_{m+k}^{m+k}) = 0$. Иначе $\varphi(\mathcal{F}_1^m, \mathcal{F}_{m+k}^{m+k}) \geq \varphi(\sigma\{X_1\}, \sigma\{X_1\}) = \gamma > 0$. Поэтому для каждого $k \geq 1$

$$\tilde{\varphi}_k = \sup_{m \geq 1} \varphi(\mathcal{F}_1^m, \mathcal{F}_{m+k}^{m+k}) \geq \gamma, \quad \hat{\varphi}_k \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0.$$

Для последовательностей с $\hat{\varphi}$ -перемешиванием имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если для равномерно ограниченного класса функций равномерный закон средних выполнен по отношению к последовательности независимых одинаково распределенных случайных элементов $(Y_j)_{j \geq 1}$, то этот закон верен также по отношению к любой $\hat{\varphi}$ -перемешивающейся последовательности элементов $(X_j)_{j \geq 1}$ таких, что $\text{Law}(X_k) = \text{Law}(Y_1)$, $k \geq 1$.

3. Доказательства результатов. Нам потребуется следующее утверждение.

Теорема 4 [9]. Пусть $(X_j)_{j \geq 1}$ — последовательность случайных элементов со значениями в польском пространстве. Тогда эту последовательность можно переопределить на более широком вероятностном пространстве, на котором существует последовательность независимых случайных элементов $(Y_j)_{j \geq 1}$ таких, что

- а) $\text{Law}(X_j) = \text{Law}(Y_j)$ при всех $j \in \mathbf{N}$,
- б) $X_1 = Y_1$ п.н., $\mathbf{P}(X_j \neq Y_j) = \beta(\mathcal{F}_1^{j-1}, \mathcal{F}_j^j)$ для $j \geq 2$.

Доказательство теоремы 1. Переопределим последовательность $(X_j)_{j \geq 1}$ на новом вероятностном пространстве, на котором существует последовательность независимых случайных элементов $(Y_j)_{j \geq 1}$, удовлетворяющая условиям а) и б) теоремы 4. Обе эти последовательности стационарны в узком смысле. Первая — по условию, вторая — поскольку состоит из независимых случайных элементов. Пусть $L: S^\infty \rightarrow S^\infty$ — оператор сдвига, действующий по правилу $L: (s_1, s_2, s_3, \dots) \mapsto (s_2, s_3, s_4, \dots)$. Обозначим $X := (X_1, X_2, X_3, \dots)$, $Y := (Y_1, Y_2, Y_3, \dots)$. Тогда

$$L^k X = (X_{k+1}, X_{k+2}, \dots), \quad L^k Y = (Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

А стационарность в узком смысле означает, что

$$\text{Law}(L^k X) = \text{Law}(X), \quad \text{Law}(L^k Y) = \text{Law}(Y), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Для каждого натурального n построим (на расширенном вероятностном пространстве) случайную величину τ_n , принимающую равновероятно значения $0, 1, \dots, n-1$, независимую с (X, Y) . Обозначим

$$\tilde{X}^{(n)} := (X_{\tau_n+1}, X_{\tau_n+2}, \dots), \quad \tilde{Y}^{(n)} := (Y_{\tau_n+1}, Y_{\tau_n+2}, \dots), \quad n = 1, 2, \dots$$

Если $(\mathcal{S}_1, d_1)$ и $(\mathcal{S}_2, d_2)$ — два польских пространства, то $(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2, d')$ — тоже польское пространство, где $d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$. По этому поводу см. [8, добавление II, с. 307]. Поэтому пары случайных элементов со значениями в $\mathcal{S}^\infty$ можно считать случайными элементами в польском пространстве $\mathcal{S}^\infty \times \mathcal{S}^\infty$. Для произвольного множества $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^\infty) \times \mathcal{B}(\mathcal{S}^\infty)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{X}^{(n)}, \tilde{Y}^{(n)} \in A) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(\tau_n = k, (\tilde{X}^{(n)}, \tilde{Y}^{(n)}) \in A) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(\tau_n = k, (L^k X, L^k Y) \in A) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}((L^k X, L^k Y) \in A). \end{aligned} \quad (4)$$

