Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. С. Насыров, Симметричные интегралы и стохастический анализ, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 496–517

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp36>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:57:58

© 2006 г.

НАСЫРОВ Ф. С.*

СИММЕТРИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
И СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ¹⁾

Определяются симметричные интегралы типа Стилтеса по произвольной непрерывной функции, которые являются детерминированными версиями стохастических интегралов Стратоновича. Показано, что решение потраекторных аналогов стохастических дифференциальных уравнений с симметричным интегралом и стохастических дифференциальных уравнений Ито удастся свести к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Устанавливается связь между несобственными симметричными интегралами, расширенными симметричными интегралами и интегралами Хеллингера.

Ключевые слова и фразы: симметричный интеграл, стохастический интеграл Стратоновича, стохастические дифференциальные уравнения, несобственный симметричный интеграл, расширенный симметричный интеграл, интеграл Хеллингера.

1. Введение. Тематика статьи восходит к работе Л. Янга [12], где впервые были построены интегралы типа Стилтеса по функциям неограниченной вариации. В работах [2], [3], [7], [11], [12] исследованы различные варианты интегралов такого вида, в частности, интегралы Хеллингера. В то же время в стохастическом анализе хорошо известны стохастические интегралы Стратоновича, которые не имели своего «потраекторного» аналога. В работе автора [6] для определенного класса интеграндов построены симметричные интегралы по произвольной непрерывной функции, которые являются детерминированными вариантами стохастических интегралов Стратоновича; при этом никаких предположений о предсказуемости интеграндов при потраекторном подходе не требуется.

Настоящую статью можно считать продолжением работы [6]. В п. 2 приводятся условия, при которых симметричный интеграл по любой непрерывной функции существует, и доказывается корректность опреде-

* Уфимский государственный авиационный технический университет, кафедра математики, ул. К. Маркса, 12, 450000 Уфа, Россия; e-mail: farsagit@yandex.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 04-01-00286а, 05-01-97909).

ления симметричного интеграла. В п. 3 рассматриваются детерминированные аналоги стохастических дифференциальных уравнений с симметричными интегралами. С точки зрения теории случайных процессов коэффициенты рассматриваемых уравнений могут быть как детерминированными, так и случайными и не обязаны быть предсказуемыми функциями.

Показано, что при определенных условиях, накладываемых на коэффициенты, решение такого вида уравнений может быть сведено к решению системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Кроме того, с помощью подхода А. В. Скорохода удалось построить детерминированные аналоги стохастических дифференциальных уравнений с отражающим экраном. Решение стохастических дифференциальных уравнений со стохастическим интегралом Ито в случае гладких коэффициентов также сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В п. 4 устанавливается связь между несобственными симметричными интегралами и другими известными конструкциями интегралов по функциям неограниченной вариации. Доказывается, что расширенный симметричный интеграл (см. [6]), являющийся интегралом по определенного вида заряду, для некоторого класса интеграндов является пределом симметричных интегралов, т.е. является несобственным симметричным интегралом. Выяснилось, что другой класс несобственных симметричных интегралов связан с интегралами Хеллингера.

Таким образом, основным результатом данной статьи можно считать тот факт, что методами теории функций оказалось возможным построить детерминированный аналог стохастического исчисления Стратоновича; естественно, это «параллельное» исчисление не может охватить всю красоту стохастического исчисления, однако оно показывает, что часть результатов, ранее справедливых в рамках теории мартингалов, имеет более общую природу.

Приведем необходимые обозначения и сведения. Множества $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ и $[0, t]$, $t > 0$, предполагаются наделенными σ -алгебрами борелевских множеств, которые обозначаются соответственно $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_t$, $t > 0$; на этих подмножествах считается заданной мера Лебега $\lambda(\cdot)$. Для непрерывной функции $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, положим

$$M(t) = \max \{X(s) : s \in [0, t]\}, \quad m(t) = \min \{X(s) : s \in [0, t]\},$$

$$M^{-1}(u) = \inf \{s : M(s) > u\}, \quad m^{-1}(u) = \inf \{s : m(s) < u\}.$$

Обозначим $\text{sign}(x)$ знак вещественного числа x , а $\mathbf{1}(A)$ будет обозначать индикатор множества A , т.е. функцию, равную 1 на A и 0 вне A ; далее всюду $a \wedge b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$, $\kappa(v, a, b) = \text{sign}(b - a) \mathbf{1}(a \wedge b < v < a \vee b)$.

Пусть $X(s)$, $s \in [0, 1]$, — борелевская вещественнозначная функция, $\tau(\cdot)$ — мера на σ -алгебре $\mathcal{B}_1$ борелевских множеств отрезка $[0, 1]$. Введем меры

$$\nu_t(\Gamma) = \int_0^t \mathbf{1}(X(s) \in \Gamma) \tau(ds), \quad \Gamma \in \mathcal{B}, \quad t \in [0, 1],$$

тогда $\nu_t(\Gamma)$ есть «количество времени», проводимое функцией $X(s)$, $s \in [0, t]$, в множестве Γ . Производная Радона–Никодима

$$\alpha_\tau(t, u) \equiv \alpha_t(u) = \frac{d\nu_t}{d\lambda}(u), \quad u \in \mathbf{R},$$

если она существует, называется *локальным временем* функции $X(s)$. Оказывается (см. [10]), можно всегда считать, что локальное время измеримо как функция двух переменных и является при каждом u неубывающей непрерывной справа функцией по t ; меру на $\mathcal{B}_1$, которую она порождает, мы будем обозначать $\alpha_\tau(ds, u)$.

Из определения локального времени следует (см. [10]), что для любой ограниченной (или знакопостоянной) борелевской функции $f(s, u)$ справедливо равенство

$$\int_0^t f(s, X(s)) \tau(ds) = \int_{\mathbf{R}} \int_0^t f(s, u) \alpha(ds, u) du. \quad (1.1)$$

Говорят, что случайный процесс обладает локальным временем, если почти все его траектории имеют локальное время. В случае, когда $\tau(ds) = ds$, положим $\alpha_\tau(t, u) \equiv \alpha(t, u)$. Пусть $X(s)$ — абсолютно непрерывная функция, $\tau(ds) = |X'(s)| ds$, тогда локальное время $N(t, u) \equiv \alpha_\tau(t, u)$ для функции $X(s)$ называется (см. [4]) *индикатрисой Банаха*; величина $N(t, u)$ равна числу пересечений функцией $X(s)$, $s \in [0, t]$, уровня u .

Ряд общих сведений о локальных временах детерминированных функций и случайных процессов приведен в работах [1], [5], [8]–[10].

