Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Давыдов, Э. Тийи, Выпуклые перестройки гауссовских процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 2, 209–228

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 04:26:33

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 47

Выпуск 2, 2002 год

апрель, май, июнь

© 2002 г.

ДАВЫДОВ Ю.*, ТИИИ Э.*

ВЫПУКЛЫЕ ПЕРЕСТРОЙКИ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

В статье рассматривается асимптотическое поведение выпуклых перестроек регуляризированных траекторий гауссовских процессов со стационарными приращениями. С использованием принципа концентрации доказывается сходимость почти наверное этих перестроек к неслучайной выпуклой кривой, которая оказывается кривой Лоренца, соответствующей стандартному гауссовскому распределению. Аналогичные результаты доказаны и для мостов, построенных по исходным процессам. Обсуждается связь с недавними результатами Азаиса и Вшебора [1] о сходимости почти наверное осцилляций гауссовских процессов. В качестве приложения основной теоремы 3.1 получена теорема бакстеровского типа о вариациях траекторий и предложен один новый класс состоятельных оценок индекса фрактальности.

Ключевые слова и фразы: гауссовский процесс, стационарные приращения, усиленный закон больших чисел, полигональная аппроксимация, конвексификация, p -вариация, индекс фрактальности.

1. Введение

Исследование свойств траекторий случайных процессов является важной областью теории вероятностей, которая традиционно привлекает внимание многих исследователей. В недавней работе Вершика и автора [4] был обнаружен новый феномен, который можно охарактеризовать как некоторый вариант усиленного закона больших чисел для выпуклых перестроек (конвексификаций) броуновских траекторий. В [3] было показано, что аналогичное явление имеет место и для p -строго

*Laboratoire de Statistique et Probabilités, FRE CNRS 2222, U.F.R. de Mathématiques-M2, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq, France; e-mail: Youri.Davydov@univ-lille1.fr

устойчивых процессов при всех значениях $p \in [1, 2]$. Цель настоящей работы — показать, что подобный эффект наблюдается и для широкого класса гауссовских процессов со стационарными приращениями (включающего, в частности, дробное броуновское движение $W^\alpha(t)$ с $0 < \alpha < 2$).

Говоря более точно, пусть $\xi = \{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ — центрированный гауссовский процесс со стационарными приращениями. Мы предполагаем, что траектории процесса ξ с вероятностью 1 принадлежат некоторому польскому пространству X функций. Пусть $\{\xi_n = \xi_n(t), t \in [0, 1]\}$ — последовательность полигональных аппроксимаций ξ , отвечающая равномерным подразбиениям интервала $[0, 1]$, т.е.

$$\xi_n(t) = \xi\left(\frac{k}{n}\right) + (nt - k) \left(\xi\left(\frac{k+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

при $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $t \in [k/n, (k+1)/n]$.

При незначительных дополнительных предположениях на дисперсию приращений $A(t)$ мы показываем, что с вероятностью 1 для всех $t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{b_n} V \xi_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds,$$

где $b_n = n\sqrt{A(1/n)}$, $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp(-s^2/2) ds$, а V — оператор выпуклой перестройки, точное определение которого дается ниже.

Полученные результаты тесно связаны с исследованием вариаций порядка p случайных процессов. В частности, из доказательства нашей теоремы 3.1 как побочный факт мы получаем теорему бакстеровского типа (теорема 3.6), которая обобщает в нескольких направлениях результат Дасгупта–Каллианпура [5] о вариациях четного порядка дробного броуновского движения W^α .

Мы обсуждаем (см. п. 3.3) связь наших результатов с недавними результатами Азаиса–Вшебора [1] о почти наверное слабой сходимости осцилляций гауссовских процессов.

Мы показываем, что характер поведения конвексификаций траекторий не меняется, если исходный процесс заменить на один из порожденных им мостов.

Еще один источник мотивации — возможные приложения к проблеме оценивания индекса фрактальности. В разделе 5 на основе теоремы 3.1 мы конструируем новое семейство состоятельных оценок этого индекса. Детальное изложение указанного направления можно найти в [13].

О методах. Во-первых, мы опираемся на теорему из [3] о связи между сходимостью конвексификаций абсолютно непрерывных функций и слабой сходимостью их производных, рассматриваемых как случайные

величины на пространстве $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, λ — мера Лебега. Вторым существенным моментом является использование принципа концентрации для гауссовских мер (детали см. в [10]).

2. Обозначения и вспомогательные факты

На протяжении всей работы мы используем следующие обозначения.

2.1. Обозначения. λ — мера Лебега.

$\Rightarrow$ — знак слабой сходимости мер.

$\xRightarrow{[0,1]}$ — знак слабой сходимости для функций, определенных на $[0, 1]$.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — основное вероятностное пространство.

$\mathbf{E}$ — математическое ожидание по отношению к $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

E — математическое ожидание по отношению к $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$.

$\mathcal{N}(0, 1)$ — стандартное гауссовское распределение.

Φ — функция распределения стандартной гауссовской величины $\mathcal{N}(0, 1)$.

$\mathcal{B}_A$ — σ -алгебра борелевских подмножеств множества A .

x_+, x_- — соответственно положительная и отрицательная части числа x .

п.н. — почти наверное.

$\omega_f(\cdot)$ — модуль равномерной непрерывности функции f .

$[x]$ — целая часть x .

2.2. Определения. Прежде всего напомним некоторые определения из [3].

О п р е д е л е н и е 2.1. Пусть f — измеримая функция, заданная на $[0, 1]$. *Монотонной перестановкой* функции f называется неубывающая непрерывная справа функция Tf , имеющая то же самое распределение, что и f : $\lambda f^{-1} = \lambda(Tf)^{-1}$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Оператор V , определенный на множестве всех абсолютно непрерывных на $[0, 1]$ функций равенством $Vf(t) = f(0) + \int_0^t T(f')(s) ds$, называется *оператором выпуклой перестройки*.

Очевидно, Vf является выпуклой функцией. Кроме того, $Vf(0) = f(0)$, $Vf(1) = f(1)$. Ряд свойств операторов T и V можно найти в [14].

О п р е д е л е н и е 2.3. Мы будем говорить, что последовательность $\{g_n\}_{n \geq 1}$ измеримых функций на $[0, 1]$ *сходится слабо* на $[0, 1]$ к функции g (обозначение: $g_n \xRightarrow{[0,1]} g$), если $\lambda g_n^{-1} \Rightarrow \lambda g^{-1}$.

2.3. Вспомогательные факты. Следующее полезное утверждение взято из [3].

Предложение 2.1. *Рассмотрим последовательность $\{f_n\}_{n \geq 1}$ абсолютно непрерывных функций, заданных на $[0, 1]$. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. Существует выпуклая непрерывная функция f такая, что

$$Vf_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

2. Предел $a = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)$ существует и конечен. Кроме того, существует функция g такая, что

$$\text{a) } f'_n \xrightarrow{[0,1]} g, \quad \text{b) } \int_0^1 (f'_n)_\pm d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_\pm d\lambda.$$

При этом $a = f(0)$ и можно взять $g = f'$.