В частности, с учетом (3) имеем

$$\text{Law}(\tilde{X}^{(n)}) = \text{Law}(X), \quad \text{Law}(\tilde{Y}^{(n)}) = \text{Law}(Y), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют компакты $K_1(\varepsilon)$ и $K_2(\varepsilon)$ такие, что для любого натурального n

$$\mathbf{P}(\tilde{X}^{(n)} \in K_1(\varepsilon)) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(\tilde{Y}^{(n)} \in K_2(\varepsilon)) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для каждого $n \in \mathbf{N}$ обозначим μ_n меру, порожденную случайным элементом $(\tilde{X}^{(n)}, \tilde{Y}^{(n)})$. Тогда $\mu_n(K_1(\varepsilon) \times K_2(\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon$, $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, семейство мер $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ плотно. По теореме Прохорова существует последовательность $(n_k)_{k \geq 1}$ такая, что μ_{n_k} сходится слабо к некоторой вероятностной мере при $k \rightarrow \infty$. Значит,

$$(\tilde{X}^{(n_k)}, \tilde{Y}^{(n_k)}) \xrightarrow{\text{Law}} ((\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots), (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots)) =: (\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Причем в силу (5) имеем $\text{Law}(\tilde{X}) = \text{Law}(X)$, $\text{Law}(\tilde{Y}) = \text{Law}(Y)$, что, очевидно, влечет независимость в совокупности случайных элементов $\{\tilde{Y}_j\}_{j \geq 1}$, а также утверждение а).

Докажем в). Для этого достаточно проверить, что для произвольных $i_1, \dots, i_m$, $m \geq 1$, $h \geq 1$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^m \{\tilde{X}_{i_j} = \tilde{Y}_{i_j}\}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^m \{\tilde{X}_{i_j+h} = \tilde{Y}_{i_j+h}\}\right). \quad (6)$$

Зададим функции $f_1, f_2: S^\infty \times S^\infty \rightarrow \mathbf{R}$ формулами

$$f_1((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \max_{j=1, \dots, m} d(x_{i_j}, y_{i_j}), \quad f_2(x, y) = f_1(L^h x, L^h y). \quad (7)$$

Они непрерывны, следовательно, при $k \rightarrow \infty$

$$f_i(\tilde{X}^{(n_k)}, \tilde{Y}^{(n_k)}) \xrightarrow{\text{Law}} f_i(\tilde{X}, \tilde{Y}), \quad i = 1, 2.$$

Соотношение (6) эквивалентно тому, что

$$\mathbf{P}(f_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0) = \mathbf{P}(f_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0). \quad (8)$$

Пусть ε — точка непрерывности функций распределения обеих случайных величин, фигурирующих в (8). Тогда

$$\mathbf{P}(f_i(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leq \varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(f_i(\tilde{X}^{(n_k)}, \tilde{Y}^{(n_k)}) \leq \varepsilon), \quad i = 1, 2.$$

Аналогично (4) легко убедиться в том, что

$$\mathbf{P}(f_i(\tilde{X}^{(n)}, \tilde{Y}^{(n)}) \leq \varepsilon) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(f_i(L^k X, L^k Y) \leq \varepsilon), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P}(f_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leq \varepsilon) - \mathbf{P}(f_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leq \varepsilon) \right| \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(f_1(L^k X, L^k Y) \leq \varepsilon) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(f_2(L^k X, L^k Y) \leq \varepsilon) \right|. \end{aligned}$$

В силу (7) последнее выражение равно

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(f_1(L^k X, L^k Y) \leq \varepsilon) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(f_1(L^{k+h} X, L^{k+h} Y) \leq \varepsilon) \right| \\ & = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left(\sum_{0 \leq k < h} + \sum_{n \leq k < n+h} \right) \mathbf{P}(f_1(L^k X, L^k Y) \leq \varepsilon) \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2h}{n} = 0. \end{aligned}$$