2. Симметричный интеграл и его вычисление.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что пара функций $X(s)$, $s \in [0, 1]$, и $f(s, u)$, $s \in [0, 1]$, $u \in \mathbf{R}$, удовлетворяет *условию (S) на $[0, t]$* , если:

- (а) функция $X(s)$, $s \in [0, t]$, непрерывна;
- (б) при почти всех u функция $f(s, u)$, $s \in [0, t]$, имеет ограниченное изменение и непрерывна справа по $s \in [0, t]$;
- (с) при почти всех u справедливо равенство

$$\int_0^t \mathbf{1}(X(s) = u) |f|(ds, u) = 0,$$

где при каждом u функция $|f|(s, u)$ есть полное изменение функции $f(\tau, u)$ по переменной τ на отрезке $[0, s]$;

(d) полное изменение $|f|(t, u)$ функции $f(s, u)$ по переменной s на отрезке $[0, t]$ локально суммируемо по u .

З а м е ч а н и я. 1. Условие (с) будет выполнено, если непрерывная функция $X(s)$ обладает локальным временем $\alpha(t, u)$, а функция $f(s, u)$ при почти всех u абсолютно непрерывна по переменной s .

2. Если $X(s) = X(s, \omega)$ — случайный процесс, обладающий локальным временем $\alpha(t, u)$, а $f(s, u)$ — детерминированная функция, удовлетворяющая условию (b), то условие (с) будет выполнено для почти всех траекторий процесса. В частности, для случайного процесса броуновского движения $X(s, \omega)$ и детерминированной функции $f(s, u)$ с условием (b) предположение (с) всегда выполняется.

Пусть функции $X(s)$ и $f(s, u)$ удовлетворяют условию (S) на отрезке $[0, t]$. Рассмотрим разбиения T_n , $n \in \mathbf{N}$, отрезка $[0, t]$: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \dots \leq t_k^{(n)} \leq \dots \leq t_{m_n}^{(n)} = t$, $n \in \mathbf{N}$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, и $\lambda_n = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Через $X^{(n)}(s)$, $s \in [0, t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n , а через $N^{(n)}(t, u)$ соответствующую ей индикатрису Банаха. Введем также следующие обозначения: $\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$, $[\Delta t_k^{(n)}] = [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}]$, $\Delta X_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})$.

О п р е д е л е н и е. Симметричным интегралом называется (см. [5])

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s, X^{(n)}(s)) ds \Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений T_n , $n \in \mathbf{N}$.

З а м е ч а н и е. Симметричный интеграл является (см. [6]) детерминированным аналогом стохастического интеграла Стратоновича.

Лемма 1. Пусть $X(s)$, $s \in [0, 1]$, — произвольная непрерывная функция, $X^{(n)}(s)$, $s \in [0, 1]$, ломаная, построенная по разбиению T_n . Тогда для всех v , которые удовлетворяют условию

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}(X^{(n)}(s) = v) ds = 0,$$

интеграл $\int_{t_1}^{t_2} \text{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v)$ равен $\text{sign}(X^{(n)}(t_2) - X^{(n)}(t_1))$ в случае, если $v \in (X^{(n)}(t_1) \wedge X^{(n)}(t_2), X^{(n)}(t_1) \vee X^{(n)}(t_2))$, и равен нулю в случае, когда $v \in \mathbf{R} \setminus [X^{(n)}(t_1) \wedge X^{(n)}(t_2), X^{(n)}(t_1) \vee X^{(n)}(t_2)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \text{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v)$$

— это сумма знаков производной ломаной, взятых в точках пересечения ломаной $X^{(n)}(s)$ уровня v . Но с ростом переменной s знаки производной ломаной чередуются, а число пересечений уровня v ломаной $X^{(n)}(s)$ нечетно, если $v \in (X^{(n)}(t_1) \wedge X^{(n)}(t_2), X^{(n)}(t_1) \vee X^{(n)}(t_2))$, и четно в случае, когда $v \in \mathbf{R} \setminus [X^{(n)}(t_1) \wedge X^{(n)}(t_2), X^{(n)}(t_1) \vee X^{(n)}(t_2)]$, откуда вытекает утверждение леммы 1.

Теорема 1. Пусть функции $X(s)$ и $f(s, u)$ удовлетворяют условию (S) на $[0, t]$, тогда справедливы следующие утверждения.

1. Симметричный интеграл

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s)$$

существует и вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = & - \int_{X(t)}^{X(0)} f(m^{-1}(v), v) dv \mathbf{1}(X(t) < X(0)) \\ & - \int_{X(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) > v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X(t) < X(0)) \\ & + \int_{m(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) < v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X(t) \geq X(0)) \\ & + \int_{m(t)}^{X(t)} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) < v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X(t) < X(0)) \\ & + \int_{X(0)}^{X(t)} f(M^{-1}(v), v) dv \mathbf{1}(X(t) > X(0)) \\ & + \int_{X(0)}^{X(t)} \int_{M^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) < v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X(t) > X(0)) \\ & - \int_{X(0)}^{M(t)} \int_{M^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) > v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X(t) \leq X(0)) \\ & - \int_{X(t)}^{M(t)} \int_{M^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) > v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X(t) > X(0)). \quad (2.1) \end{aligned}$$

2. Если пары функций $X(s)$, $f_1(s, u)$ и $X(s)$, $f_2(s, u)$ удовлетворяют условию (S) на $[0, t]$ и

$$f_1(s, X(s)) = f_2(s, X(s)), \quad s \in [0, t],$$

то

$$\int_0^t f_1(s, X(s)) * dX(s) = \int_0^t f_2(s, X(s)) * dX(s).$$

Доказательство. 1. Обозначим через $S_t^{(n)}(f, X)$ интегральную сумму, соответствующую симметричному интегралу $\int_0^t f(s, X(s)) *$

$dX(s)$. Тогда, в силу существования локального времени (см. [10]) у ломаной $X^{(n)}(s)$, величина $S_t^{(n)}(f, X)$ равна

$$\int_0^t f(s, X^{(n)}(s))(X^{(n)})'(s) ds = \left(\int_{m(t)}^{X(0)} + \int_{X(0)}^{M(t)} \right) \int_0^t f(s, v) \times \text{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) dv = J_1^{(n)} + J_2^{(n)}, \quad (2.2)$$

где $N^{(n)}(s, v)$ — индикатриса Банаха функции $X^{(n)}(\tau)$ на отрезке $[0, s]$.

Ниже анализируется слагаемое $J_1^{(n)}$; выражение $J_2^{(n)}$ исследуется аналогично. Мы выделим случай, когда $X(t) \neq X(0)$, на случай $X(t) = X(0)$ рассуждения переносятся тривиальным образом.