Теперь мы напомним принцип концентрации для гауссовских мер [10]. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ — гауссовский процесс и ρ_ξ — полуметрика на T , индуцированная этим процессом:

$$\rho_\xi(s, t) = (\mathbf{E}|\xi(t) - \xi(s)|^2)^{1/2}.$$

Процесс ξ называется *ограниченным*, если он ρ_ξ -сепарабелен и равенство $\mathbf{P}\{\sup_T |\xi(t)| < \infty\} = 1$ имеет место для каждой сепарабельной модификации $\bar{\xi}$ процесса ξ .

Предложение 2.2. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ — ограниченный гауссовский процесс, $\sigma^2 = \sup_T \mathbf{D}\xi(t)$, m — медиана распределения случайной величины $\sup_T \xi(t)$. Обозначим через γ случайную величину, имеющую гауссовское распределение с параметрами $(0, \sigma^2)$. Тогда для любого $\tau > 0$ имеет место неравенство:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sup_T \xi(t) - m\right| > \tau\right\} \leq \mathbf{P}\{\gamma > \tau\}.$$

Нам понадобится также еще один хорошо известный результат о гауссовских векторах.

Предложение 2.3. Для каждого целого $p \geq 1$ существуют такие абсолютные постоянные $C_{p,k}$, $k \in \{1, \dots, p\}$, что для любого центрированного гауссовского вектора (U, V) с $\mathbf{D}U = \sigma_u^2$, $\mathbf{D}V = \sigma_v^2$, $\text{cov}(U, V) = \sigma_{u,v}$ имеет место равенство:

$$\text{cov}(U^p, V^p) = \sum_{1 \leq k \leq p} C_{p,k} (\sigma_{u,v})^k (\sigma_u \sigma_v)^{p-k}.$$

3. Результаты

3.1. Гауссовские процессы со стационарными приращениями. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ — центрированный гауссовский процесс со стационарными приращениями, $\xi(0) = 0$. Пусть (ξ_n) — последовательность полигональных аппроксимаций процесса ξ , определяемых равномерными подразбиениями интервала $[0, 1]$. Положим

$$\Delta_{n,i}(\xi) = \xi\left(\frac{i+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{i}{n}\right), \quad A(t) = E(\xi(s+t) - \xi(s))^2.$$

З а м е ч а н и е 3.1. В силу стационарности приращений $A(t) = E(\xi(t))^2$. Мы полагаем $\sigma_n^2 = A(1/n)$.

Кроме того, $\forall (i, j)$ с $j > i$ мы будем использовать обозначение

$$\begin{aligned}\gamma_{n,j-i} &= \text{cov}(\Delta_{n,i}, \Delta_{n,j}) = E\Delta_{n,i}\Delta_{n,j} \\ &= \frac{A((j-i-1)/n) + A((j-i+1)/n)}{2} - A\left(\frac{j-i}{n}\right).\end{aligned}$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 3.1. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ — центрированный гауссовский процесс со стационарными приращениями. Пусть $\xi_n = \{\xi_n(t), t \in [0, 1]\}$ — последовательность полигональных аппроксимаций процесса ξ . Предположим, что выполнена одна из двух следующих гипотез H_1 или H_2 :

H_1 : существуют $C > 0$, $\delta > 0$ такие, что для любых $n \geq 2$ и $k \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\left| \frac{\gamma_{n,k}}{\sigma_n^2} \right| \leq c_k, \quad \text{где } c_k = \min \left\{ 1, \frac{C}{(\ln k)^{1+\delta}} \right\};$$

H_2 : существуют $k_0 \in \mathbf{N}^*$, $C' > 0$ и $\delta' > 0$ такие, что для любых $n \geq 2$ и $k \geq k_0$

$$\left| \frac{\gamma_{n,k}}{\sigma_n^2} \right| \leq \frac{C'}{(\ln n)^{1+\delta'}}.$$

Тогда почти наверное для каждого t из $[0, 1]$

$$\frac{1}{b_n} V \xi_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds, \quad \text{где } b_n = n\sigma_n. \quad (1)$$

3.2. Достаточные условия. В этом пункте предлагаются простые достаточные условия для того, чтобы функция $A(t)$ удовлетворяла H_1 или H_2 .

Теорема 3.2. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ — центрированный гауссовский процесс со стационарными приращениями, (ξ_n) — последовательность полигональных аппроксимаций ξ .

1) Предположим, что A дифференцируема и существует $\alpha \in]0, 1]$ такое, что $\omega_{A'}(h) = O(h^\alpha)$ при $h \rightarrow 0$.

Тогда:

а) если $A'(0) \neq 0$, то выполнено H_2 ;

б) если $A'(0) = 0$ и существуют константы $C_1 > 0$ и $\beta \in [0, \alpha[$ такие, что $A'(h) \geq C_1 h^\beta$, то выполнено H_2 .

2) Предположим, что для некоторого $\delta > 0$ производная A'' существует на $]0, \delta[$ и существуют $C_2 > 0$ и $\gamma \in]0, 1[$ такие, что в окрестности нуля $A''(h) \sim C_2 h^{-\gamma-1}$. Тогда выполнено H_1 .

Пример 3.1. *Дробное броуновское движение.* Рассмотрим центрированный гауссовский процесс $\{W^\alpha(t), t \in [0, 1]\}$ с параметром $0 < \alpha < 2$ и с ковариационной функцией

$$K(t, s) = \frac{1}{2} (t^\alpha + s^\alpha - |t - s|^\alpha).$$

Очевидно, $W^\alpha(t)$ имеет стационарные приращения и

$$A(t) = \mathbf{E}|W^\alpha(t+s) - W^\alpha(s)|^2 = t^\alpha.$$

По теореме 3.2 для любого α , $0 < \alpha < 2$ выполнено H_1 . Следовательно, по теореме 3.1 с вероятностью 1 для каждого $t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{n^{1-\alpha}} V W_n^\alpha(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L(t).$$

Пример 3.2. Рассмотрим гауссовский процесс $\nabla^\alpha(t) = e^{-t\alpha} W_{e^{2t}}^\alpha$, $t \in [0, 1]$, где W^α , $0 < \alpha < 2$, — процесс дробного броуновского движения. Процесс $\nabla^\alpha(t)$ является стационарным гауссовским с ковариационной функцией

$$R(t) = \operatorname{ch} t\alpha - 2^{\alpha-1} |\operatorname{sh} t|^\alpha.$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ это в точности процесс Орнштейна–Уленбека. По теореме 3.2, если $0 < \alpha < 2$, то выполнено H_1 . Таким образом, по теореме 3.1 с вероятностью 1 для каждого $t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{b_n} V \nabla_n^\alpha(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L(t), \quad \text{где } b_n = 2n \left(1 - R\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

3.3. Связь с результатами Азаиса и Вшебора. Азаис и Вшебор [1] изучали сверточные аппроксимации гауссовских процессов со стационарными приращениями и при широких предположениях (см. H_3 и H_4 ниже) установили п.н. слабую сходимость их производных. При доказательстве этого результата они получили сходимость п.н. моментов, что в действительности дает возможность вывести сходимость п.н. конвексификаций.

