Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Салихов, Оптимальные последовательности критериев для различения нескольких полиномиальных схем испытаний, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 2, 270–285

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:31:18

© 2002 г.

САЛИХОВ Н. П.*

**ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КРИТЕРИЕВ
ДЛЯ РАЗЛИЧЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ
СХЕМ ИСПЫТАНИЙ**

Рассматриваются последовательности $\{\omega^n\}$ критериев ω^n для решения задачи выбора истинной полиномиальной схемы испытаний по частотам исходов при n независимых испытаниях, произведенных по одной из m возможных схем с одним и тем же множеством исходов. Пусть $\alpha_s(\omega^n)$ — вероятность не принять истинную s -ю схему, $s = 1, \dots, m$. Изучается поведение величины $\max_{s \in J} \alpha_s(\omega^n)$ при заданном $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ и $n \rightarrow \infty$ для последовательностей $\{\omega^n\}$ из множества N , характеризующегося тем, что вероятности $\alpha_t(\omega^n)$ при $t \in I$, $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, удовлетворяют некоторым условиям, например, $\alpha_t(\omega^n) \leq \alpha_t < 1$ или $\alpha_t(\omega^n) \leq a_t \exp(-nv_t)$ при всех $n \geq n_0$. Указаны последовательности $\{g^n\} \in N$ и явно вычислена величина $M(N, J) \geq 0$ такая, что $\max_{s \in J} \alpha_s(g^n) = \exp(-nM(N, J) + o(n))$ и не существует последовательности $\{\omega^n\} \in N$, для которой $\max_{s \in J} \alpha_s(\omega^n) = \exp(-nM + o(n))$, $M > M(N, J)$. Явно вычислены стремящиеся к 0 при $n \rightarrow \infty$ верхние границы для $\alpha_t(g^n)$, $t = 1, \dots, m$.

Ключевые слова и фразы: полиномиальная схема испытаний, различение нескольких простых гипотез, оптимальные последовательности критериев, расстояние Кульбака–Лейблера, расстояние Чернова.

1. Введение. Задача о различении нескольких простых статистических гипотез является естественным обобщением классической задачи о различении двух простых гипотез. При различении нескольких альтернативных гипотез возникает задача идентификации (см. [14, § 7d]). Важность многоальтернативной задачи отмечалась, например, в монографиях [2, с. 167–168], [12, предисловие]. Одной из первых работ по многоальтернативной задаче является [13]. Задача о различении конечного числа законов распределения была поставлена А. Н. Колмогоровым в 1940 году, а изложенные в [13] результаты получены в 1941–1942 годах. Из ранних работ обзорного характера, в которых имеются постановки основных проблем в многоальтернативной задаче, можно отметить [26], [31, гл. 6]. В [7], [10] (выбор из многомерных нормальных законов), [13],

*ФАПСИ, Б. Кисельный пер., 4, 103031 Москва, Россия.

[23], [25], [40] вводятся различные определения оптимального решающего правила, изучаются свойства и способы его построения.

Важные результаты получены по следующим задачам.

А. Найти оценки для компонент вектора потерь или для некоторых функций от его компонент (см. [1], [5], [9], [21, гл. 4], [22], [41], [42], [46]).

Б. Исследовать поведение компонент вектора потерь или некоторых функций от его компонент с ростом числа испытаний (см. [6], [38], [44], [47]).

Характерной чертой многих ранних работ по этим задачам в многоальтернативном случае является поиск оценок сверху для среднего байесовского риска с помощью некоторых выражений типа энтропии Шеннона, а затем исследование поведения этих оценок. В [16] для задачи Б исследовано поведение компонент вектора потерь в простейшем случае, когда вектор потерь совпадает с вектором вероятностей ошибок. В случае двух альтернатив такой подход применялся в [11, гл. 4, § 3], [14, § 7а.3], [19], [21, гл. 4, § 4.4], [24], [27]–[30], [35], [37], [45].

В настоящей статье изучается поведение вероятностей ошибок критериев, применяемых для решения следующей задачи идентификации: по реализации конечной последовательности независимых полиномиальных испытаний определить, какому из заданных полиномиальных распределений она соответствует.

Пусть гипотеза H_t , $t \in \{1, \dots, m\}$, $m \geq 2$, состоит в том, что последовательность $b_1, b_2, \dots$ является последовательностью независимых испытаний по полиномиальной схеме с исходами $1, \dots, r$ ($r \geq 2$), вероятности появления которых при каждом испытании равны соответственно $p_{t,1}, \dots, p_{t,r}$. Предполагается, что $\mathbf{p}_t = (p_{t,1}, \dots, p_{t,r}) \in \Omega_+$ для $t = 1, \dots, m$, где $\Omega_+ = \Omega_+(r) = \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r): u_1 > 0, \dots, u_r > 0, u_1 + \dots + u_r = 1\}$, и что все векторы $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$ различны. Наблюдения $b_1, \dots, b_n$, $n \geq 1$, будем характеризовать точкой $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) = (x_1/n, \dots, x_r/n)$, где x_k — число появлений исхода $k \in \{1, \dots, r\}$ среди $b_1, \dots, b_n$. Пусть Ω_n — пространство значений вектора $\mathbf{x}$, $|\Omega_n| = C_{n+r-1}^{r-1}$, соответствующих n наблюдениям. Здесь и далее $|A|$ — мощность множества A , $\text{Ind}(A)$ — индикатор события A . Гипотеза H_t определяет на Ω_n вероятностную меру

$$\mathbf{P}_n(\mathbf{x}, \mathbf{p}_t) = \frac{n!}{x_1! \dots x_r!} p_{t,1}^{x_1} \dots p_{t,r}^{x_r}.$$

Для любых $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r) \in \Omega_+$ и множества $\omega \subseteq \Omega$, где

$$\Omega = \Omega(r) = \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r): u_1 \geq 0, \dots, u_r \geq 0, u_1 + \dots + u_r = 1\},$$

положим $\mathbf{P}_n(\omega, \mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{x} \in \omega \cap \Omega_n} \mathbf{P}_n(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, если $\omega \cap \Omega_n \neq \emptyset$, и $\mathbf{P}_n(\omega, \mathbf{p}) = 0$, если $\omega \cap \Omega_n = \emptyset$. В дальнейшем для оценок вероятностей ошибок критериев важную роль будут играть оценки вероятностей $\mathbf{P}(\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c), \mathbf{p})$,

где

$$\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c) = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r): \mathbf{u} \in \Omega, \sum_{k=1}^r u_k \ln \frac{a_k}{b_k} \geq c \right\},$$

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \Omega_+, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r) \in \Omega_+, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Для любых $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r) \in \Omega_+$ и $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r) \in \Omega$ пусть $I(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^r u_k \ln(u_k/p_k)$ — расстояние Кульбака–Лейблера от $\mathbf{u}$ до $\mathbf{p}$. Известно, что $I(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \geq 0$ и что равенство имеет место только при $\mathbf{u} = \mathbf{p}$ (см., например, [11, гл. 2, § 3]).