Заметим, что так как

$$f(s, v) = f(m^{-1}(v), v) + \int_{m^{-1}(v)}^s f(d\tau, v), \quad \text{если } m^{-1}(v) \leq s \leq t,$$

и

$$f(s, v) = f(m^{-1}(v), v) - \int_s^{m^{-1}(v)} f(d\tau, v), \quad \text{если } 0 \leq s \leq m^{-1}(v),$$

то

$$\begin{aligned} J_1^{(n)} &= \int_{m(t)}^{X(0)} f(m^{-1}(v), v) \int_0^t \text{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) dv \\ &+ \int_{m(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^t \int_{m^{-1}(v)}^s f(d\tau, v) \text{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) dv \\ &- \int_{m(t)}^{X(0)} \int_0^{m^{-1}(v)} \int_s^{m^{-1}(v)} f(d\tau, v) \text{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) dv. \end{aligned}$$

Заметим, что множество $\{v: \int_0^t \mathbf{1}(X^{(n)}(s) = v) ds > 0\}$ конечно или пусто, поэтому в дальнейшем мы будем им пренебрегать. Первое слагаемое в правой части в силу леммы 1 равно

$$\begin{aligned} &\int_{m(t)}^{X(0)} f(m^{-1}(v), v) \kappa(v, X(0), X^{(n)}(t)) dv \\ &= - \int_{X^{(n)}(t)}^{X(0)} f(m^{-1}(v), v) dv \mathbf{1}(X^{(n)}(t) < X(0)) = J_{11}^{(n)}. \end{aligned}$$

В оставшихся двух слагаемых поменяем местами внутренний и средний интегралы и с помощью леммы 1 вычислим внутренние интегралы:

$$\begin{aligned} &\int_{m(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^t \int_{\tau}^t \text{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) f(d\tau, v) dv \\ &- \int_{m(t)}^{X(0)} \int_0^{m^{-1}(v)} \int_0^{\tau} \text{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) f(d\tau, v) dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{m(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^t \kappa(v, X^{(n)}(\tau), X^{(n)}(t)) f(d\tau, v) dv \\
&\quad - \int_{m(t)}^{X(0)} \int_0^{m^{-1}(v)} \kappa(v, X(0), X^{(n)}(\tau)) f(d\tau, v) dv.
\end{aligned}$$

Обозначим последние два слагаемых через $J_{12}^{(n)}$ и $J_{13}^{(n)}$ соответственно. Обратимся к выражению $J_{12}^{(n)}$. Заметим, что внутренний интеграл в этом выражении может быть отличен от нуля только в том случае, если $X^{(n)}(t) \wedge X^{(n)}(\tau) < X(0)$. При этом возможны следующие случаи.

(1) Пусть $X^{(n)}(t) < X^{(n)}(\tau)$, тогда

$$\begin{aligned}
J_{12}^{(n)} &= - \int_{m(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X^{(n)}(t) < v < X^{(n)}(\tau)) f(d\tau, v) dv \\
&= - \int_{X^{(n)}(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) > v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X^{(n)}(t) < X(0)).
\end{aligned}$$

(2) Пусть $X^{(n)}(t) > X^{(n)}(\tau)$, тогда

$$\begin{aligned}
J_{12}^{(n)} &= \int_{m(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v < X^{(n)}(t)) f(d\tau, v) dv \\
&= \int_{m(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X^{(n)}(t) \geq X(0)) \\
&\quad + \int_{m(t)}^{X^{(n)}(t)} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X^{(n)}(t) < X(0)).
\end{aligned}$$

Осталось рассмотреть выражение $J_{13}^{(n)}$; внутренний интеграл в этом выражении отличен от нуля, только если $X^{(n)}(\tau) < X(0)$. Следовательно,

$$J_{13}^{(n)} = \int_{m(t)}^{X(0)} \int_0^{m^{-1}(v)} \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v) f(d\tau, v) dv.$$

Но если $\tau < m^{-1}(v)$, то $X(\tau) \geq v$, и, значит,

$$J_{13}^{(n)} = \int_{m(t)}^{X(0)} \int_0^{m^{-1}(v)} \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v < X(\tau)) f(d\tau, v) dv.$$

Остается перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ в полученных выше выражениях; для этого воспользуемся тем фактом, что в силу условия (S) при почти всех v для любых t_1, t_2 , $t_1 < t_2$, справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v) f(d\tau, v) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v, X(\tau) \neq v) f(d\tau, v) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}(X(\tau) < v) f(d\tau, v).
\end{aligned}$$

В силу полученных выше формул после предельного перехода имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} J_1^{(n)} &= - \int_{X(t)}^{X(0)} f(m^{-1}(v), v) dv \mathbf{1}(X(t) < X(0)) \\ &\quad - \int_{X(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) > v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X(t) < X(0)) \\ &\quad + \int_{m(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) < v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X(t) \geq X(0)) \\ &\quad + \int_{m(t)}^{X(t)} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) < v) f(d\tau, v) dv \mathbf{1}(X(t) < X(0)). \end{aligned}$$

Для выражения $J_2^{(n)}$ из формулы (2.2) справедливы с очевидными изменениями аналогичные рассуждения.

2. Заметим, что ввиду непрерывности функции $X(s)$ при каждом v множество $\{\tau: X(\tau) < v\}$ можно представить в виде не более чем счетного объединения непересекающихся интервалов $(s_v^{(k)}, t_v^{(k)})$, причем точки $s_v^{(k)}$ и $t_v^{(k)}$ лежат в множестве уровня $M_v = \{s: X(s) = v\}$. Аналогичное замечание справедливо и для множества $\{\tau: X(\tau) > v\}$.

С другой стороны, из равенства $f_1(s, X(s)) = f_2(s, X(s))$, $s \in [0, 1]$, вытекает, что при каждом v справедливо равенство $f_1(s, v) = f_2(s, v)$, $s \in M_v$, поэтому

$$f_1(m^{-1}(v), v) = f_2(m^{-1}(v), v) \quad \text{для всех } v \in [m(1), X(0)]$$

и

$$f_1(M^{-1}(v), v) = f_2(M^{-1}(v), v) \quad \text{для всех } v \in [X(0), M(1)].$$

Далее, ввиду приведенных выше соображений при условии, что $X(t) > v > m(t)$, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) < v) f_1(d\tau, v) &= \sum_k [f_1(t_v^{(k)}, v) - f_1(s_v^{(k)}, v)] \\ &= \sum_k [f_2(t_v^{(k)}, v) - f_2(s_v^{(k)}, v)] = \int_{m^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) < v) f_2(d\tau, v). \end{aligned}$$

Аналогичные соображения справедливы и для интегралов

$$\int_{M^{-1}(v)}^t \mathbf{1}(X(\tau) > v) f_1(d\tau, v)$$

при условии, что $X(t) < v < M(t)$. Поскольку все внутренние интегралы в формуле (2.1) имеют подобную структуру, то справедливо второе утверждение теоремы 1.

3. Симметричные интегралы и потраекторные аналоги стохастических дифференциальных уравнений. Всюду в этом пункте, если не оговорено противное, фиксируется непрерывная функция $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$. Приведем другие способы вычисления симметричного интеграла.