Теорема 3.3. Пусть $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ — гауссовский процесс со стационарными приращениями, и пусть $\xi_\varepsilon = \psi_\varepsilon * \xi$ — его сверточные аппроксимации; здесь $\psi_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \psi(t/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, а ψ — фиксированная функция с компактным носителем и ограниченной вариацией такая, что $\int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = 1$. Положим $b_\varepsilon = \sqrt{A(\varepsilon)}/\varepsilon$. Предположим, что выполнены следующие условия:

H_3 : функция A дважды дифференцируема вне нуля и существуют невозрастающая медленно меняющаяся функция L_1 , постоянная $C > 0$ и число $\alpha \in]0, 1[$ такие, что для всех t из $[0, 1]$ мы имеем $|A''(t)| \leq C |t|^{2\alpha-2} L_1(t)$;

H_4 : существуют постоянная $C' > 0$ и ограниченная функция L_2 такие, что $A(\varepsilon) \sim C'\varepsilon^{2\alpha}L_2(\varepsilon)$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда п.н. для каждого $t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{b_\varepsilon} V\xi_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} L(t).$$

3.4. Гауссовские мосты. В этом пункте мы рассматриваем выпуклые перестройки различных «мостов», построенных по исходному гауссовскому процессу ξ , и показываем, что они, как правило, имеют такое же асимптотическое поведение, что и конвексификации процесса ξ . Ниже можно предполагать, не ограничивая общности, что $\xi(0) = 0$.

Мосты. Пусть f — функция, заданная на $[0, 1]$ и принадлежащая пространству X траекторий процесса ξ . Предположим, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Мы называем f -мостом, построенным по процессу ξ , случайный процесс $\overset{\circ}{\xi}_f$, определенный равенством

$$\overset{\circ}{\xi}_f(t) = \xi(t) - f(t)\xi(1), \quad t \in [0, 1].$$

Заметим, что обычно мостом, порожденным процессом ξ , называют процесс $\overset{\circ}{\xi}$, распределение которого совпадает с условным распределением ξ при условии, что $\xi(1) = 0$. Нижеследующее предложение показывает, что в гауссовском случае наша терминология вполне согласуется с общепринятой.

Предложение 3.1. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ — центрированный гауссовский процесс с $\xi(0) = 0$ и с корреляционной функцией $R(t, s)$. Положим $f(t) = R(t, 1)/R(1, 1)$. Тогда $\overset{\circ}{\xi}_f = \overset{\circ}{\xi}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нормируя, если надо, процесс ξ , можно считать, что $R(1, 1) = 1$.

Уточним смысл, в котором понимается условное распределение ξ при условии $\xi(1) = 0$. Пусть P — распределение ξ в X . Обозначим $\{P_a, a \in \mathbf{R}\}$ систему условных распределений для P относительно случайной величины $\xi(1)$:

$$P_a(B) = \mathbf{P}\{\xi \in B \mid \xi(1) = a\}, \quad B \in \mathcal{B}_X.$$

Такая система в наших условиях существует и определяется с точностью до множества $\mathcal{P}_{\xi(1)}$ -меры нуль значений индекса a . Хорошо известно, что в гауссовском случае меры P_a имеют одну и ту же корреляционную структуру и отличаются только линейным сдвигом. Иначе говоря, существует центрированная гауссовская мера Q , сосредоточенная на подпространстве $H = \{x \in X \mid x(1) = 0\}$ и такая, что

$$P_a = QT_{ah}^{-1},$$

где $T_{ah}(x) = x + ah$, а сдвиг ah , очевидно, совпадает с условным средним процесса ξ относительно $\xi(1)$, т.е. $ah(t) = E\{\xi(t) | \xi(1) = a\}$, откуда следует

$$h(t) = R(t, 1) \xi(t).$$

Мера Q и есть то, что можно назвать условным распределением процесса ξ при условии $\xi(1) = 0$. Чтобы найти Q , достаточно спроектировать исходную меру P на подпространство Y параллельно вектору h . Поэтому Q есть не что иное, как распределение процесса $\xi(t) - R(t, 1) \xi(1)$, что и утверждалось.

Конвексификация мостов. Ключом к изучению выпуклых перестроек мостов является следующая

Лемма 3.1. Пусть (f_n) — последовательность функций, абсолютно непрерывных на $[0, 1]$, такая, что для некоторого $t \in [0, 1]$ существует предел $\lim_n b_n^{-1} V f_n(t) = a$, где (b_n) , $b_n \rightarrow \infty$, — некоторая нормировочная последовательность.

Пусть (h_n) — еще одна последовательность абсолютно непрерывных функций, для которой $\lim_n b_n^{-1} \|h'_n\| < \infty$.

Тогда

$$\lim_n b_n^{-1} V(f_n + h_n)(t) = a.$$

Доказательство. Так как

$$V(f_n + h_n)(t) = \int_0^t T(f'_n + h'_n)(s) ds,$$

где T — оператор монотонной перестановки, то

$$\begin{aligned} |V(f_n + h_n)(t) - V f_n(t)| &\leq \int_0^t |T(f'_n + h'_n)(s) - T f'_n(s)| ds \\ &\leq \int_0^t |h'_n(s)| ds = \|h'_n\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Здесь использовалось неравенство $\|Tf - Tg\|_{L^p} \leq \|f - g\|_{L^p}$, верное для всех $f, g \in L^p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$ (см., например, [14]).

Ясно, что эта оценка дает все, что нужно.

Вернемся теперь к конвексификациям мостов.

Предложение 3.2. Предположим, что f — абсолютно непрерывная функция, а последовательность $b_n^{-1} V(\xi_n)$ нормализованных конвексификаций полигональных аппроксимаций процесса ξ сходится п.н. к процессу η . Тогда то же самое верно и для моста $\overset{o}{\xi}_f(t)$: п.н. для каждого $t \in [0, 1]$

$$b_n^{-1} V(\overset{o}{\xi})_f(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \eta(t).$$

Из этого предложения непосредственно следует

Теорема 3.4. Пусть $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ — гауссовский процесс со стационарными приращениями и выполнено H_1 или H_2 . Предположим, что функция $t \rightarrow R(t, 1)$, $t \in [0, 1]$, абсолютно непрерывна. Пусть $\overset{\circ}{\xi}_n(t)$ — последовательность полигональных аппроксимаций гауссовского моста $\overset{\circ}{\xi}(t)$, соответствующего ξ . Тогда п.н. для каждого t из $[0, 1]$

$$b_n^{-1} V \overset{\circ}{\xi}_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L(t),$$

здесь $b_n = n\sigma_n$, а L — кривая Лоренца из теоремы 3.1.