Пусть A_n^0 — множество всех разбиений $\omega^n = (\omega_0^n, \omega_1^n, \dots, \omega_m^n)$ множества Ω_n на $m+1$ попарно не пересекающихся множеств ω_t^n (некоторые ω_t^n могут быть пустыми) и

$$A^0 = \{(\omega^1, \omega^2, \dots): \omega^n \in A_n^0 \text{ для } n \geq 1\}.$$

Каждое разбиение ω^n определяет критерий различения альтернативных гипотез $H_1, \dots, H_m$, основанный на испытаниях $b_1, \dots, b_m$: если точка $\mathbf{x}$, характеризующая испытания $b_1, \dots, b_m$, принадлежит ω_t^n , то при $t \in \{1, \dots, m\}$ принимается гипотеза H_t , а при $t = 0$ не принимается ни одна из гипотез. При $s \in \{1, \dots, m\}$ величина

$$\alpha_s(\omega^n) = 1 - \mathbf{P}_n(\omega_s^n, \mathbf{p}_s) = \sum_{t \in \{0, 1, \dots, m\} \setminus \{s\}} \mathbf{P}_n(\omega_t^n, \mathbf{p}_s) \quad (1)$$

является вероятностью ошибки s -го рода (т.е. вероятностью не принять истинную гипотезу H_s) при применении разбиения (критерия) ω^n .

Для любой последовательности критериев $\{\omega^n\} = (\omega^1, \omega^2, \dots) \in A^0$ рассмотрим поведение при $n \rightarrow \infty$ величины $\max_{s \in J} \alpha_s(\omega^n)$, где $J \subseteq \{1, \dots, m\}$, $J \neq \emptyset$.

О п р е д е л е н и е 1. J -мерой асимптотической эффективности для последовательности $\{\omega^n\} \in A^0$ назовем величину $M(\{\omega^n\}, J) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} T(\omega^n, J)$, где $T(\omega^n, J) = -\infty$, если $\max_{s \in J} \alpha_s(\omega^n) = 0$, и $T(\omega^n, J) = n^{-1} \ln \max_{s \in J} \alpha_s(\omega^n)$, если $\max_{s \in J} \alpha_s(\omega^n) > 0$.

Величина $T(\omega^n, J) = -\infty$ только в тех случаях, когда $J = \{t\}$ при некотором $t \in \{1, \dots, m\}$, $\omega_t^n = \Omega_n$. Для случая $m = 2$, $|J| = 1$ величина $M(\{\omega^n\}, J)$ рассматривалась в [37], [45].

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $N \subseteq A^0$. Назовем последовательность $\{g^n\} \in N$ J -оптимальной последовательностью (для) множества N , если

$$M(\{g^n\}, J) = -\lim_{n \rightarrow \infty} T(g^n, J) = M(N, J) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\{\omega^n\} \in N} M(\{\omega^n\}, J).$$

Укажем простые свойства J -оптимальных последовательностей.

С в о й с т в о 1. Если последовательность $\{g^n\}$ является J -оптимальной для N , $\{\omega^n\} \in N$, $M(\{\omega^n\}, J) < M(N, J)$, то справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{s \in J} \alpha_s(g^n) / \max_{s \in J} \alpha_s(\omega^n) = 0$.

С в о й с т в о 2. Если $N \subseteq N^0 \subseteq A^0$, последовательность $\{g^n\} \in N$ и J -оптимальна для N^0 , то она J -оптимальна и для N .

С в о й с т в о 3. Если последовательность $\{g^n\} \in N$ и число b таковы, что

$$M(N, J) \leq b \leq -\limsup_{n \rightarrow \infty} T(g^n, J), \quad (2)$$

то $\{g^n\}$ является J -оптимальной для N и $M(N, J) = b$.

Нашей целью будет вычисление величин $M(N, J)$, построение J -оптимальных последовательностей $\{g^n\}$ для $N = A^0$ и для

$$N = P = \left\{ \{\omega^n\} \in A^0: \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln(1 - \alpha_t(\omega_t^n)) = 0 \text{ для } t \in I \right\},$$

$$N = P_* = \left\{ \{\omega^n\} \in A^0: \alpha_t(\omega_t^n) \leq \alpha_t, \alpha_t \in (0, 1) \text{ для } t \in I, n \geq n_0 \right\},$$

$$N = P_1 = \left\{ \{\omega^n\} \in A^0: \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_t(\omega_t^n) = 0 \text{ для } t \in I \right\},$$

$$N = P_0 = \left\{ \{\omega^n\} \in A^0: \alpha_t(\omega^n) \leq a_t \exp(-nv_t), a_t > 0, v_t > 0, \right.$$

$$\left. \text{для } t \in I, n \geq 1 \right\},$$

где $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, $I \neq \emptyset$ (зависимость от параметров $I, \alpha_t, n_0, a_t, v_t$ в явном виде в обозначениях P, P_*, P_1, P_0 не указываем).

Последовательности из P_* естественно рассматривать, когда гипотезы H_t при $t \in I = \{1, \dots, m\} \setminus J$ появляются редко (пусть сумма априорных вероятностей этих гипотез не более малого числа ε).