Теорема 2. Пусть функции $X(s)$, $s \in [0, t]$, и $f(s, u)$, $s \in [0, t]$, $u \in \mathbf{R}$, удовлетворяют условию (S) на $[0, t]$. Справедливы следующие утверждения.

1. Симметричный интеграл $\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s)$ может быть вычислен по одной из формул:

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(0, v) dv + \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t \kappa(v, X(\tau), X(t)) f(d\tau, v) dv; \quad (3.1)$$

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(t, v) dv - \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t \kappa(v, X(0), X(\tau)) f(d\tau, v) dv. \quad (3.2)$$

2. Пусть функция $X(s)$ обладает локальным временем $\alpha(t, u)$. Тогда симметричный интеграл $\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s)$ можно вычислить по формуле

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(\gamma(\alpha(t, v), v), v) dv - \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^{\gamma(\alpha(t, v), v)} \kappa(v, X(0), X(t \wedge \tau)) f(d\tau, v) dv, \quad (3.3)$$

где $\gamma(x, u) = \inf\{s: \alpha(s, u) > x\}$.

Доказательство. 1. Пусть для простоты $t = 1$. Обозначим через $S^{(n)}(f, X)$ интегральную сумму, соответствующую симметричному интегралу $\int_0^1 f(s, X(s)) * dX(s)$. Тогда в силу формулы (1.1), примененной к ломаной $X^{(n)}(s)$ и ее локальному времени, получим

$$S^{(n)}(f, X) = \int_{m(1)}^{M(1)} \int_0^1 f(s, v) \operatorname{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) dv, \quad (3.4)$$

где $N^{(n)}(s, v)$ — индикатриса Банаха ломаной $X^{(n)}(\tau)$ на отрезке $[0, s]$. Так как

$$f(s, v) = f(0, v) + \int_0^1 \mathbf{1}(\tau \leq s) f(d\tau, v),$$

то внутренний интеграл в правой части равенства (3.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{\tau}^1 \operatorname{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) f(d\tau, v) \\ & + f(0, v) \int_0^1 \operatorname{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v). \end{aligned}$$

В силу леммы 1

$$\int_{\tau}^1 \operatorname{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) = \kappa(v, X^{(n)}(\tau), X(1)), \quad \tau \geq 0,$$

следовательно, интегральная сумма $S^{(n)}(f, X)$ равна

$$\begin{aligned} & \int_{m^{(n)}(1)}^{M^{(n)}(1)} \int_0^1 \kappa(v, X^{(n)}(\tau), X(1)) f(d\tau, v) dv \\ & + \int_{m^{(n)}(1)}^{M^{(n)}(1)} \kappa(v, X(0), X(1)) f(0, v) dv, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$m^{(n)}(1) = \min\{X^{(n)}(\tau): \tau \in [0, 1]\}, \quad M^{(n)}(1) = \max\{X^{(n)}(\tau): \tau \in [0, 1]\}.$$

Второе слагаемое в (3.5) равно $\int_{X(0)}^{X(1)} f(0, v) dv$. Обратимся к первому слагаемому. Заметим, что внутренний интеграл в этом слагаемом в силу п. (b) условия (S) равен сумме интегралов

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}(X(1) \geq v) \int_0^1 \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v) f(d\tau, v) \\ & + \mathbf{1}(X(1) < v) \int_0^1 \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) > v) f(d\tau, v). \end{aligned}$$

Так как последовательность ломаных $X^{(n)}(\tau)$ сходится к непрерывной функции $X(\tau)$, то в силу условия (S) последнее выражение при почти всех v стремится при $n \rightarrow \infty$ к выражению

$$\mathbf{1}(X(1) \geq v) \int_0^1 \mathbf{1}(X(\tau) < v) f(d\tau, v) + \mathbf{1}(X(1) < v) \int_0^1 \mathbf{1}(X(\tau) > v) f(d\tau, v),$$

следовательно, ввиду теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, формула (3.1) доказана.

Доказательство формулы (3.2) аналогично с той лишь разницей, что оно опирается на соотношение $f(s, v) = f(t, v) - \int_s^t f(d\tau, v)$, остальные рассуждения аналогичны приведенным выше.

2. Заметим, что $\gamma(\alpha(t, v), v) \geq t$, поэтому

$$f(s, v) = f(\gamma(\alpha(t, v), v), v) - \int_s^{\gamma(\alpha(t, v), v)} f(d\tau, v).$$

Обозначим, как и выше, через $S_t^{(n)}(f, X)$ интегральную сумму, соответствующую симметричному интегралу $\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s)$. Проведя такие же, как и выше, рассуждения, приходим к равенству

$$\begin{aligned} S_t^{(n)}(f, X) &= \int_{X^{(n)}(0)}^{X^{(n)}(t)} f(\gamma(\alpha(t, v), v), v) dv \\ &\quad - \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t \int_s^{\gamma(\alpha(t, v), v)} f(d\tau, v) \operatorname{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) dv. \end{aligned}$$

Второе слагаемое ввиду теоремы Фубини преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^{\gamma(\alpha(t, v), v)} \int_0^t \mathbf{1}(s < \tau) \operatorname{sign}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) f(d\tau, v) dv \\ &= \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^{\gamma(\alpha(t, v), v)} \kappa(v, X(0), X^{(n)}(t \wedge \tau)) f(d\tau, v) dv. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения, приведенные выше.

З а м е ч а н и е. Пусть функция $f(s, u)$, $s \in [0, 1]$, $u \in \mathbf{R}$, имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial^2}{\partial s \partial u} f(s, u)$. Предположим, что функции $X(s)$ и $\frac{\partial}{\partial u} f(s, u)$ удовлетворяют условию (S) на $[0, 1]$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(0, X(0)) &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} f(s, X(s)) * dX(s) \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, X(s)) ds, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Действительно, в силу формулы (3.2) имеем:

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(0, X(0)) &= \int_{X(0)}^{X(t)} \frac{\partial}{\partial u} f(t, u) du + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, X(0)) ds \\ &= \int_{X(0)}^{X(t)} \frac{\partial}{\partial u} f(s, u) du - \int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} f(s, u) du ds \\ &\quad + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial s} f(s, X(0)) + \int_{X(0)}^{X(s)} \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} f(s, u) du \right] ds \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} f(s, X(s)) * dX(s) \\ &\quad + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial s} f(s, X(0)) + \frac{\partial}{\partial s} f(s, X(s)) - \frac{\partial}{\partial s} f(s, X(0)) \right] ds. \end{aligned}$$

Из соотношения (3.6), в частности, следует, что в случае, когда $X(s) = X(s, \omega)$ — стандартный винеровский процесс, а детерминированная функция $h(s, u)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial u} h(s, u)$, формулу Ито можно записать в виде

$$\int_0^t h(s, X(s)) * dX(s) = \int_0^t h(s, X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} h(s, X(s)) ds, \quad (3.7)$$

где первое слагаемое в правой части есть стохастический интеграл Ито.