З а м е ч а н и е 3.2. Если полигональные аппроксимации $\overset{\circ}{\xi}_n$ моста $\overset{\circ}{\xi}$ заменить на гауссовские мосты $(\xi_n)^\circ$, построенные по полигональным аппроксимациям ξ_n , то результат остается в силе.

З а м е ч а н и е 3.3. Подобное утверждение верно также и для f -мостов, если f абсолютно непрерывна.

Аналоги предложения 3.2 и теоремы 3.4 имеют место и для сверточных аппроксимаций.

Предложение 3.3. Предположим, что

- 1) $b_\varepsilon \rightarrow \infty$;
- 2) $\psi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$, $\phi \in L^1(\mathbf{R}^1)$, $\|\psi\|_{L^1} = 1$;
- 3) $\psi(t) |t| \xrightarrow[t \rightarrow \pm \infty]{} 0$;
- 4) функция f абсолютно непрерывна.

Тогда если последовательность $b_\varepsilon^{-1} V \xi_\varepsilon$ нормализованных конвексификаций сверточных аппроксимаций процесса ξ сходится п.н. к процессу η , то то же самое верно и для f -моста $\overset{\circ}{\xi}_f$. Другими словами, если $(\overset{\circ}{\xi}_f)_\varepsilon$ — сверточная аппроксимация моста $\overset{\circ}{\xi}_f$, то мы имеем п.н. для каждого $t \in [0, 1]$

$$b_\varepsilon^{-1} V (\overset{\circ}{\xi}_f)_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \eta(t).$$

Теорема 3.5. Пусть $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ — гауссовский процесс со стационарными приращениями и выполнены H_3 и H_4 . Пусть $\overset{\circ}{\xi}_\varepsilon$ — сверточная аппроксимация моста $\overset{\circ}{\xi}$, построенная с помощью функции ψ тем же самым образом, что и в теореме 3.3. Тогда п.н. для каждого $t \in [0, 1]$ имеет место сходимость

$$b_\varepsilon^{-1} V \overset{\circ}{\xi}_\varepsilon(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L(t).$$

З а м е ч а н и е 3.4. Замечания, аналогичные замечаниям 3.2 и 3.3, справедливы и в случае сверточных аппроксимаций. Мы оставляем детали читателю.

3.5. К теореме Бакстера. Ниже в разделе 4 при доказательстве теоремы 3.1 будет установлена сходимость п.н. моментов

$$E(b_n^{-1}\xi'_n)^m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E\eta^m, \quad m \in \mathbf{N},$$

и п.н. слабая сходимость

$$b_n^{-1}\xi'_n \xrightarrow{[0,1]} \Phi^{-1}. \quad (2)$$

Стандартные рассуждения, подобные тем, которые используются в шаге **v** доказательства теоремы 3.1 (см. п. 4.2), позволяют отсюда вывести и сходимость п.н. абсолютных моментов произвольного порядка $E|b_n^{-1}\xi'_n|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E|\eta|^p$, $p \in \mathbf{R}_+$. Так как левая часть этого соотношения равна

$$V_\xi(n, p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n^{p-1}}{b_n^p} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \xi\left(\frac{k+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{k}{n}\right) \right|^p,$$

то мы получаем следующее утверждение.

Теорема 3.6. Пусть $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ — гауссовский процесс со стационарными приращениями и выполнено H_1 или H_2 . Тогда для любого $p > 0$ с вероятностью 1

$$V_\xi(n, p) \rightarrow E|\eta|^p, \quad n \rightarrow \infty.$$

Эта теорема обобщает как теорему Бакстера ($p = 2$, $\xi = W$) [2], так и недавний результат Дасгупта–Каллианпура [5], которые установили другим методом (кратные стохастические интегралы) подобную сходимость для вариации p -го порядка (p — четное) приращений дробного броуновского движения.

Теорема 3.6 показывает, в частности, что процесс W^α имеет конечную вариацию порядка $2/\alpha$.

Следствие 3.1. Рассмотрим процесс дробного броуновского движения W^α с $0 < \alpha < 2$. Тогда с вероятностью 1

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \xi\left(\frac{k+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{k}{n}\right) \right|^{2/\alpha} \rightarrow E|\eta|^{2/\alpha}.$$

4. Доказательства

4.1. Предварительные леммы.

Лемма 4.1. Предположим, что последовательность случайных величин $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ сходится по вероятности к константе a . Тогда последовательность их медиан $\{m(\gamma_n)\}$ также сходится к a .

Доказательство. См. [11, с. 256–257].

Лемма 4.2. Пусть γ — положительная случайная величина, m — ее медиана. Тогда $m/2 \leq E\gamma$.

Доказательство. Непосредственное следствие неравенства Маркова.

Лемма 4.3. Пусть $\{(\gamma_n)_{n \geq 1}\}$ — последовательность случайных величин, $\{(a_n)_{n \geq 1}\}$ — ограниченная числовая последовательность и f — непрерывная функция на $\mathbf{R}$. Предположим, что $\gamma_n - a_n \rightarrow 0$ п.н., $n \rightarrow \infty$. Тогда $f(\gamma_n) - f(a_n) \rightarrow 0$ п.н., $n \rightarrow \infty$.

Доказательство очевидно.

Лемма 4.4. Пусть $\{(\gamma_n)_{n \geq 1}\}$ — последовательность случайных величин, $\{(a_n)_{n \geq 1}\}$ — ограниченная числовая последовательность. Предположим, что $\gamma_n - a_n \rightarrow 0$ п.н., $n \rightarrow \infty$, и что $\gamma_n \rightarrow 0$ по вероятности, $n \rightarrow \infty$.

Тогда $\gamma_n \rightarrow 0$ п.н., $n \rightarrow \infty$.

Доказательство элементарно.

4.2. Доказательство теоремы 3.1. План доказательства. Мы будем использовать предложение 2.1. В силу этого результата нам достаточно показать, что п.н.

$$b_n^{-1}(V\xi_n(t))' \xrightarrow{[0,1]} \Phi^{-1}, \quad (3)$$

$$b_n^{-1} \int_0^1 (V\xi_n)'_{\pm} d\lambda \longrightarrow \int_0^1 [\Phi^{-1}(s)]_{\pm} ds. \quad (4)$$

Сначала мы установим (3). Так как распределения функций ξ'_n и $T\xi'_n$ совпадают, то нам достаточно доказать, что п.н.

$$b_n^{-1}\xi'_n \xrightarrow{[0,1]} \Phi^{-1}. \quad (5)$$

Для проверки (5) мы применим метод моментов: достаточно показать, что для всякого натурального k с вероятностью 1

$$E(b_n^{-1}\xi'_n)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\eta^k, \quad (6)$$

где $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Сначала (6) будет доказано для моментов четного порядка, а затем — для нечетного. Все доказательство будет разбито на 5 этапов.

i. $\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} m_n(2p) \rightarrow 0$, где $m_n(2p)$ — медиана случайной величины $\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p}$.

ii. $\int_0^1 (b_n^{-1}\xi'_n(t))^{2p} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} a_{2p}$ с $a_{2p} = (2p - 1)!!$.

iii. $\int_0^1 (b_n^{-1}\xi'_n(t))^{2p} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} a_{2p}$.