Действительно, в этом случае средний байесовский риск (при простейшем виде убытка от ложной идентификации, см. [14, § 7d]) оценивается сверху величиной $(1 - \varepsilon) \max_{s \in J} \alpha_s(\omega^n) + \varepsilon \max_{t \in I} \alpha_t$, и естественно использовать такую последовательность $\{\omega^n\} \in P_*$, для которой величина $\max_{s \in J} \alpha_s(\omega^n)$ убывает при $n \rightarrow \infty$ с максимально большой скоростью $M(P_*, J)$.

В [18], [33], [39] величина $M(N, J)$ была вычислена лишь для случая $J = \{1, \dots, m\}$, $N = A^0$. Основные результаты о множествах P, P_1 были опубликованы без доказательств в [16]. В теоремах 3, 4 (п. 3) найдены новые по сравнению с [16] J -оптимальные последовательности для P, P_1 . В теоремах 3, 5 содержатся новые результаты о множестве P_0 , обобщающие на случай $m > 2$ результаты из [24], [29]. Кроме того, здесь получены явные и стремящиеся к 0 при $n \rightarrow \infty$ верхние оценки вероятностей ошибок s -го рода, возникающих при применении критериев из J -оптимальных последовательностей. Все эти критерии являются байесовскими. Они строятся на основе доказанного в 1939 году в [48]

обобщения на случай многих альтернатив известной (1933 года) леммы Неймана–Пирсона (см. также [14, § 7а], [31, гл. 6], [36]).

При любом $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Omega(m)$ определим (см. [14, § 7d.3]) λ -байесовский (байесовский) критерий $\omega^n(\lambda) = (\omega_0^n(\lambda), \omega_1^n(\lambda), \dots, \omega_m^n(\lambda))$, в котором каждая точка $\underline{x} \in \Omega_n$ включается в одно из множеств $\omega_t^n(\lambda)$, $t \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda_t > 0$, если

$$\lambda_t \mathbf{P}_n(\underline{x}, \mathbf{p}_t) = \max_{1 \leq i \leq m} \lambda_i \mathbf{P}_n(\underline{x}, \mathbf{p}_i) \quad (3)$$

(при этом $\omega_0^n(\lambda) = \emptyset$, $\omega_t^n(\lambda) = \emptyset$, если $\lambda_t = 0$).

Из (3) следует, что при $t, s \in \{1, \dots, m\}$, $t \neq s$, $\lambda_t > 0$, $\lambda_s > 0$

$$\omega_t^n(\lambda) \subseteq \omega\left(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s, n^{-1} \ln \frac{\lambda_s}{\lambda_t}\right). \quad (4)$$

2. Оценки вероятностей $\mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c), \mathbf{p})$. Приведем необходимые для оценивания сверху вероятностей ошибок s -го рода (и в основном известные) верхние оценки определенных в п. 1 вероятностей $\mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c), \mathbf{p})$ при $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Для этого введем величины

$$E_t = E_t(\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^r p_k \left(\ln \frac{a_k}{b_k} \right)^t, \quad t = 1, 2,$$

$$\theta_1 = \theta_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq k \leq r} \ln \frac{a_k}{b_k}, \quad \theta_2 = \theta_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max_{1 \leq k \leq r} \ln \frac{a_k}{b_k}$$

и функции

$$\gamma(c, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) = \min_{\mathbf{u} \in \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c)} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}), \quad c \in [E_1, \theta_2],$$

$$\gamma(c) = \gamma(c, \mathbf{a}, \mathbf{p}) = \gamma(c, \mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{p}), \quad c \in [-I(\mathbf{p}, \mathbf{a}), \theta_2(\mathbf{a}, \mathbf{p})],$$

$$V(d) = V(d, \mathbf{a}, \mathbf{p}) = \min_{\mathbf{u} \in \Omega: I(\mathbf{u}, \mathbf{a}) \leq d} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}), \quad d \geq 0$$

($V(d) = 0$ при $d \geq I(\mathbf{p}, \mathbf{a})$).

Лемма 1. Если $Y_1, \dots, Y_n$ — независимые случайные величины, $\mathbf{E}Y_k = 0$, $Y_k \leq b$ для $k = 1, \dots, n$, $d = n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{D}Y_k$, $0 < \varepsilon \leq b$, то

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^n Y_k \geq n\varepsilon \right\} < \exp \left(- \frac{n\varepsilon^2}{2(d + b\varepsilon)} \right) \leq \exp \left(- \frac{n\varepsilon^2}{2(d + b^2)} \right).$$

Доказательство. При любом $\varepsilon > 0$ верно неравенство Беннета [34]

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^n Y_k \geq n\varepsilon \right\} \leq \exp \left(- \frac{nd}{b^2} f(y) \right),$$

где $y = b\varepsilon/d$, $f(y) = (1+y) \ln(1+y) - y$. По формуле Тейлора для любого $y > 0$ при некотором $\delta \in (0, 1)$

$$f(y) = \frac{f''(\delta y)}{2} = \frac{y^2}{2(1+\delta y)} > \frac{y^2}{2(1+y)}.$$

Отсюда и из неравенства Беннета получим утверждение леммы.

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения.*

А. Если $c \in [E_1, \theta_2]$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c), \mathbf{p}) &\leq \exp(-n\gamma(c, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c), \mathbf{p}) &= -\gamma(c, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\gamma(c, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) > 0 \quad \text{при } c \in (E_1, \theta_2], \quad (6)$$

$$\gamma(E_1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) = 0, \quad \gamma(\theta_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) = -\ln \left(\sum_{k=1}^r p_k \operatorname{Ind} \left(\ln \frac{a_k}{b_k} = \theta_2 \right) \right).$$

В.

$$\mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, E_1 + \varepsilon), \mathbf{p}) \leq \exp(-n\varepsilon^2 h(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})), \quad (7)$$

где либо $\varepsilon > 0$,

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) = h_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) = \max \left(\frac{1}{2(E_2 - 2\theta_2 E_1 + \theta_2^2)}, \frac{2}{(\theta_2 - \theta_1)^2} \right),$$

либо

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{e^{2\tau} - 1 - 2\tau}{\tau} \cdot \frac{E_2 - E_1^2}{\max(\theta_2 - E_1, E_1 - \theta_1)} \right), \quad \tau > 0,$$

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) = h_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) = \max \left(h_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}), \frac{\tau^2}{e^{2\tau} - 1 - 2\tau} \cdot \frac{1}{E_2 - E_1^2} \right).$$

С. Если $c \in [-I(\mathbf{p}, \mathbf{a}), I(\mathbf{a}, \mathbf{p})]$, то верны равенство

$$\gamma(c, \mathbf{a}, \mathbf{p}) = \gamma(-c, \mathbf{p}, \mathbf{a}) + c \quad (8)$$

и неравенства

$$\gamma(c, \mathbf{a}, \mathbf{p}) \leq I(\mathbf{a}, \mathbf{p}), \quad (9)$$

$$\gamma(-c, \mathbf{p}, \mathbf{a}) \leq I(\mathbf{p}, \mathbf{a}); \quad (10)$$

равенство в (9) и (10) достигается только при $c = I(\mathbf{a}, \mathbf{p})$ и $c = -I(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ соответственно.