Рассмотрим уравнение

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t a(s, \eta(s)) * dX(s) + \int_0^t b(s, \eta(s)) ds, \quad (3.8)$$

где первый интеграл есть симметричный интеграл по непрерывной функции $X(s)$ неограниченной вариации.

Уравнения такого вида являются детерминированными аналогами стохастических дифференциальных уравнений. С точки зрения теории случайных процессов, техника потраекторных симметричных интегралов позволяет отказаться от стандартных предположений о предсказуемости интеграндов в уравнениях такого вида и рассматривать подобные уравнения для произвольных непрерывных с вероятностью 1 случайных функций $X(s) = X(s, \omega)$ и случайных коэффициентов $a(s, \eta)$ и $b(s, \eta)$.

Решением уравнения (3.8) будем называть любую функцию вида

$$\eta(s) = \phi(s, X(s)),$$

для которой имеют смысл интегралы в правой части уравнения (3.8) и которая обращает это уравнение в тождество.

В дальнейшем предполагается, если не оговорено противное, что все рассматриваемые ниже функции имеют столько, сколько необходимо, непрерывных частных производных.

Покажем, что метод вычисления симметричного интеграла, приведенный в теореме 2, и формула (3.6) позволяют при определенных условиях гладкости коэффициентов уравнения свести решение уравнения (3.8) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Действительно, предположим, что решение $\eta(s) = \phi(s, X(s))$ уравнения (3.8) с достаточно гладкой функцией $\phi(s, u)$ существует, и при этом предположении вычислим согласно формуле (3.6) симметричный интеграл в правой части уравнения (3.8):

$$\int_0^t a(s, \phi(s, X(s))) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} a(t, \phi(t, u)) du$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} [a(s, \phi(s, u))]'_s du ds = \int_{X(0)}^{X(t)} a(t, \phi(t, u)) du \\
& - \int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} [a'_s(s, \phi(s, u)) + a'_\phi(s, \phi(s, u)) \phi'_s(s, u)] du ds. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Левую часть уравнения (3.8) мы можем записать в виде

$$\begin{aligned}
\eta(t) - \eta(0) &= [\phi(t, X(t)) - \phi(t, X(0))] + [\phi(t, X(0)) - \phi(0, X(0))] \\
&= \int_{X(0)}^{X(t)} \phi'_u(t, u) du + \int_0^t \phi'_s(s, X(0)) ds. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Подставив соотношения (3.9) и (3.10) в уравнение (3.8), получим

$$\begin{aligned}
& \int_{X(0)}^{X(t)} \phi'_u(t, u) du + \int_0^t \phi'_s(s, X(0)) ds = \int_{X(0)}^{X(t)} a(t, \phi(t, u)) du \\
& - \int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} [a(s, \phi(s, u))]'_s du ds + \int_0^t b(s, \eta(s)) ds,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& \int_{X(0)}^{X(t)} [\phi'_u(t, u) - a(t, \phi(t, u))] du \\
& = \int_0^t \left\{ b(s, \phi(s, X(s))) \right. \\
& \quad \left. - \int_{X(0)}^{X(s)} [a(s, \phi(s, u))]'_s du - \phi'_s(s, X(0)) \right\} ds. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Заметим, что правая часть равенства (3.11) является функцией ограниченной вариации, в то время как левая нет. Следовательно, мы можем приравнять интегранды в обеих частях равенства (3.11) к нулю. Мы получим систему

$$\begin{cases} \phi'_u(s, u) = a(s, \phi(s, u)), \\ \phi'_s(s, X(0)) = b(s, \phi(s, X(s))) - \int_{X(0)}^{X(s)} [a(s, \phi(s, u))]'_s du. \end{cases}$$

Нам также необходимо начальное условие $\phi(0, X(0)) = \eta(0)$.

Заметим, что, воспользовавшись первым уравнением системы, второе слагаемое из правой части второго уравнения можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{X(0)}^{X(s)} [a(s, \phi(s, u))]'_s du = \int_{X(0)}^{X(s)} \phi''_{su}(s, u) du = \phi'_s(s, X(s)) - \phi'_s(s, X(0)).$$

Следовательно, система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \phi'_u(s, u) = a(s, \phi(s, u)), \\ \phi'_s(s, X(s)) = b(s, \phi(s, X(s))), \quad \phi(0, X(0)) = \eta(0). \end{cases} \quad (3.12)$$

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 3. *Предположим, что непрерывная функция $X(s)$ на любом отрезке $[0, t]$ имеет неограниченную вариацию, а функция $a(s, \phi)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка. Пусть функция $\phi = \phi(s, u)$ есть решение системы уравнений (3.12), тогда функция $\eta(s) = \phi(s, X(s))$ является решением уравнения (3.8). Обратно, если существует гладкое решение уравнения (3.8) вида $\eta(s) = \phi(s, X(s))$, то функция $\phi = \phi(s, u)$ удовлетворяет системе уравнений (3.12).*

З а м е ч а н и е. В случае негладких решений $\eta(s) = \phi(s, X(s))$ уравнения (3.8) с помощью формулы (3.2) и соотношений (3.9) и (3.10) можно вывести интегральный вариант системы уравнений (3.12).

Далее, решая первое уравнение системы в предположении, что решение существует, получим

$$\int \frac{d\phi}{a(s, \phi)} = u + C(s), \quad (3.13)$$

где $C(s)$ — произвольная постоянная, зависящая от переменной s . Заметим, что решение (3.13) первого уравнения системы определяет неявную функцию $\phi = \phi(s, u)$, которую можно также записать в виде $\phi = \phi^*(s, C(s), u)$.

Чтобы найти неизвестную функцию $C(s)$, воспользуемся вторым уравнением системы (3.12). Для этого при каждом фиксированном $u \in \mathbf{R}$ положим

$$\Phi(s, \phi) = \Phi(s, \phi, u) = \int \frac{d\phi}{a(s, \phi)} - u - C(s) = 0.$$

По теореме о производной неявной функции имеем:

$$\phi'_s(s, u) = -\frac{\Phi'_s(s, \phi, u)}{\Phi'_\phi(s, \phi, u)}, \quad \Phi'_s(s, \phi, u) = \left(\int \frac{d\phi}{a(s, \phi)} \right)'_s - C'_s(s),$$

$$\Phi'_\phi(s, \phi, \phi) = \frac{1}{a(s, \phi)},$$

следовательно,

$$\phi'_s(s, u) = a(s, \phi) \left[C'_s(s) - \left(\int \frac{d\phi}{a(s, \phi)} \right)'_s \right].$$

Подставляя найденную производную во второе уравнение системы, получим

$$C'(s) = \frac{b(s, \phi^*(s, C(s), X(s)))}{a(s, \phi^*(s, C(s), X(s)))} - \left(\int \frac{d\phi}{a(s, \phi)} \right)'_s \Big|_{\phi=\phi^*(s, C(s), X(s))}, \quad (3.14)$$

$$\phi^*(0, C(0), X(0)) = \eta(0).$$

Предложенный выше метод может быть применим и к другим классам уравнений.