Значит, $\mathbf{P}(f_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leq \varepsilon) = \mathbf{P}(f_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leq \varepsilon)$. Выберем теперь последовательность $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ точек непрерывности функций распределения обеих случайных величин, фигурирующих в (8), такую, что $\varepsilon_n \downarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(f_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(f_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leq \varepsilon_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(f_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leq \varepsilon_n) = \mathbf{P}(f_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0). \end{aligned}$$

Наконец, докажем утверждение б). Для случайных последовательностей $Z = (Z_1, Z_2, \dots)$ и $W = (W_1, W_2, \dots)$

$$\{Z_1 \neq W_1\} = \{(Z, W) \in B_0\}, \quad (9)$$

где

$$B_0 = \{((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) \in S^\infty \times S^\infty : x_1 \neq y_1\}.$$

Множество B_0 открытое, поэтому, согласно теореме Александрова,

$$\mathbf{P}((\tilde{X}, \tilde{Y}) \in B_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}((\tilde{X}^{(n_k)}, \tilde{Y}^{(n_k)}) \in B_0). \quad (10)$$

Из (4) следует, что

$$\mathbf{P}((\tilde{X}^{(n)}, \tilde{Y}^{(n)}) \in B_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}((L^k X, L^k Y) \in B_0). \quad (11)$$

Таким образом, из (9), (10) и (11) вытекает, что

$$\mathbf{P}(\tilde{X}_1 \neq \tilde{Y}_1) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathbf{P}(X_j \neq Y_j). \quad (12)$$

Но $\mathbf{P}(X_j \neq Y_j) = \beta(\mathcal{F}_1^{j-1}, \mathcal{F}_j^j)$, $j \geq 2$. Для стационарной в узком смысле последовательности, как нетрудно убедиться, $\beta(\mathcal{F}_1^{j-1}, \mathcal{F}_j^j) \uparrow \tilde{\beta}_1$ при $j \rightarrow \infty$. Последовательность, сходящаяся к некоторому числу, суммируется методом средних арифметических к этому же числу. Поэтому в правой части (12) стоит $\tilde{\beta}_1$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть вначале класс функций $\mathcal{F}$ равномерно ограничен константой K . Без ограничения общности считаем, что $\mathbf{E} f(X_1) = 0$ для любой $f \in \mathcal{F}$. Иначе можно рассматривать функции $\tilde{f} = f - \mathbf{E} f(X_1)$. Из неравенства треугольника легко вывести, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n f(X_k) \right| \leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(X_{j+kp}) \right|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n f(X_k) \right| &\leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \mathbf{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(X_{j+kp}) \right| \\ &= \mathbf{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(X_{1+kp}) \right|. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено в силу стационарности в узком смысле последовательности $(X_j)_{j \geq 1}$. Для последовательности $X_1, X_{1+p}, X_{1+2p}, \dots$ построим по теореме 1 последовательность $\tilde{X}_1, \tilde{X}_{1+p}, \tilde{X}_{1+2p}, \dots$, совпадающую с ней по распределению, а также аппроксимирующую последовательность из независимых случайных элементов $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_{1+p}, \tilde{Y}_{1+2p}, \dots$. Тогда величины $I_k := I\{\tilde{X}_{1+kp} \neq \tilde{Y}_{1+kp}\}$, $k \geq 0$, образуют стационарную в узком смысле последовательность и $\mathbf{E} I_0 \leq \tilde{\beta}_p$. При этом $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_{1+p}, \tilde{Y}_{1+2p}, \dots$ состоит из независимых одинаково распределенных элементов, для нее выполнен РЗС. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(X_{1+kp}) \right| &= \mathbf{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{X}_{1+kp}) \right| \\ &= \mathbf{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{X}_{1+kp}) - f(\tilde{Y}_{1+kp}) \right|. \end{aligned}$$

По теореме Биркгофа–Хинчина (см. [10, гл. V, § 3]) $(1/n) \sum_{k=0}^{n-1} I_k \rightarrow Z$ п.н., где Z — некоторая инвариантная случайная величина. Поскольку $I_k \leq 1$ для всех $k \geq 0$, то их средние арифметические мажорируются единицей и применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Следовательно, $\mathbf{E} Z \leq \tilde{\beta}_p$. Теперь вспомним, что семейство функций $\mathcal{F}$ ограничено константой K , поэтому $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(\tilde{X}_{1+kp}) - f(\tilde{Y}_{1+kp})| \leq 2KI_k$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{X}_{1+kp}) - f(\tilde{Y}_{1+kp}) \right| &\leq \mathbf{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} 2K \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} I_k \\ &= 2K \mathbf{E} Z \leq 2K \tilde{\beta}_p. \end{aligned}$$

Устремив p к бесконечности, получим требуемое утверждение.