Если $c \in [-I(\mathbf{p}, \mathbf{a}), \theta_2(\mathbf{a}, \mathbf{p})] \setminus \{I(\mathbf{a}, \mathbf{p})\}$, то

$$\gamma(c, \mathbf{a}, \mathbf{p}) > c. \quad (11)$$

D. Если $c \in [-I(\mathbf{p}, \mathbf{a}), I(\mathbf{a}, \mathbf{p})]$, то

$$\gamma(c) = V(\gamma(c) - c, \mathbf{a}, \mathbf{p}). \quad (12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c), \mathbf{p}) = \mathbf{P}\{X_1 + \dots + X_n \geq nc\}, \quad (13)$$

где случайные величины $X_1, X_2, \dots$ независимы и распределены так же, как случайная величина X , которая принимает значение $\ln(a_k/b_k)$ с вероятностью p_k , $k = 1, \dots, r$ (см. [20, § 8.3]). Применяя критерий оптимальности в задаче выпуклого программирования (см., например, [8, теорема 3.5.4]), можно при любом $c \in [E_1, \theta_2)$ вывести формулы

$$\gamma(c, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) = \sigma\mu'(\sigma) - \mu(\sigma) = \max_{x \in \mathbf{R}} (cx - \mu(x)) = \max_{x \geq 0} (cx - \mu(x)), \quad (14)$$

где $\mu(x) = \mu(x, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) = \ln \sum_{k=1}^r p_k (a_k/b_k)^x$,

$$\mu'(x) = \sum_{k=1}^r z_k(x) \ln \frac{a_k}{b_k}, \quad \mu''(x) = \sum_{k=1}^r z_k(x) \left(\mu'(x) - \ln \frac{a_k}{b_k} \right)^2,$$

$z_k(x) = p_k (a_k/b_k)^x \exp(-\mu(x))$ для $k = 1, \dots, r$, $x \in \mathbf{R}$, $\sigma = \sigma(c) = \sigma(c, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})$ — единственный неотрицательный корень уравнения $\mu'(x) = c$; $\mu'(0) = E_1$, $\sigma(E_1) = 0$. При этом точка $(z_1(\sigma), \dots, z_r(\sigma))$ является граничной точкой множества $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c)$ и единственной точкой минимума функции $I(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ на нем.

A. Неравенство (5) доказано (для величин X_i общего вида) в [27, теорема 1], равенство (5) следует из [35, теорема 6.1, лемма A.2] (см. также [20, § 8.3, 8.5] или — для величин X_i общего вида — [3, гл. 8, § 8], [4, гл. 1, § 1.7]). Утверждения (5) верны также при замене в них $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c)$ любым замкнутым выпуклым множеством $\omega \in \Omega$ (см. [18, леммы 1–3, теорема 2]). Утверждение (6) следует из свойства расстояния Кульбака–Лейблера.

B. Оценка (7) с $h(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) = h_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})$ следует из (13), леммы 1 и неравенства Хефдинга [34]. Для доказательства оценки (7) с $h(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}) = h_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})$ достаточно применить лемму 1 из [15].

C. Равенство (8) можно доказать с помощью (14) и тождества $\mu(x, \mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) \equiv \mu(1 - x, \mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{p})$.

Положим $\mu(x) = \mu(x, \mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{p})$, $\sigma = \sigma(c, \mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{p})$. Записав (14) в виде $\gamma(\mu'(\sigma)) = \sigma\mu'(\sigma) - \mu(\sigma)$ и дифференцируя это равенство, найдем: $\gamma'(\mu'(\sigma)) = \sigma$, $\gamma''(\mu'(\sigma))\mu''(\sigma) = 1$, $\gamma''(c) = 1/\mu''(\sigma) > 0$. Отсюда и из

равенств $\gamma'(-I(\mathbf{p}, \mathbf{a})) = 0$, $\gamma(I(\mathbf{a}, \mathbf{p})) = I(\mathbf{a}, \mathbf{p})$ (которые следуют из (14) и равенств $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = -I(\mathbf{p}, \mathbf{a})$, $\mu(1) = 0$, $\mu'(1) = I(\mathbf{a}, \mathbf{p})$) получим (9). Неравенство (10) — простое следствие (9).

Докажем неравенство (11). Пусть $\omega = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{p}, c)$. Тогда

$$\gamma(c) = \min_{\mathbf{u} \in \omega} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \min_{\mathbf{u} \in \omega} \left(I(\mathbf{u}, \mathbf{a}) + \sum_{k=1}^r u_k \ln \frac{a_k}{p_k} \right) \geq \min_{\mathbf{u} \in \omega} \sum_{k=1}^r u_k \ln \frac{a_k}{b_k} \geq c,$$

где оба неравенства превращаются в равенства только при $c = I(\mathbf{a}, \mathbf{p})$ (по свойству расстояния Кульбака–Лейблера).