1. Рассмотрим уравнение

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t a(s, X(s), \eta(s)) * dX(s) + \int_0^t b(s, X(s), \eta(s)) ds, \quad (3.15)$$

которое может быть решено аналогичным образом, при этом мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \phi'_u(s, u) = a(s, u, \phi(s, u)), \\ \phi'_s(s, X(s)) = b(s, X(s), \phi(s, X(s))). \end{cases} \quad (3.16)$$

Первое уравнение системы уже не является уравнением с разделяющимися переменными, но его решение $\phi = \phi^*(s, C(s), u)$, если оно существует, содержит неизвестную функцию $C(s)$, которую можно найти с помощью второго уравнения системы (3.16) и начального условия $\phi^*(0, C(0), X(0)) = \eta(0)$.

2. Рассмотрим уравнение вида

$$\begin{aligned} \eta(t) - \eta(0) = & \int_0^t a(s, X(s), \eta(s) - A(s)) * dX(s) \\ & + \int_0^t b(s, X(s), \eta(s) - A(s)) ds + A(t) - A(0), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $A(s)$ — известная функция. Заметим, что уравнение (3.17) эквивалентно уравнению (3.15) в случае, когда $A(s)$ — непрерывная справа функция ограниченной вариации, в противном случае это, вообще говоря, не так. Будем искать решение уравнения (3.17) в виде $\eta(s) = \phi(s, X(s)) + A(s)$, где $\phi(s, u)$ — достаточно гладкая функция. Тогда аналогичные рассуждения приводят к системе уравнений (3.16).

3. Напомним, следуя А. В. Скороходу (см. [8, с. 116–118]), что если задана непрерывная функция $\eta(s)$, $s \in [0, T]$, $\eta(0) \geq 0$, то пару функций $(Z(s), Y(s))$, $s \in [0, T]$, где $Y(s) = -\min\{\eta(\tau) \wedge 0 : \tau \in [0, s]\}$, а $Z(s) = \eta(s) + Y(s)$, называют решением задачи отражения для функции $\eta(s)$, а функцию $Z(s)$ — отраженной функцией.

Пусть $\eta(s) = \phi(s, X(s))$ есть решение уравнения (3.15). Положим $A(s) = -\min\{\eta(\tau) \wedge 0 : \tau \in [0, s]\}$, тогда решение уравнения

$$\begin{aligned} \eta^*(t) - \eta(0) = & \int_0^t a(s, X(s), \eta^*(s) - A(s)) * dX(s) \\ & + \int_0^t b(s, X(s), \eta^*(s) - A(s)) ds + A(t) - A(0), \end{aligned}$$

где коэффициенты $a(s, y)$ и $b(s, y)$ такие же, как в уравнении (3.15), составляет нам «отраженную в нуле» функцию $Z(s)$.

4. Пусть $X(s) = X(s, \omega)$, $s \in [0, +\infty)$, — стандартный винеровский процесс. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t a(s, X(s), \eta(s)) dX(s) + \int_0^t b^*(s, X(s), \eta(s)) ds, \quad (3.18)$$

где первый интеграл в правой части есть стохастический интеграл Ито. Предполагается, что коэффициенты $a(s, u, \phi)$ и $b^*(s, u, \phi)$ предсказуемы и удовлетворяют стандартным условиям существования соответствующих интегралов в правой части уравнения. Будем, следуя принятой идеологии, искать решение в виде $\eta(s) = \phi(s, X(s))$. Согласно формуле (3.7), имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^t a(s, X(s), \phi(s, X(s))) dX(s) \\ &= \int_0^t a(s, X(s), \phi(s, X(s))) * dX(s) - \int_0^t a^*(s, X(s), \phi(s, X(s))) ds, \end{aligned}$$

где

$$a^*(s, u, \phi) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u} a(s, u, \phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} a(s, u, \phi) \frac{\partial}{\partial u} \phi(s, u) \right]. \quad (3.19)$$

Тогда уравнение (3.18) эквивалентно уравнению

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t a(s, X(s), \eta(s)) * dX(s) + \int_0^t b(s, X(s), \eta(s)) ds,$$

где

$$b(s, X(s), \phi(s, X(s))) = b^*(s, X(s), \phi(s, X(s))) - a^*(s, X(s), \phi(s, X(s))). \quad (3.20)$$

Решение последнего уравнения сводится к решению системы уравнений (3.16). Заметим, что если воспользоваться первым уравнением этой системы, то

$$b(s, u, \phi) = b^*(s, u, \phi) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} a(s, u, \phi) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \phi} a^2(s, u, \phi). \quad (3.21)$$

Наконец, в силу соотношений (3.16) и (3.19) из формулы (3.20) следует, что решение $\phi = \phi(s, u)$ стохастического дифференциального уравнения (3.18) удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi(s, X(s)) = b^*(s, X(s), \phi(s, X(s))) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \phi(s, X(s)).$$

Для иллюстрации рассмотренных выше методов приведем следующий пример.

Пример. Бесселевские диффузии [1, с. 226–228]. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\eta(t) - \eta(0) = 2 \int_0^t (\eta(s) \vee 0)^{1/2} dX(s) + \alpha t, \quad \eta(0) = x^2, \quad (3.22)$$

где интеграл в правой части уравнения есть стохастический интеграл Ито по винеровскому процессу $X(s)$, $X(0) = 0$. Решение данного уравнения доставляет квадрат бесселевского процесса. Поскольку в силу преобразования (3.21) получим $b(s, X(s), \eta(s)) = \alpha - \frac{\partial}{\partial \eta}(\eta(s) \vee 0)$, то система (3.16), отвечающая уравнению (3.22), имеет вид

$$\begin{cases} \phi'_u(s, u) = 2(\phi(s, u) \vee 0)^{1/2}, \\ \phi'_s(s, X(s)) = \alpha - (\phi(s, u) \vee 0)'_{\phi}, \quad \phi(0, X(0)) = x^2. \end{cases}$$

Будем искать неотрицательные решения уравнения (3.22), в этом случае из первого уравнения системы выводим: $\int \phi^{-1/2} d\phi = 2u + 2C(s)$ или $\phi = (u + C(s))^2$. Следовательно, бесселевский процесс $\mathcal{B}(s)$ имеет такую структуру: $\mathcal{B}(s) = |X(s) + C(s)|$, где неизвестная гладкая функция $C(s)$ определяется из второго уравнения системы:

$$C'(s) = \frac{\alpha - 1}{2(X(s) + C(s))}, \quad C^2(0) = x^2.$$

В случае $\alpha = 1$, $x = 0$ имеем: $\phi(s, X(s)) = X^2(s)$.