Шаги i, ii и iii дадут (6) для $k = 2p$. Следующий шаг

iv. $\int_0^1 (b_n^{-1}\xi'_n(t))^{2p+1} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$.

Чтобы закончить, останется установить (4), т.е.

v. $E(b_n^{-1}\xi'_n)_{\pm} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \mathbf{E}\eta_{\pm}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

i. Проверка соотношения $\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p} - m_n(2p) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$. Мы используем принцип концентрации для гауссовских мер. По теореме Хана–Банаха

$$\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p} = \sup_{l \in S_1^*} l(b_n^{-1}\xi'_n),$$

где S_1^* — единичный шар пространства $L^q[0, 1]$; $q = 2p/(2p-1)$. Положим

$$V_n^2 = \sup_{l \in S_1^*} \mathbf{D}[l(b_n^{-1}\xi'_n)],$$

и пусть $m_n(2p)$ обозначает медиану случайной величины $\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p}$.

Оценим V_n^2 . Для $l \in S_1^*$ будем иметь

$$l(b_n^{-1}\xi'_n) = \int_0^1 (b_n^{-1}\xi'_n(t)) l(t) dt = \frac{n}{b_n} \sum_{i=0}^{n-1} [\Delta_{n,i}(\xi)] l_i$$

$$\text{с } l_i = \int_{i/n}^{(i+1)/n} l(t) dt.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}[l(b_n^{-1}\xi'_n)]^2 = \frac{n^2}{b_n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}[\Delta_{n,i}(\xi) \Delta_{n,j}(\xi)] l_i l_j. \quad (7)$$

Так как $\gamma_{n,j-i} = \text{cov}(\Delta_{n,i}(\xi), \Delta_{n,j}(\xi))$, то из (7) выводим

$$V_n^2 \leq \frac{2}{\sigma_n^2} \sum_{s=0}^{n-1} |\gamma_{n,s}| \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s}$$

$$\text{с } \bar{l}_i = \int_{i/n}^{(i+1)/n} |l(t)| dt.$$

Оценим теперь $\bar{l}_i$. Используя неравенство Гёльдера с показателями $2p$ и $q = 2p/(2p-1)$, получим

$$\bar{l}_i \leq \left(\int_{i/n}^{(i+1)/n} |l(t)|^q dt \right)^{1/q} \left(\int_{i/n}^{(i+1)/n} dt \right)^{1/(2p)} \leq \beta(n) n^{-1/(2p)}$$

$$\text{с } \beta(n) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left(\int_{i/n}^{(i+1)/n} |l(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

З а м е ч а н и е 4.1. Ясно, что $\beta(n) \leq 1$, поскольку $l \in S_1^*$. Более того, $\beta(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Пусть процесс ξ таков, что выполнено H_1 . Чтобы оценить V_n^2 , напишем

$$V_n^2 \leq 2 \sum_{s=0}^{n-1} c_s \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s} \stackrel{\text{def}}{=} T_1 + T_2, \quad (8)$$

где c_s взято из H_1 и

$$T_1 = 2 \sum_{s=0}^{\lfloor n^{1/(4p)} \rfloor} c_s \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s},$$

$$T_2 = 2 \sum_{s=\lfloor n^{1/(4p)} \rfloor+1}^{n-1} c_s \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s}.$$

Оценим T_1 .

З а м е ч а н и е 4.2. Для любого $s \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i = \sum_{i=0}^{n-1-s} \int_{i/n}^{(i+1)/n} |l(t)| dt \leq \int_0^1 |l(t)| dt = C_1 < \infty,$$

поскольку $l \in L^q$ и $q > 1$.

В силу замечаний 4.1 и 4.2 мы имеем

$$T_1 \leq 2\beta(n)n^{-1/(2p)} \sum_{s=0}^{\lfloor n^{1/(4p)} \rfloor} \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \leq 2C_1\beta(n)[n^{-1/(4p)}].$$

Поэтому

$$T_1 \leq K_1[n^{-1/(4p)}], \quad \text{где } K_1 = 2C_1. \quad (9)$$

Оценим T_2 . Так как последовательность c_k невозрастающая, то

$$T_2 \leq 2c_{n^{1/(4p)}} \sum_{s>\lfloor n^{1/(4p)} \rfloor} \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s}$$

$$\leq c_{n^{1/(4p)}} \int_0^1 \int_0^1 |l(t)| |l(s)| dt ds \leq C_1^2 \frac{C}{((4p)^{-1} \ln n)^{1+\delta}}.$$

Поэтому

$$T_2 \leq \frac{C_{p,\delta}}{(\ln n)^{1+\delta}}, \quad \text{где } C_{p,\delta} = C_1^2(4p)^{1+\delta}. \quad (10)$$

Из (8), (9) и (10) выводим

$$V_n^2 \leq \frac{K_{p,\delta}}{(\ln n)^{1+\delta}}, \quad \text{где } K_{p,\delta} = C_{p,\delta} + 1. \quad (11)$$

Если ξ удовлетворяет гипотезе H_2 , то аналогично получим

$$V_n^2 \leq \frac{K'}{(\ln n)^{1+\delta'}}, \quad \text{где } K = 2C_1'^2 + 1. \quad (12)$$

Теперь все готово, чтобы применить принцип концентрации к последовательности $(\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p} - m_n(2p))$. По предложению 2.2

$$\mathbf{P}\left\{\left|\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p} - m_n(2p)\right| > \tau\right\} \leq \mathbf{P}\{\gamma > \tau\}, \quad \text{где } \gamma \sim \mathcal{N}(0, V_n^2).$$

Если ξ таков, что выполнено H_1 , то из (11) следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\left\|b_n^{-1}\xi'_n\right\|_{2p} - m_n(2p)\right\} > \tau\} \leq \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2V_n^2}\right\} \leq \exp\{-\ln n(\ln n)^\delta K_{p,\delta,\tau}\},$$

где $K_{p,\delta,\tau} = \tau^2/(2K_{p,\delta})$. При достаточно больших n , очевидно, $(\ln n)^\delta/K_{p,\delta,\tau} \geq 2$ и, стало быть,

$$\mathbf{P}\left\{\left\|b_n^{-1}\xi'_n\right\|_{2p} - m_n(2p)\right\} > \tau\} \leq \exp\{-2\ln n\} = n^{-2}. \quad (13)$$