Д. Из свойства расстояния Кульбака–Лейблера следуют равенства: $V(0) = I(\mathbf{a}, \mathbf{p})$, $V(I(\mathbf{p}, \mathbf{a})) = 0$. Отсюда и из следующих из (8), (9) равенств $\gamma(-I(\mathbf{p}, \mathbf{a})) = 0$, $\gamma(I(\mathbf{a}, \mathbf{p})) = I(\mathbf{a}, \mathbf{p})$ делаем вывод: D верно для крайних значений c . Пусть $c \in (-I(\mathbf{p}, \mathbf{a}), I(\mathbf{a}, \mathbf{p}))$, $x = \gamma(c) - c$. Из (11), (8), (10) следует, что $x \in (0, I(\mathbf{p}, \mathbf{a}))$. Известно (см. [24, теоремы 4, 7], [35, теорема 5.1]), что $V(d) = d + \mu'(1 - s)$ при $d \in (0, I(\mathbf{p}, \mathbf{a}))$, где s — единственный на $(0, 1)$ корень уравнения $-s\mu'(1 - s) - \mu(1 - s) = d$. (Это можно доказать, применяя критерий оптимальности в задаче выпуклого программирования.) Из (14) следует, что при $d = x$ величина $s = 1 - \sigma$, где $\sigma = \sigma(c, \mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{p})$, $\mu'(\sigma) = c$. Следовательно, $V(x) = x + \mu'(\sigma) = \gamma(c)$.

З а м е ч а н и е 1. При $n \geq n^*$, $c \in [E_1, \theta_2)$ оценку в (5) можно уточнить: $P_n(\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c), \mathbf{p}) \leq Gn^{-1/2} \exp(-n\gamma(c, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}))$ (доказательство с указанием явного вида констант n^* , G имеется в [17]).

При $\mathbf{b} = \mathbf{p}$, $c = 0$ из (14) следует, что величина

$$\gamma(0, \mathbf{a}, \mathbf{p}) = -\ln \sum_{k=1}^r p_k \left(\frac{a_k}{p_k} \right)^\sigma = -\ln \min_{0 \leq x \leq 1} \sum_{k=1}^r p_k \left(\frac{a_k}{p_k} \right)^x,$$

где $\sigma = \sigma(0, \mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{p})$ — единственный на $(0, 1)$ корень уравнения $\sum_{k=1}^r p_k (a_k/p_k)^x \ln(a_k/p_k) = 0$, совпадает с расстоянием Чернова [27] $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{p}$. Дифференцируя тождество (12) и учитывая знаки производных функции $\gamma(c) - c$, найдем: $V'(d) < 0$, $V''(d) > 0$ для $d \in (0, I(\mathbf{p}, \mathbf{a}))$. Выпуклость функции $V(d)$ на $[0, I(\mathbf{p}, \mathbf{a})]$ доказана в [24].

3. Построение J -оптимальных последовательностей критериев.

Теорема 1. Последовательность байесовских критериев $\{\omega^n(\mu)\}$, где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\mu_t = |J|^{-1}$ для $t \in J$, $\mu_t = 0$ для $t \in \{1, \dots, m\} \setminus J$, J -оптимальна для каждого из множеств $N = A^0$, P_1, P при $I \neq \emptyset$, $I \subseteq J$ с $M(N, J) = \infty$, если $|J| = 1$, и с

$$M(N, J) = M_J = \min_{i, j \in J, i < j} \rho(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j), \quad \text{если } |J| > 1.$$

Доказательство. Утверждение теоремы имеется в [16] и является простым следствием утверждений из [18, замечание 8] (или из [33, теоремы 3.1, 3.2], [39]).

Замечание 2. Из (1), (4) при $|J| > 1$ следуют оценки

$$\alpha_s(\omega^n(\mu)) \leq \sum_{t \in J \setminus \{s\}} \mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s, 0), \mathbf{p}_s) \quad \text{для } s \in J.$$

Далее можно использовать оценки из п. 2.

Теорема 2. Если $I \setminus J \neq \emptyset$, то

$$M(P, J) \leq M_{IJ} = \begin{cases} \delta(I, J), & \text{если } |J| = 1, \\ \min(\delta(I, J), M_J), & \text{если } |J| > 1, \end{cases}$$

где $\delta(I, J) = \min_{t \in I \setminus J} \min_{s \in J} I(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$.

Доказательство. Пусть $\{\omega^n\} \in P$. С учетом теоремы 1 достаточно доказать, что $M(\{\omega^n\}, J) \leq \delta(I, J)$. Для всех достаточно больших n величина $1 - \alpha_t(\omega^n) > 0$ при всех $t \in I$. Следовательно, $\omega_t^n \neq \emptyset$ при всех $t \in I$ и $\omega_s^n \subset \Omega_n$ при всех $s \in J$ для всех достаточно больших n .

Используя оценки (см. [35, теорема 2.1], [20, § 8.4], [18, с. 298])

$$C_r n^{-(r-1)/2} \leq \mathbf{P}_n(\omega, \mathbf{p}) \exp\left(n \min_{\mathbf{u} \in \omega \cap \Omega_n} I(\mathbf{u}, \mathbf{p})\right) \leq C_{n+r-1}^{r-1},$$

где $\omega \subseteq \Omega$, $\omega \cap \Omega_n \neq \emptyset$, C_r — известная положительная константа, получим равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{-1} \ln(1 - \alpha_t(\omega^n)) + \min_{\mathbf{u} \in \omega_t^n} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}_t) \right) = 0, \quad t \in I, \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{-1} \ln \alpha_s(\omega^n) + \min_{\mathbf{u} \in \Omega_n \setminus \omega_s^n} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}_s) \right) = 0, \quad s \in J. \quad (16)$$

Из (15) и из равенств $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln(1 - \alpha_t(\omega^n)) = 0$ при $t \in I$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\mathbf{u} \in \omega_t^n} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}_t) = 0 \quad \text{для всех } t \in I. \quad (17)$$

Пусть $\min_{\mathbf{u} \in \omega_t^n} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}_t) = I(\mathbf{u}_t^n, \mathbf{p}_t)$ при некотором $\mathbf{u}_t^n \in \omega_t^n$ для всех достаточно больших n . Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_t^n = \mathbf{p}_t. \quad (18)$$

Если (18) не выполняется, то существуют $\varepsilon > 0$ и стремящаяся к ∞ последовательность $n_1, n_2, \dots$ натуральных чисел такие, что $\|\mathbf{u}_t^{n_i} - \mathbf{p}_t\| \geq \varepsilon$ для $n = n_1, n_2, \dots$ ($\|\cdot\|$ — евклидова норма). Тогда в силу свойства расстояния Кульбака–Лейблера $\min_{\mathbf{u} \in \omega_t^{n_i}} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}_t) = I(\mathbf{u}_t^{n_i}, \mathbf{p}_t) \geq$

$\min_{\mathbf{u} \in \Omega, \|\mathbf{u} - \mathbf{p}_t\| \geq \varepsilon} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}_t) > 0$ для $n = n_1, n_2, \dots$, что противоречит равенству (17).