Случай, когда класс $\mathcal{F}$ неограничен, сводится к рассмотренному стандартным приемом урезания, как это сделано, например, в [6]. Теорема 2 доказана.

Для дальнейшего нам понадобится неравенство Мюрхеда, доказательство которого можно найти в [11, пп. 2.18, 2.19, с. 61]. Перед тем как его сформулировать, необходимо ввести несколько определений.

Мажорирование. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — наборы вещественных чисел. Говорят, что α *мажорирует* β (пишут $\alpha \succ \beta$), если выполнены следующие условия:

- а) $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, n$;
- б) $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$;
- в) пусть элементы наборов α и β расположены в порядке убывания, тогда $\alpha_1 + \dots + \alpha_i \geq \beta_1 + \dots + \beta_i, 1 \leq i \leq n$.

Симметрические средние. Пусть дан набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и положительные числа $x_1, \dots, x_n$. Определим симметрическое среднее

$$[\alpha] := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} x_{\sigma(2)}^{\alpha_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n},$$

где S_n — совокупность перестановок первых n чисел.

Теорема Мюрхеда. Если $\alpha \succ \beta$, то $[\alpha] \geq [\beta]$.

Лемма 1. Пусть даны положительные числа $x_1, \dots, x_n$, тогда

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \leq C_n^k \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^k. \quad (13)$$

Доказательство. Доказательство следует из теоремы Мюрхеда. Разделим обе части неравенства (13) на C_n^k . В левой части получим симметрическое среднее $[(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)]$ (здесь k единиц, общее число позиций — n). Справа же после раскрытия скобок будет стоять некоторая выпуклая комбинация симметрических средних $[\alpha]$: $\alpha_i \in \mathbf{Z}_+$, $1 \leq i \leq n$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$. Каждое из этих средних не меньше, чем среднее, стоящее в левой части, поскольку $[(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)]$ мажорируется всеми описанными наборами α . А, значит, и их выпуклая комбинация не меньше, чем величина, стоящая в левой части (13). Лемма 1 доказана.

Докажем модифицированную версию теоремы 1.1 из [6].

Лемма 2. Пусть $(X_j)_{j \geq 1}$ — последовательность $\mathcal{S}$ -значных случайных элементов. Тогда эту последовательность можно переопределить на более широком вероятностном пространстве, на котором существует последовательность независимых случайных элементов $(Y_j)_{j \geq 1}$ таких, что:

а) $\mathbf{P}(X_{n+1} \neq Y_{n+1} | \mathcal{F}_1^n) \leq \sup_{B \in \mathcal{F}_{n+1}^{n+1}} |\mathbf{P}(B | \mathcal{F}_1^n) - \mathbf{P}(B)|$ п.н., $n \in \mathbf{N}$;

б) $\mathbf{P}(\bigcap_{j=1}^m \{X_{i_j} \neq Y_{i_j}\}) \leq \prod_{j=1}^m \varphi_1^{(i_j)}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_m$.

Доказательство. Пункт а) доказан в [6]. Выведем из него пункт б):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^m \{X_{i_j} \neq Y_{i_j}\}\right) &= \int_{\bigcap_{j=1}^{m-1} \{X_{i_j} \neq Y_{i_j}\}} \mathbf{P}(X_{i_m} \neq Y_{i_m} | \mathcal{F}_1^{i_m-1}) d\mathbf{P} \\ &\leq \int_{\bigcap_{j=1}^{m-1} \{X_{i_j} \neq Y_{i_j}\}} \sup_{B \in \mathcal{F}_1^{i_m-1}} |\mathbf{P}(B | \mathcal{F}_1^{i_m-1}) - \mathbf{P}(B)| d\mathbf{P} \\ &= \varphi_1^{(i_m)} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m-1} \{X_{i_j} \neq Y_{i_j}\}\right). \end{aligned}$$