Таким образом, сходимость $\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p} - m_n(2p) \rightarrow 0$ п.н., $n \rightarrow \infty$, вытекает из (13) и леммы Бореля–Кантелли. Случай гипотезы H_2 совершенно аналогичен.

ii. Проверка сходимости $Y_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 (b_n^{-1}\xi'_n(t))^{2p} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} a_{2p}$. Так как

$$(\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p})^{2p} = \frac{n^{2p-1}}{b_n^{2p}} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_{n,i}(\xi))^{2p},$$

то мы имеем

$$\mathbf{E}(Y_n) = \mathbf{E}[(\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p})^{2p}] = a_{2p}.$$

Поэтому достаточно показать, что $\mathbf{E}Y_n^2 \rightarrow a_{2p}^2$, $n \rightarrow \infty$. Заметим, что $\mathbf{E}Y_n^2 = \Sigma_1 + \Sigma_2$, где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{n^{4p-2}}{b_n^{4p}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{cov}\{(\Delta_{n,i}(\xi))^{2p}, (\Delta_{n,j}(\xi))^{2p}\}, \\ \Sigma_2 &= \frac{n^{4p-2}}{b_n^{4p}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}(\Delta_{n,i}(\xi))^{2p} \mathbf{E}(\Delta_{n,j}(\xi))^{2p}. \end{aligned}$$

Применяя предложение 2.3 к гауссовскому вектору $(\Delta_{n,i}(\xi), \Delta_{n,j}(\xi))$, получим

$$\text{cov}\{(\Delta_{n,i}(\xi))^{2p}, (\Delta_{n,i}(\xi))^{2p}\} = \sum_{k=1}^{2p} C_{2p,k} [\text{cov}(\Delta_{n,i}(\xi), \Delta_{n,j}(\xi))]^k \sigma_n^{4p-2k}.$$

Лемма 4.5. Для всех целых r и любого $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ имеет место сходимость

$$S_n(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n^{2r-2}}{b_n^{2r}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [\text{cov}(\Delta_{n,i}(\xi), \Delta_{n,j}(\xi))]^k [\sigma_n^2]^{r-k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Доказательство. Так как по определению

$$\text{cov}\{\Delta_{n,i}(\xi), \Delta_{n,j}(\xi)\} = \gamma_{n,|i-j|},$$

то, полагая $s = |i - j|$, найдем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{cov}\{\Delta_{n,i}(\xi), \Delta_{n,j}(\xi)\} = n\gamma_{n,0} + 2 \sum_{s=1}^{n-1} \gamma_{n,s}(n-s).$$

Прежде всего заметим, что

$$S_n(k) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{\text{cov}\{\Delta_{n,i}(\xi), \Delta_{n,j}(\xi)\}}{\sigma_n^2} \right]^k = \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{\gamma_{n,j-i}}{\sigma_n^2} \right]^k.$$

Так как $|\gamma_{n,j-i}/\sigma_n^2| \leq 1$, то для $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ имеем $|\gamma_{n,s}/\sigma_n^2|^k \leq |\gamma_{n,s}/\sigma_n^2|$, и потому

$$|S_n^k| \leq \frac{2}{n^2} \sum_{s=0}^{n-1} \left| \frac{\gamma_{n,s}}{\sigma_n^2} \right| (n-s). \quad (14)$$

С л у ч а й 1. Если выполнено H_1 , то в силу (14) имеем

$$|S_n^k| \leq \frac{2}{n} \sum_{s=0}^{n-1} c_s. \quad (15)$$

Так как $c_s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, мы имеем также $n^{-1} \sum_{s=0}^{n-1} c_s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, что дает $S_n(k) \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$.

С л у ч а й 2. Если выполнено H_2 , то

$$\begin{aligned} |S_n^k| &\leq \frac{2}{n^2} \sum_{s=0}^{s_0-1} \left| \frac{\gamma_{n,s}}{\sigma_n^2} \right| (n-s) + \frac{2}{n^2} \sum_{s=s_0}^{n-1} \left| \frac{\gamma_{n,s}}{\sigma_n^2} \right| (n-s) \\ &\leq \frac{2s_0 n}{n^2} + \frac{2C}{n^2 (\ln n)^{1+\delta'}} (n-s_0)^2 \leq \frac{K}{(\ln n)^{1+\delta'}} \end{aligned}$$

с некоторой константой K . Следовательно, $S_n(k) \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$.

Теперь, применяя лемму 4.5 с $r = 2p$, получим

$$\Sigma_1 = \frac{n^{4p-2}}{b_n^{4p}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{cov}[(\Delta_{n,i}(\xi))^{2p}, (\Delta_{n,j}(\xi))^{2p}] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} a_{2p}. \quad (16)$$

iii. Проверка сходимости $\int_0^1 (b_n^{-1} \xi'_n(t))^{2p} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} a_{2p}$. Эта сходимость следует непосредственно из (16), леммы 4.1 и шага i. Очевидно, (4) вытекает из ii и iii.

iv. Проверка сходимости $\int_0^1 (b_n^{-1} \xi'_n(t))^{2p+1} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$. Функция $f(x) = x^{2p+1}$ не является выпуклой на $\mathbf{R}$, но мы можем написать

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n(t) \right)^{2p+1} dt &= \int_0^1 \left\{ \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n(t) \right)_+^{2p+1} - \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n(t) \right)_-^{2p+1} \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n(t) \right)_+^{2p+1} dt - \int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n(t) \right)_-^{2p+1} dt. \end{aligned}$$

Так как $b_n^{-1}\xi'_n(t) \in L^{2p+1}$, то

$$\left\| \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n \right)_+ \right\|_{2p+1}^{2p+1} < \left\| \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n \right) \right\|_{2p+1}^{2p+1} < \infty.$$

По теореме Хана–Банаха

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n(t) \right)_+^{2p+1} dt \right]^{1/(2p+1)} = \sup_{\Theta \in D_+^*} \Theta \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n \right),$$

где D_+^* — подмножество единичного шара пространства $L^d[0, 1]$ с $d = (2p+1)/(2p)$. Подобный метод можно применить и к $(b_n^{-1}\xi'_n(t))_-$. Аналогично тому, как это делалось ранее для моментов четного порядка, можно оценить дисперсию $V_n^{\pm 2} = \sup_{\Theta \in D_{\pm}^*} \mathbf{D}[\Theta(b_n^{-1}\xi'_n)]$, и мы получим

$$\left\| \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n \right)_{\pm} \right\|_{2p+1} - m_n^{\pm} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0, \quad (17)$$

где $(m_n^{\pm})_n$ — последовательность медиан для $\|b_n^{-1}\xi'_{n\pm}\|_{2p+1}$. Благодаря сходимости моментов четного порядка случайной величины $b_n^{-1}\xi'_n$, мы имеем неравенство $\sup_n \mathbf{E}\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p+2}^2 < \infty$. Поэтому

$$\sup_n \mathbf{E} \left\| \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n \right)_+ \right\|_{2p+1}^2 < \infty.$$