4. Расширенный симметричный интеграл и интеграл Хеллингера. Расширенные симметричные интегралы возникли (см. [6]) как несобственные симметричные интегралы в процессе исследования симметричных интегралов. Конструкция расширенного симметричного интеграла опирается на следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $X(s)$, $s \in [0, t]$, — непрерывная функция с локальным временем $\alpha(s, u)$, а $f(s)$, $s \in [0, t]$, — суммируемая функция. Тогда $f(s) = f_t^+(\xi(s), X(s))$ при почти всех $s \in [0, t]$, где $f_t^+(x, u) = f(\gamma(x, u)) \mathbf{1}(\alpha(t, u) \geq x)$, $\gamma(z, u) = \inf\{s: \alpha(s, u) > z\}$, $\xi(s) = \alpha(s, X(s))$.

Определение. Функция $f_t^+(x, u)$, так же как и функция $f_t^+(\xi(s), X(s))$, называется *представлением функции $f(s)$* на отрезке $[0, t]$.

Расширенный симметричный интеграл строится для определенного класса интеграндов вида $f(\xi(s), X(s))$, и приведенная выше лемма 2 показывает, что класс интеграндов достаточно широк в том смысле, что для каждой суммируемой на $[0, t]$ функции $f(s)$ существует представление $f_t^+(\xi(s), X(s))$, для которого расширенный симметричный интеграл будет определен.

О п р е д е л е н и е. Пусть $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, — непрерывная функция с локальным временем $\alpha(t, u)$. *Расширенным симметричным интегралом* $(E) \int_0^t f(s) * dX(s)$ называется интеграл по заряду:

$$\begin{aligned} (E) \int_0^t f(s) * dX(s) &\equiv \int_0^t f_t^+(\xi(s), X(s)) * dX(s) \\ &= \int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}} f_t^+(x, u) G_t(dx du), \end{aligned}$$

где $G_t(dx du)$ — заряд, однозначно определяющийся своими значениями на «прямоугольниках» $A \times \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} G_t(A \times \mathcal{B}) &\equiv \int_{X(0)}^{X(t)} \mathbf{1}((\alpha(t, u), u) \in A \times \mathcal{B}) du \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}((\alpha(t, u), u) \in (A \setminus \{0\}) \times \mathcal{B}) \operatorname{sign}(u - X(0)) du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}(u \in \mathcal{B}, \alpha(t, u) > 0) \operatorname{sign}(u - X(0)) du \mathbf{1}(0 \in A). \end{aligned}$$

Расширенный симметричный интеграл может быть вычислен по формуле

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}} f_t^+(x, u) G_t(dx du) &= \int_{X(0)}^{X(t)} f_t^+(\alpha(t, u), u) du \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{m(t)}^{M(t)} [f_t^+(\alpha(t, u), u) - f_t^+(0, u)] \operatorname{sign}(u - X(0)) du. \quad (4.1) \end{aligned}$$

В работе [6] было показано, что заряд $G_t(dx du)$, точнее, его значения на «прямоугольниках», могут быть получены как пределы симметричных интегралов с определенного вида интеграндами. Покажем, что для определенного класса интеграндов расширенный симметричный интеграл может быть получен как предел собственных симметричных интегралов, т.е. является несобственным симметричным интегралом.

Теорема 4. Пусть функции $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, и $f(s, u)$, $s \in [0, +\infty)$, $u \in \mathbf{R}$, удовлетворяют условию (S), и, кроме того, функция $X(s)$ обладает локальным временем $\alpha(t, u)$. Обозначим $\gamma(x, v) = \inf\{s: \alpha(s, v) > x\}$, $f_\varepsilon(s, u) = (1/(2\varepsilon)) \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} f(\gamma(\alpha(s, v), v), v) dv$.

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t f_\varepsilon(s, X(s)) * dX(s) = (E) \int_0^t f(s, X(s)) * dX(s). \quad (4.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что функции $X(s)$ и $f_\varepsilon(s, u)$ удовлетворяют условию (S). Поэтому в силу соотношения

$$f(\gamma(\alpha(s, v), v), v) = f(\gamma(\alpha(t, v), v), v) - \int_{\gamma(\alpha(s, v), v)}^{\gamma(\alpha(t, v), v)} f(d\tau, v), \quad s < t,$$

имеем:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t f_\varepsilon(s, X(s)) * dX(s) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} \int_0^t \frac{1}{2\varepsilon} \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} f(\gamma(\alpha(s, v), v), v) dv \\
 & \quad \times \text{sign}((X^{(n)}(s))') N^{(n)}(ds, u) du \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} f(\gamma(\alpha(t, v), v), v) dv \\
 & \quad \times \int_0^t \text{sign}((X^{(n)}(s))') N^{(n)}(ds, u) du \\
 & \quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \left[\int_0^t \int_{\gamma(\alpha(s, v), v)}^{\gamma(\alpha(t, v), v)} f(d\tau, v) \right. \\
 & \quad \left. \times \text{sign}((X^{(n)}(s))') N^{(n)}(ds, u) \right] dv du.
 \end{aligned}$$

Ввиду леммы 1, учитывая, что если $s < \gamma(\alpha(\tau, v), v)$, то $\gamma(\alpha(s, v), v) < \tau$, мы можем представить выражение в квадратных скобках в последнем слагаемом в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\gamma(0, v)}^{\gamma(\alpha(t, v), v)} \int_0^t \mathbf{1}(\gamma(\alpha(s, v), v) < \tau) \text{sign}((X^{(n)}(s))') N^{(n)}(ds, u) f(d\tau, v) \\
 &= \int_{\gamma(0, v)}^{\gamma(\alpha(t, v), v)} \kappa(u, X(0), X^{(n)}(\gamma(\alpha(s, v), v))) f(d\tau, v).
 \end{aligned}$$

Переходя в этом выражении к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{\gamma(0, v)}^{\gamma(\alpha(t, v), v)} \kappa(u, X(0), X(\gamma(\alpha(s, v), v))) f(d\tau, v).$$

Поскольку при почти всех v справедливо равенство $X(\gamma(\alpha(s, v), v)) = v$, то последний интеграл при почти всех v равен

$$\kappa(u, X(0), v)[f(\gamma(\alpha(t, v), v)) - f(\gamma(0, v))].$$

Следовательно, симметричный интеграл $\int_0^t f_\varepsilon(s, X(s)) * dX(s)$ равен

$$\begin{aligned}
 & \int_{X(0)}^{X(t)} f_\varepsilon(t, u) du \\
 & \quad - \int_{m(t)}^{M(t)} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \kappa(u, X(0), v)[f(\gamma(\alpha(t, v), v)) - f(\gamma(0, v))] dv du.
 \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ в последнем выражении, получим формулу (4.2).