Теперь требуемый результат получается рекуррентным образом. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. В условиях леммы 2 положим $I_i = I\{X_i \neq Y_i\}$, $i \in \mathbf{N}$. Тогда

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n I_i \geq k\right) \leq C_n^k \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_1^{(i)}\right)^k.$$

Доказательство. Действительно, если $\sum_{i=1}^n I_i \geq k$, то произошло одно из событий $\{X_{i_j} \neq Y_{i_j}, j = 1, \dots, k\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n I_i \geq k\right) \leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \varphi_1^{(i_1)} \cdots \varphi_1^{(i_k)} \leq C_n^k \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_1^{(i)}\right)^k.$$

Последнее неравенство выполнено согласно лемме 1. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть K — константа, равномерно ограничивающая семейство функций $\mathcal{F}$. Возьмем произвольное $\delta > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\delta < 1$.

Выберем $p \in \mathbf{N}$ такое, что $\widehat{\varphi}_p < \delta/(2 \cdot 3^{1/\delta})$. Найдем такое N , что $(1/n) \sum_{i=1}^n \varphi_p^{(i)} < \delta/3^{1/\delta}$ при всех $n > N$. Для каждой из последовательностей $(X_{mp+j})_{m=0}^\infty$, $j = 1, \dots, p$, построим по лемме 2 такую последовательность независимых случайных элементов $(Y_m^{(j)})_{m \geq 0}$, что при всех $m \geq 0$ выполнено неравенство $\mathbf{P}(X_{mp+j} \neq Y_m^{(j)}) \leq \varphi_p^{(mp+j)}$.

Пусть n строго больше N и делится на p . Для каждого $1 \leq j \leq p$ обозначим A_j среднее арифметическое коэффициентов $\varphi_p^{(mp+j)}$, $0 \leq m < n/p$. Заметим, что $(A_1 + \dots + A_p)/p = (1/n) \sum_{i=1}^n \varphi_p^{(i)} < \delta/3^{1/\delta}$. Поэтому число тех индексов j , для которых $A_j \geq 1/3^{1/\delta}$, не превосходит $p(\delta/3^{1/\delta})/(1/3^{1/\delta}) = p\delta$. Для остальных A_j воспользуемся леммой 3. Обозначим $I_{mp+j} := I\{X_{mp+j} \neq Y_m^{(j)}\}$, $q = n/p$, $\lceil \cdot \rceil$ — округление вверх. Тогда

$$\mathbf{P}\left(\sum_{m=0}^{q-1} I_{mp+j} \geq q\delta\right) \leq C_q^{\lceil q\delta \rceil} A_j^{\lceil q\delta \rceil} \leq \left(\sum_{k=0}^q C_q^k\right) \left(\frac{1}{3^{1/\delta}}\right)^{\delta q} = 2^q \cdot \frac{1}{3^q}.$$

Если для всех тех j , для которых $A_j < 1/3^{1/\delta}$, выполнено $\sum_{m=0}^{q-1} I_{mp+j} \leq q\delta$, то

$$\sum_{i=1}^n I_i \leq \sum_{j: A_j \geq 1/3^{1/\delta}} q + \sum_{j: A_j < 1/3^{1/\delta}} q\delta \leq n\delta + n\delta = 2n\delta.$$

Отсюда

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n I_i > 2n\delta\right) \leq \sum_{j: A_j < 1/3^{1/\delta}} \mathbf{P}\left(\sum_{m=0}^{q-1} I_{mp+j} > q\delta\right) \leq p\left(\frac{2}{3}\right)^q.$$

Значит, $\sum_{n=kp, k \in \mathbf{N}} \mathbf{P}(\sum_{i=1}^n I_i > 2n\delta) < \infty$. По лемме Бореля–Кантелли имеем $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{kp} I_i > 2kp\delta \text{ б.ч.}) = 0$, где «б.ч.» указывает на множество тех элементарных исходов, которые принадлежат бесконечно многим из $\{\sum_{i=1}^{kp} I_i > 2kp\delta\}_{k \in \mathbf{N}}$.