Следовательно, семейство $(\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p+1})_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо, что дает ограниченность последовательности $(\mathbf{E}\|b_n^{-1}\xi'_n\|_{2p+1})_n$. По лемме 4.2 последовательность $m_n^{\pm}$ будет ограничена и тогда из леммы 4.3 и (17) получим

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n(t) \right)_+^{2p+1} dt - (m_n^{\pm})^{2p+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0, \quad (18)$$

откуда следует

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n(t) \right)^{2p+1} dt - \left((m_n^{\pm})^{2p+1} - (m_n^{-})^{2p+1} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0. \quad (19)$$

Положим $Z_n = \int_0^1 (b_n^{-1}\xi'_n(t))^{2p+1} dt$ и покажем, что

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} 0. \quad (20)$$

Имеем

$$\mathbf{E}Z_n^2 = \frac{n^{4p}}{b_n^{4p+2}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{cov} \left\{ (\Delta_{n,i}(\xi))^{2p+1}, (\Delta_{n,j}(\xi))^{2p+1} \right\}.$$

По предложению 2.3

$$\begin{aligned} & \text{cov}\left\{(\Delta_{n,i}(\xi))^{2p+1}, (\Delta_{n,i}(\xi))^{2p+1}\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1,k} \left[\text{cov}\{\Delta_{n,i}(\xi), \Delta_{n,j}(\xi)\} \right]^k \sigma_n^{4p+2-2k}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 4.5 с $r = 2p+1$, находим для любого $k \in \{1, 2, \dots, 2p+1\}$

$$C_{2p+1,k} \frac{n^{4p}}{b_n^{4p+2}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\text{cov}(\Delta_{n,i}(\xi), \Delta_{n,j}(\xi)) \right]^k [\sigma_n^2]^{2p+1-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Мы видели, что $(m_n^+)_n$ и $(m_n^-)_n$ ограничены. Поэтому, используя лемму 4.4, из (19) и (20) получим

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} \xi'_n(t) \right)^{2p+1} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Это дает нам сходимость моментов с нечетными показателями.

v. Проверка сходимости п.н. $E(b_n^{-1} \xi'_n)_{\pm} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\eta)_{\pm}$.

Мы уже установили, что п.н. $E|b_n^{-1} \xi'_n|^{2p} \rightarrow \mathbf{E}|\eta|^{2p}$, $n \rightarrow \infty$ с $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Таким образом, с вероятностью 1 $\sup_n E|b_n^{-1} \xi'_n|^2 < \infty$. Это означает, что п.н. последовательность $\{b_n^{-1} \xi'_n\}_n$ будет равномерно интегрируема на $[0, 1]$. Очевидно, то же самое будет верно и для последовательностей $\{b_n^{-1}(\xi'_n)_+\}_n$ и $\{b_n^{-1}(\xi'_n)_-\}_n$. Так как функции $h(x) = x_{\pm}$ непрерывны, то из (5) мы выводим, что п.н. $(b_n^{-1} \xi'_n)_{\pm} \xrightarrow{[0,1]} (\eta)_{\pm}$. Хорошо известно, что если последовательность случайных величин $(X_n)_n$ равномерно интегрируема и в то же время X_n слабо сходится к некоторому пределу X , то математические ожидания величин X_n сходятся к среднему случайной величины X . Поэтому п.н. $E(b_n^{-1} \xi'_n)_{\pm} \rightarrow \mathbf{E}(\eta)_{\pm}$, $n \rightarrow \infty$.

4.3. Доказательство теоремы 3.2. Ясно, что

$$\begin{aligned} \gamma_{n,k} &= \frac{A((k+1)/n) + A((k-1)/n)}{2} - A\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[A'(t) - A'\left(t - \frac{1}{n}\right) \right] dt. \end{aligned}$$

Если выполняются условия п. 1) теоремы, то найдется постоянная $C > 0$ такая, что

$$|\gamma_{n,k}| \leq \frac{1}{2n} \omega_{A'} \left(\frac{1}{n} \right) \leq \frac{C}{n^{1+\alpha}}.$$

С другой стороны $\sigma_n^2 = A(n^{-1}) \sim A'(0)/n$. Следовательно:

а) если $A'(0) = C' \neq 0$, то $|\gamma_{n,k}/\sigma_n^2| \leq K/n^{\alpha}$, с $K = C/C'$, т.е. выполнима гипотеза H_2 ;

б) если $A'(0) = 0$ и $A'(h) \geq C_1 h^{\beta}$, то $\sigma_n^2 \geq \int_0^{1/n} A'(s) ds \geq C_1/n^{\beta+1}$ для достаточно больших n , и потому $|\gamma_{n,k}/\sigma_n^2| \leq C/(C_1 n^{\alpha-\beta})$, т.е. выполнено H_2 .

Если выполняются условия п. 2), то

$$\gamma_{n,k} = - \int_{k/n}^{(k+1)/n} \int_{t-1/n}^t A''(u) du dt.$$

Отсюда следует $|\gamma_{n,k}| \leq n^{-1} \int_{(k-1)/n}^{(k+1)/n} |A''(u)| du$. Предположение $A''(t) \sim C_2 t^{-(\gamma+1)}$ дает существование постоянной C_γ такой, что

$$\sigma_n^2 = A\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{C_\gamma}{n^{1-\gamma}}. \quad (21)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Рассмотрим два случая

С л у ч а й 1. $1 \leq k \leq n\varepsilon$. В этом случае $k/n \leq \varepsilon$, $A''(t)$ существует и $A''(t) \sim C_2 t^{-(\gamma+1)}$. Следовательно, для некоторой константы M

$$|\gamma_{n,k}| \leq \frac{M}{n} \int_{(k-1)/n}^{(k+1)/n} u^{-\gamma-1} du \leq \frac{2M}{n^2} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{-\gamma-1} \leq \frac{2M}{n^{1-\gamma}} \frac{1}{(k-1)^{\gamma+1}}.$$

Из (21) мы получаем константу B_1 , для которой $|\gamma_{n,k}/\sigma_n^2| \leq B_1/(k-1)^{\gamma+1}$, т.е. выполнено H_1 .

С л у ч а й 2. $n\varepsilon < k \leq n$. Так как $A'(t)$ ограничена на $[\varepsilon, 1]$, то для некоторой постоянной C_ε

$$|\gamma_{n,k}| = \left| \frac{1}{2} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[A'(t) - A'\left(t - \frac{1}{n}\right) \right] dt \right| \leq \frac{C_\varepsilon}{n}.$$

Поэтому в силу (21) мы получаем существование постоянной B_2 , для которой $|\gamma_{n,k}/\sigma_n^2| \leq B_2/n^\gamma$, т.е. выполнено H_1 .