При любом $s \in J$ из (16) следует, что для всех достаточно больших n величина

$$\begin{aligned} n^{-1} \ln \alpha_s(\omega^n) &= \varepsilon_{s,n} - \min_{\mathbf{u} \in \Omega_n \setminus \omega_s^n} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}_s) = \varepsilon_{s,n} - \min_{t \in \{0, 1, \dots, m\} \setminus s} \min_{\mathbf{u} \in \omega_t^n} I(\mathbf{u}, \mathbf{p}_s) \\ &\geq \varepsilon_{s,n} - \min_{t \in I \setminus J} I(\mathbf{u}_t^n, \mathbf{p}_s), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{s,n} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть $s(n) \in J$ и $\min_{t \in I \setminus J} I(\mathbf{u}_t^n, \mathbf{p}_{s(n)}) = \min_{s \in J} \min_{t \in I \setminus J} I(\mathbf{u}_t^n, \mathbf{p}_s)$. Тогда

$$T(\omega^n, J) \geq n^{-1} \ln \alpha_{s(n)}(\omega^n) \geq \varepsilon_{s(n),n} - \min_{s \in J} \min_{t \in I \setminus J} I(\mathbf{u}_t^n, \mathbf{p}_s).$$

Отсюда и из (18), (19) следует, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T(\omega^n, J) \geq - \min_{s \in J} \min_{t \in I \setminus J} I(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) = -\delta(I, J), \quad M(\{\omega^n\}, J) \leq \delta(I, J).$$

З а м е ч а н и е 3. Примеры показывают, что при $|J| > 1$ возможны оба случая: $M_J < \delta(I, J)$, $M_J \geq \delta(I, J)$. Величина, аналогичная величине $\delta(I, J)$, характеризует в [43, теорема 1] некоторую оптимальную последовательность критериев для различения двух сложных гипотез общего вида.

Лемма 3. Пусть $I \setminus J \neq \emptyset$, $K = I \cup J$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — сходящаяся к 0 последовательность неотрицательных чисел. Тогда последовательность байесовских критериев $\{\omega^n(\lambda_n)\}$, где

$$\begin{aligned} \lambda_n &= (\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{m,n}), \quad \lambda_{t,n} = \Lambda_n \quad \text{для } t \in I \setminus J, \\ \lambda_{t,n} &= \Lambda_n \exp(n(M_{IJ} - \varepsilon_n)) \quad \text{для } t \in J, \\ \lambda_{t,n} &= 0 \quad \text{для } t \in \{1, \dots, m\} \setminus K, \\ \Lambda_n^{-1} &= |I \setminus J| + |J| \exp(n(M_{IJ} - \varepsilon_n)) \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} \alpha_s(\omega^n(\lambda_n)) &\leq \sum_{t \in J \setminus \{s\}} \mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s, 0), \mathbf{p}_s) \\ &\quad + \sum_{t \in I \setminus J} \mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s, M_{IJ} - \varepsilon_n), \mathbf{p}_s) \end{aligned} \quad (20)$$

(при $|J| = 1$ первая сумма равна 0), если $s \in J$;

$$\begin{aligned} \alpha_t(\omega^n(\lambda_n)) &\leq \sum_{s \in J} \mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t, \varepsilon_n - M_{IJ}), \mathbf{p}_t) \\ &\quad + \sum_{s \in (I \setminus \{t\}) \setminus J} \mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t, 0), \mathbf{p}_t) \end{aligned} \quad (21)$$

(при $|I \setminus J| = 1$ вторая сумма равна 0), если $t \in I \setminus J$;

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} T(\omega^n(\lambda_n), J) \leq -M_{IJ}. \quad (22)$$

Доказательство. Оценки (20), (21) следуют из (1), (4). При $s \in J$, используя оценки (5), (11) и учитывая неравенства $0 < M_{IJ} < \theta_2(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$ при любых $t \in I \setminus J$, $s \in J$, получим из (20) неравенства

$$\begin{aligned} \alpha_s(\omega^n(\lambda_n)) &\leq \sum_{t \in J \setminus \{s\}} \exp(-n\rho(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)) + \sum_{t \in I \setminus J} \exp(-n(M_{IJ} - \varepsilon_n)) \\ &\leq (|J| - 1) \exp(-nM_J) + |I \setminus J| \exp(-n(M_{IJ} - \varepsilon_n)) \\ &\leq (|K| - 1) \exp(-n(M_{IJ} - \varepsilon_n)). \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда следует (22).

Теорема 3. В условиях леммы 3 последовательность $\{\omega^n(\lambda_n)\}$ является J -оптимальной (с $M(N, J) = M_{IJ}$) для множеств $N = P, P_1$ при дополнительном условии $\lim_{n \rightarrow \infty} n\varepsilon_n^2 = \infty$, а при дополнительном условии $|J| > 1$, $M_J < \delta(I, J)$, $\varepsilon_n = 0$ для $n \geq 1$ — и для множеств $N = P, P_1$,

$$P_0 = \left\{ \{\omega^n\} \in A^0: \alpha_t(\omega^n) \leq (|K| - 1) \exp(-nv_t) \text{ для } t \in I, n \geq 1 \right\},$$

где

$$v_t = \min \left(\min_{s \in J} \gamma(-M_J, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t), \min_{i \in (I \setminus \{t\}) \setminus J} \rho(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_t) \right) > 0,$$

если $t \in I \setminus J$ и $|I \setminus J| > 1$,

$$v_t = \min_{s \in J} \gamma(-M_J, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t) > 0, \quad \text{если } I \setminus J = \{t\},$$

$$v_s = \min \left(\min_{t \in J \setminus \{s\}} \rho(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s), \min_{t \in I \setminus J} \gamma(M_J, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) \right) \geq M_J, \quad \text{если } s \in J.$$