З а м е ч а н и е. Пусть $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, — непрерывная функция с локальным временем $\alpha(t, u)$, непрерывным по t при почти

всех u . Тогда для любой борелевской функции $f(t, u)$ вида $f(t, u) = \int_{-\infty}^u g(\gamma^*(\alpha(t, v), v)) \mathbf{1}(\alpha(t, v) > 0) dv$, где $g(t, v)$ при каждом t является ограниченной функцией по переменной u , справедлива формула

$$f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = (E) \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} f(s, X(s)) * dX(s) + \frac{1}{2} [f(t, M(t)) + f(t, m(t)) - f(0, M(t)) - f(0, m(t))].$$

Заметим, что $f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = [f(t, X(t)) - f(t, X(0))] + [f(t, X(0)) - f(0, X(0))]$, в силу представления для функции $f(t, u)$ первое слагаемое равно

$$f(t, X(t)) - f(t, X(0)) = \int_{X(0)}^{X(t)} \frac{\partial}{\partial u} f(t, u) du,$$

а второе можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(t, X(0)) - f(0, X(0)) &= \frac{1}{2} \int_{m(t)}^{M(t)} [f(t, u) - f(0, u)] 2\delta(u - X(0)) du \\ &= \frac{1}{2} \int_{m(t)}^{M(t)} [f(t, u) - f(0, u)] (\text{sign}(u - X(0)))' du. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, правую часть последнего равенства представим в виде

$$\begin{aligned} & (f(t, u) - f(0, u)) \text{sign}(u - X(0)) \Big|_{m(t)}^{M(t)} \\ & - \frac{1}{2} \int_{m(t)}^{M(t)} \frac{\partial}{\partial u} [f(t, u) - f(0, u)] \text{sign}(u - X(0)) du \\ & = \frac{1}{2} [(f(t, M(t)) - f(0, M(t))) \cdot 1 - (f(t, m(t)) - f(0, m(t))) \cdot (-1)] \\ & - \frac{1}{2} \int_{m(t)}^{M(t)} [g(\gamma^*(\alpha(t, u), u), u) - g(\gamma(0, u), u)] \text{sign}(u - X(0)) du, \end{aligned}$$

откуда, согласно формуле для вычисления расширенного симметричного интеграла, получим искомое равенство.

Другой класс несобственных симметричных интегралов связан с интегралами Хеллингера. Напомним, что если $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, — непрерывная функция, то *интегралом Хеллингера* называется

$$(H) \int_0^t f(s) * dX(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s) ds \Delta X_k^{(n)}.$$

Интегралы Хеллингера, как и симметричные интегралы, являются обобщениями интегралов Римана–Стилтьеса. Ряд сведений об условиях существования интегралов такого вида приведен в работах [2], [3].

В работе [6] была установлена связь между определенным классом несобственных симметричных интегралов и интегралами Хеллингера, ниже мы обобщим эти результаты. Пусть $X(s)$, $Y(s)$, $s \in [0, t]$, — непрерывные функции. Рассмотрим последовательность сгущающихся разбиений $\{t_k^{(n)}\}$ отрезка $[0, t]$ и обозначим через $Y^{(n)}(s)$, $s \in [0, t]$, последовательность ломаных, построенных по функции $Y(s)$ и отвечающих этим разбиениям.

Теорема 5. Пусть функции $X(s)$ и $f(s, u)$ удовлетворяют условию (S) на $[0, t]$, а $Y(s)$ — непрерывная функция. Если существует интеграл Хеллингера

$$(H) \int_0^t \left(\int_{X(0)}^{X(s)} f(s, u) du \right) dY(s),$$

то справедлива формула

$$\begin{aligned} (H) \int_0^t \left(\int_{X(0)}^{X(s)} f(s, u) du \right) dY(s) &= Y(t) \int_{X(0)}^{X(t)} f(t, u) du \\ &- \int_{\mathbf{R}} \int_0^t \kappa(u, X(0), X(s)) Y(s) f(ds, u) du \\ &- \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(s, X(s)) Y^{(n)}(s) * dX(s). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Доказательство. В силу формулы (3.2) имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s, X(s)) Y^{(n)}(s) * dX(s) &= Y^{(n)}(t) \int_{X(0)}^{X(t)} f(t, u) du \\ &- \int_{\mathbf{R}} \int_0^t \kappa(u, X(0), X(s)) Y^{(n)}(s) f(ds, u) du \\ &- \int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} f(s, u) du (Y^{(n)})'(s) ds. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Последнее слагаемое в правой части соотношения (4.4) можно переписать как частичную сумму

$$\sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} \left(\int_{X(0)}^{X(s)} f(s, u) du \right) ds \Delta Y_k^{(n)}, \quad \Delta Y_k^{(n)} = Y(t_k^{(n)}) - Y(t_{k-1}^{(n)}),$$

соответствующую интегралу

$$(H) \int_0^t \left(\int_{X(0)}^{X(s)} f(s, u) du \right) dY(s).$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (4.4) и учитывая тот факт, что предел в левой части этого равенства существует в силу существования интеграла Хеллингера в правой части равенства, приходим к формуле (4.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 445 с.
2. Дьячков А. М. О существовании интеграла Стильтеса. — Докл. РАН, 1996, т. 350, № 2, с. 158–161.
3. Мацаев В. И., Соломяк М. З. Об условиях существования интеграла Стильтеса. — Матем. сб., 1972, т. 88, № 4, с. 522–535.
4. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974, 480 с.
5. Насыров Ф. С. О локальных временах для функций и случайных процессов, I. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 4, с. 798–812.
6. Насыров Ф. С. Симметричные интегралы и их применение в финансовой математике. — Труды МИАН, 2002, т. 237, с. 265–278.
7. Терезин А. П. Приближение функций ограниченной p -вариации. — Изв. вузов, 1965, № 2, с. 171–187.
8. Чжун К., Уильямс Р. Введение в стохастическое интегрирование. — М.: Мир, 1987, 152 с.
9. Berman S. M. Nonincrease almost everywhere of certain measurable functions with applications to stochastic processes. — Proc. Amer. Math. Soc., 1983, v. 88, № 1, p. 141–144.
10. Geman D., Horowitz J. Occupation densities. — Ann. Probab., 1980, v. 8, № 1, p. 1–67.
11. Kondurar V. Sur l'intégrale de Stieltjes. — Матем. сб., 1937, т. 2, № 2, с. 361–366.
12. Young L. C. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. — Acta Math., 1936, v. 67, p. 251–282.

Поступила в редакцию
23.IV.2003