4.4. Доказательство теоремы 3.3. В силу предложения 2.1 нам достаточно установить, что

$$\int_0^1 (Z_\varepsilon(t))_\pm dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 (\Phi^{-1}(t))_\pm dt.$$

Чтобы это доказать, заметим, что благодаря [1] мы уже имеем сходимость п.н. всех моментов нормированных производных $b_\varepsilon^{-1} \xi'_\varepsilon$ к соответствующим моментам стандартной гауссовской величины η и п.н. слабую сходимость распределений этих производных. Поэтому тем же самым путем, что и в доказательстве теоремы 3.1, мы получим п.н. равномерную интегрируемость на $[0, 1]$ семейства $\{b_\varepsilon^{-1} \xi'_\varepsilon\}$, откуда сразу следует $E(b_\varepsilon^{-1} \xi'_\varepsilon)_\pm \rightarrow \mathbf{E}(\eta)_\pm$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.5. Доказательство теоремы 3.4. По определению $\xi_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon * \xi(t)$ и $\overset{\circ}{\xi}_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon * \overset{\circ}{\xi}(t)$. Кроме того, $\psi_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^x \psi'_\varepsilon(s) ds$ и $\psi_\varepsilon(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'_\varepsilon(s) ds = 0$. Легко видеть, что

$$(\overset{\circ}{\xi}_\varepsilon)'(t) = \xi'_\varepsilon(t) - [\xi(1) - \xi(0)]. \quad (22)$$

Непосредственно из определения следует, что если T — оператор монотонной перестановки, f — измеримая функция на $[0, 1]$, а c — константа, то $T(f + c) = Tf + c$. Поэтому из (22) следует, что

$$T(\overset{\circ}{\xi}_\varepsilon)'(t) = T\xi'_\varepsilon(t) - [\xi(1) - \xi(0)],$$

и по определению V мы получаем $V\overset{\circ}{\xi}_\varepsilon(t) = V\xi_\varepsilon(t) - t[\xi(1) - \xi(0)]$. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (b_\varepsilon^{-1} V \overset{\circ}{\xi}_\varepsilon(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (b_\varepsilon^{-1} V \xi_\varepsilon(t)) = L(t) \quad \text{п.н. } \forall t \in [0, 1].$$

5. Заключительные замечания

Оценивание индекса фрактальности. Рассмотрим центрированный гауссовский процесс $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ с $\xi(0) = 0$. Предположим, что ξ имеет стационарные приращения и что для некоторого $\alpha \in]0, 1[$ при всех $t \geq 0$

$$\mathbf{E}|\xi(t+h) - \xi(t)|^2 \sim C|h|^{2\alpha},$$

когда h близко к 0. Хорошо известно, что в этом случае α характеризует гладкость выборочных траекторий. Мы будем называть α *индексом фрактальности* процесса ξ . Оценке α посвящено множество работ, мы сошлемся лишь на [6]–[9] и [12]. Результаты данной статьи позволяют доказать состоятельность двух классов оценок для α .

Оценки первого типа строятся по методу, использованному в [12] для дробного броуновского движения. Этот метод основан на сходимости абсолютных моментов приращений. Наши результаты дают возможность распространить его на гауссовские процессы со стационарными приращениями, для которых выполнено H_1 или H_2 .

Для каждого целого $p > 0$ полагаем

$$S_n(p) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \xi\left(\frac{k+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{k}{n}\right) \right|^p,$$

$$\hat{\alpha}_1(n, p) = -\frac{\ln[\sqrt{\pi} S_n(p) / (2^{p/2} C^p \Gamma((p+1)/2))]}{p \ln n}.$$

Сходимость п.н. моментов (6), доказанная в разделе 3, дает следующий результат.

Следствие 5.1. *Предположим, что процесс ξ удовлетворяет одному из условий H_1 или H_2 . Тогда для любого целого $p > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\alpha}_1(n, p) = \alpha \quad \text{п.н.}$$

Наша теорема 3.1 позволяет предложить новое семейство оценок индекса фрактальности. Их состоятельность основана на сходимости п.н. конвексификаций.

Для каждого t_0 из $]0, 1[$ полагаем

$$\hat{\alpha}_2(n, t_0) = 1 - \frac{\ln |V\xi_n(t_0)/(C^{1/2}L(t_0))|}{\ln n}.$$

Из соотношения (1) мы сразу получаем такое

Следствие 5.2. Для любого $t_0 \in]0, 1[$ имеет место сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\alpha}_2(n, t_0) = \alpha$ п.н.

Мы хотим поблагодарить М. А. Лифшица за внимание к нашей работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Azaïs J.-M., Wschebor M.* Almost sure oscillation of certain random processes. — Bernoulli, 1996, v. 2, № 2, p. 257–270.
2. *Baxter G.* A strong limit theorem for Gaussian processes. — Proc. Amer. Math. Soc., 1956, v. 7, p. 522–527.
3. *Davydov Yu.* Convex rearrangements of stable processes. — J. Math. Sci., 1998, v. 92, № 4, p. 4010–4016.
4. *Davydov Yu., Vershik A. M.* Réarrangements convexes des marches aléatoires. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1998, v. 34, № 1, p. 73–95.
5. *Dasgupta A., Kallianpur G.* Chaos decomposition of multiple fractionals integrals and applications. — Probab. Theory Relat. Fields, 1999, v. 115, № 4, p. 527–548.
6. *Feuerverger A., Hall P., Wood A. T. A.* Estimation of fractal index and fractal dimension of Gaussian process by counting the number of level crossings. — J. Time Ser. Anal., 1994, v. 15, № 6, p. 587–606.
7. *Hall P., Roy R.* On the relationship between fractal dimension and fractal index for stationary stochastic processes. — Ann. Appl. Probab., 1994, v. 4, № 1, p. 241–253.
8. *Istas J., Lang G.* Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of Gaussian process. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1997, v. 33, № 4, p. 407–436.
9. *Kent J. T., Wood A. T. A.* Estimating the fractal dimension of a locally self-similar Gaussian process by using increments. — J. Roy. Statist. Soc. Ser. B., 1997, v. 59, № 3, p. 679–699.
10. *Lifshits M.* Gaussian Random Functions. Dordrecht: Kluwer, 1995, 333 p.
11. *Loeve M.* Probability Theory 1. Princeton: Van Nostrand, 1963, 685 p.
12. *Peltier R.-F., Lévy-Véhel J.* A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion. INRIA Report № 2396. Paris: INRIA, 1994.
13. *Thilly E.* Réarrangements convexes des trajectoires de processus stochastiques. Ph. D. Thesis. Lille: Université de Lille I, 1999.
14. *Жукова Е. Е.* Монотонные и выпуклые перестройки функций и случайные процессы. Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. С.-Петербург: С.-Петербургский ун-т, 1995.

Поступила в редакцию
30.III.1999