Доказательство. При $|I \setminus J| > 1$ оценка (5) влечет неравенство

$$\mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t, 0), \mathbf{p}_t) \leq \exp(-n\rho(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)) \quad (24)$$

для $s, t \in I \setminus J$, $s \neq t$. Если $I(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) > M_{IJ}$ при некоторых $t \in I \setminus J$, $s \in J$, то, применяя оценку (5), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t, \varepsilon_n - M_{IJ}), \mathbf{p}_t) &\leq \mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t, \varepsilon_n - M_{IJ}), \mathbf{p}_t) \\ &\leq \exp(-n\gamma(-M_{IJ}, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)). \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть $J_t = \{s: s \in J, I(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) = M_{IJ}\}$ для $t \in I \setminus J$. Если $M_J \geq \delta(I, J)$, $t \in I \setminus J$, $s \in J_t$, то оценка (7) дает неравенство

$$\mathbf{P}_n(\omega(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t, \varepsilon_n - M_{IJ}), \mathbf{p}_t) \leq \exp(-n\varepsilon_n^2 h(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_t)). \quad (26)$$

При любом $t \in I \setminus J$ с помощью (21), (24)–(26) имеем оценку

$$\begin{aligned} \alpha_t(\omega^n(\lambda_n)) &\leq \sum_{s \in (I \setminus \{t\}) \setminus J} \exp(-n\rho(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)) \\ &+ \sum_{s \in J \setminus J_t} \exp(-n\gamma(-M_{IJ}, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)) \\ &+ \sum_{s \in J_t} \exp(-n\varepsilon_n^2 h(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_t)). \end{aligned} \quad (27)$$

Из оценок (23), (27) следует, что $\{\omega^n(\lambda_n)\} \in P_1$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} n\varepsilon_n^2 = \infty$. Пусть $M_J < \delta(I, J)$ и все $\varepsilon_n = 0$. Тогда $J_t = \emptyset$ при всех $t \in I \setminus J$; учитывая это и (5), (11), (20), (27), убеждаемся в справедливости включения $\{\omega^n(\lambda_n)\} \in P_0$. Отсюда, из теоремы 2 и из (22) следует, что при $N = P$, $b = M_{IJ}$, $g^n = \omega^n(\lambda_n)$ верно (2). Итак, последовательность $\{\omega^n(\lambda_n)\}$ является J -оптимальной для P . Учитывая свойство 2 J -оптимальных последовательностей, делаем вывод: $\{\omega^n(\lambda_1)\}$ J -оптимальна для P_0, P_1 при выполнении соответствующих дополнительных условий.

Теорема 4. В условиях леммы 3 последовательность $\{\omega^n(\lambda_n)\}$ является J -оптимальной (с $M(N, J) = M_{IJ}$) для множества $N = P$, если $M_{IJ} = \delta(I, J)$ и последовательность $\{\varepsilon_n\}$ удовлетворяет дополнительному условию $\lim_{n \rightarrow \infty} n\varepsilon_n^2 = g$, где g таково, что

$$\max_{t \in I \setminus J, J_t \neq \emptyset} \sum_{s \in J_t} \exp(-gh(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_t)) < 1 \quad (28)$$

и J_t определено выше при доказательстве теоремы 3.

Это утверждение доказывается аналогично предыдущему. Условие (28) гарантирует при всех достаточно больших n выполнение неравенства $\alpha_t(\omega^n(\lambda_n)) \leq \alpha$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$ для всех $t \in I \setminus J$, что с учетом (23) влечет принадлежность $\{\omega^n(\lambda_n)\}$ к P .

З а м е ч а н и е 4. Утверждения теорем 3 (случай $\varepsilon_n = 0$ для $n \geq 1$) и 4 дополняют анонсированные в [16] результаты для P, P_1 .

Лемма 4. Если $I \setminus J \neq \emptyset$, $N \subseteq \{\{\omega^n\} \in A^0: \alpha_t(\omega^n) \leq a_t \exp(-nv_t), a_t > 0, 0 < v_t \leq \min_{s \in J} I(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t) \text{ для } t \in I \setminus J, n \geq 1\}$, то

$$M(N, J) \leq \min_{s \in J} \min_{t \in I \setminus J} V(v_t, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) < \delta(I, J).$$

(Функция V определена в п. 2 перед леммой 1.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последнее неравенство следует из убывания функции $V(x)$. Пусть $\{\omega^n\} \in N$, $s \in J$, $t \in I \setminus J$. Тогда

$$\alpha_s(\omega^n) = \mathbf{P}_n(\Omega_n \setminus \omega_s^n, \mathbf{p}_s) \geq \mathbf{P}_n(\omega_t^n, \mathbf{p}_s), \quad \alpha_s(\omega^n) \geq \min \mathbf{P}_n(\omega_t^n, \mathbf{p}_s)$$

при условии, что вероятность $\mathbf{P}_n(\Omega_n \setminus \omega_t^n, \mathbf{p}_t) \leq a_t \exp(-nv_t)$.

Отсюда при любом $\varepsilon \in (0, v_t)$ и любом натуральном $n \geq \varepsilon^{-1} \ln a_t$

$$\max_{s \in J} \alpha_s(\omega^n) \geq \min \mathbf{P}_n(\omega_t^n, \mathbf{p}_s)$$

при условии, что вероятность $\mathbf{P}_n(\Omega_n \setminus \omega_t^n, \mathbf{p}_t) \leq \exp(-n(v_t - \varepsilon))$, и

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T(\omega^n, J) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln S(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s, v_t - \varepsilon), \quad (29)$$

где $S(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s, d) = \min \mathbf{P}_n(\omega, \mathbf{p}_s)$ при условии, что вероятность $\mathbf{P}_n(\omega, \mathbf{p}_t) \geq 1 - \exp(-nd)$. Известно (см. [29, теорема 1, следствие 2], [32, теорема 1]), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln S(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s, d) = -V(d, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) \quad \text{для } d \in (0, I(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)).$$

Применяя этот результат, получим из (29): $M(N, J) \leq V(v_t - \varepsilon, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$. Так как функция $V(d) = V(d, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$ непрерывна (см. п. 2), то $M(N, J) \leq V(v_t, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$ при любых $s \in J$, $t \in I \setminus J$, что равносильно утверждению леммы.