Пусть $kp \leq n < (k+1)p$, тогда $\sum_{i=1}^n I_i - \sum_{j=1}^{kp} I_j = \sum_{kp < i \leq n} I_i < p$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n I_i > 2n\delta + p \text{ б.ч.}\right) = 0.$$

Константа K равномерно ограничивает семейство функций $\mathcal{F}$, поэтому

$$\mathbf{P}\left(\sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n f(X_k) - \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{q-1} f(Y_i^{(j)}) \right| > K\left(2\delta + \frac{p}{n}\right) \text{ б.ч.}\right) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\delta > 0$ и так как для каждой из последовательностей $(Y_m^{(j)})_{m \geq 0}$, $j = 1, \dots, p$, выполнен РЗС, получаем, что этот закон выполнен и для последовательности $(X_n)_{n \geq 1}$. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vapnik V. N. Statistical Learning Theory. New York: Wiley, 1998, 736 p.
2. Вепник В. Н., Червоненкис А. Я. Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости средних к математическим ожиданиям. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, в. 3, с. 543–563.
3. Talagrand M. The Glivenko–Cantelli problem. — Ann. Probab., 1986, v. 15, № 3, p. 837–870.

4. Talagrand M. The Glivenko–Cantelli problem, ten years later. — J. Theoret. Probab., 1996, v. 9, № 2, p. 371–384.
5. Nobel A., Dembo A. A note on uniform laws of averages for dependent processes. — Statist. Probab. Lett., 1993, v. 17, № 3, p. 169–172.
6. Peligrad M. A note on the uniform laws for dependent processes via coupling. — J. Theoret. Probab., 2001, v. 14, № 4, p. 979–988.
7. Pollard D. Convergence of Stochastic Processes. New York: Springer, 1984, 215 p.
8. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.
9. Bryc W. On the approximation theorem of I. Berkes and W. Philipp. — Demonstratio Math., 1982, v. 15, № 3, p. 807–816.
10. Ширяев А. Н. Вероятность, т. 2. М.: МЦНМО, 2004, 408 с.
11. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948, 456 с.

Поступила в редакцию
30.IX.2008

© 2009 г.

HAM W.* , ZHOU K.**

A SHORT NOTE ON THE VOLUME OF HYPERSPHERE¹⁾

Предлагается новый метод вычисления объема гипертсферы, использующий теорию вероятностей. Явное выражение для многократной свертки плотностей вероятности, которое следовало бы использовать, очень сложно. Но в нашем методе требуется не все явное выражение, а лишь часть информации, что позволяет вывести общую формулу для объема гипертсферы.

Ключевые слова и фразы: гипертсфера, вероятность, свертка, парадокс.

1. Introduction. In this note, a new approach to derive the volume of hypersphere is proposed. Even though the volume formula has been already derived and introduced in many books (see [1]–[3]), the method proposed in this note may be useful for solving many unsolved problems in hyperdimensional space. The proposed method is motivated from the probability theory, especially the mathematical fact that the probability density function of summation of two independent random variables can be expressed as a convolution of the two probability density functions. We would expect that the explicit expression of the multiple times convolution of the same probability density functions may converge to a Gaussian distribution regardless of its initial shape of probability density function. Also it is very complicated to describe the whole process of this multiple times convolution and to derive the explicit expression of the finite multiple times convolution. Fortunately, only a small part of information, such as values of the probability functions in the domain between 0 and 1, is needed in the derivation of volume of hypersphere and this fact makes it possible to derive the general formula for the hypersphere. We also briefly review two conventional methods to derive the volume of hypersphere. Instinctive geometric properties of hypersphere is assumed and the gamma integral is used in the conventional approach

* Electronics and Information Division, Chonbuk National University, Chonju-si, Chonbuk, South Korea; e-mail: wcham@moak.chonbuk.ac.kr; this work was completed while the author was a visiting professor at Louisiana State University.

** Department of Electrical and Computer Engineering, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803, USA; e-mail: kemin@ece.lsu.edu

¹⁾ This work was completed with the partial support of post BK21 project of Chonbuk National University.