Теорема 5. Пусть $I \setminus J \neq \emptyset$, $K = I \cup J$, $M_{IJ} = \delta(I, J)$,

$$Q \in \Delta = \left(-\min_{s \in J} \min_{t \in I \setminus J} I(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t), \delta(I, J) \right);$$

$$v_t = \min \left(\min_{s \in J} \gamma(-Q, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t), \min_{i \in (I \setminus \{t\}) \setminus J} \rho(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_t) \right),$$

если $t \in I \setminus J$, $|I \setminus J| > 1$, $v_t = \min_{s \in J} \gamma(-Q, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)$, если $I \setminus J = \{t\}$,

$$v_s = \min \left(\min_{t \in I \setminus J} \gamma(Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s), \min_{j \in J \setminus \{s\}} \rho(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_s) \right),$$

если $s \in J$, $|J| > 1$, $v_s = \min_{t \in I \setminus \{s\}} \gamma(Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$, если $J = \{s\}$;

$$M = \min_{s \in J} \min_{t \in I \setminus J} \gamma(Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s), \quad V = \min_{s \in J} \min_{t \in I \setminus J} V(v_t, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s).$$

Тогда верны следующие утверждения:

1) $v_t > 0$ для $t \in K$, $v_t < \min_{s \in J} I(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)$ для $t \in I \setminus J$, $v_s < \min_{t \in I \setminus J} I(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$ для $s \in J$, $M > 0$, $V < \delta(I, J)$;

2) последовательность байесовских критериев $\{\omega^n(\mu_n)\}$, где $\mu_n = (\mu_{1,n}, \dots, \mu_{m,n})$, $\mu_{t,n} = M_n \stackrel{\text{def}}{=} (|I \setminus J| + |J| \exp(nQ))^{-1}$ для $t \in I \setminus J$, $\mu_{t,n} = M_n \exp(nQ)$ для $t \in J$, $\mu_{t,n} = 0$ для $t \in \{1, \dots, m\} \setminus K$, принадлежит множеству

$$P_0 = \left\{ \{\omega^n\} \in A^0: \alpha_t(\omega^n) \leq (|K| - 1) \exp(-nv_t) \text{ для } t \in I, n \geq 1 \right\}$$

и

$$V \geq M(P_0, J) \geq -\liminf_{n \rightarrow \infty} T(\omega^n(\mu_n), J) \geq -\limsup_{n \rightarrow \infty} T(\omega^n(\mu_n), J) \geq M;$$

3) если $M = \min_{s \in J} \gamma(Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$, $v_t = \min_{s \in J} \gamma(-Q, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)$ при некотором $t \in I \setminus J$, то $\{\omega^n(\mu_n)\}$ — J -оптимальна для P_0 и $M(P_0, J) = M = V$.

Доказательство. 1) При любых $t \in I \setminus J$, $s \in J$ с учетом неравенств $-I(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t) < Q < I(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$, (6), (9), (10) имеем: $0 < \gamma(Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) < I(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$, $0 < \gamma(-Q, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t) < I(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)$. Отсюда и из неравенства $V(d, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) < I(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$ при $d > 0$ следует утверждение 1).

2) Из (1), (3), (5) следуют оценки: если $t \in I \setminus J$, то (при $|I \setminus J| = 1$ вторая сумма равна 0)

$$\begin{aligned} \alpha_t(\omega^n(\mu_n)) &\leq \sum_{s \in J} \exp(-n\gamma(-Q, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)) + \sum_{s \in (I \setminus \{t\}) \setminus J} \exp(-n\rho(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)) \\ &\leq (|K| - 1) \exp(-nv_t); \end{aligned}$$

если $s \in J$, то (при $|J| = 1$ первая сумма равна 0)

$$\begin{aligned} \alpha_s(\omega^n(\mu_n)) &\leq \sum_{t \in J \setminus \{s\}} \exp(-n\rho(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)) + \sum_{t \in I \setminus J} \exp(-n\gamma(Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)) \\ &\leq (|K| - 1) \exp(-nv_s) \leq (|K| - 1) \exp\left(-n \min_{s \in J} v_s\right). \end{aligned}$$

При $|J| > 1$ имеем: $\min_{s \in J} v_s = \min(M, M_J)$. Так как $M < \delta(I, J) \leq M_J$, то $\min_{s \in J} v_s = M$. Это равенство верно и при $|J| = 1$. Следовательно, $\{\omega^n(\mu_n)\} \in P_0$,

$$M(P_0, J) \geq -\liminf_{n \rightarrow \infty} T(\omega^n(\mu_n), J) \geq -\limsup_{n \rightarrow \infty} T(\omega^n(\mu_n), J) \geq M.$$

Оценка $M(P_0, J) \leq V$ следует из леммы 4.

3) Из (8), (12) имеем при некоторых $s \in J$, $t \in I \setminus J$:

$$v_t = \min_{s \in J} \gamma(-Q, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t) = \min_{s \in J} \gamma(Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) - Q = M - Q,$$

$$\begin{aligned} M &= \gamma(Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) = V(\gamma(Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) - Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) = V(M - Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) \\ &= V(v_t, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) \geq V. \end{aligned}$$

Отсюда и из 2) следует утверждение 3).

З а м е ч а н и е 5. Условия утверждения 3) выполняются при любом $Q \in \Delta$, если $|I \setminus J| = 1$. Если $|I \setminus J| > 1$, $Q < \delta(I, J)$ и близко к $\delta(I, J)$, то они выполняются для некоторого t такого, что $(s, t) \in W$,

$$W = \{(s, t): s \in J, t \in I \setminus J, \delta(I, J) = I(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)\}.$$

Для доказательства достаточно учесть, что $\gamma(\delta(I, J), \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) = \delta(I, J)$, $\gamma(-\delta(I, J), \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) = 0$ при $(s, t) \in W$, $\gamma(\delta(I, J), \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) > \delta(I, J)$ при $(s, t) \notin W$ (см. п. 2). Заметим также, что если $v_t < \min_{s \in J} \gamma(-Q, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t)$ для всех $t \in I \setminus J$ (это верно, например, при $m = 3$, $Q = 0$, $I = \{2, 3\}$, $J = \{1\}$, $\rho(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) < \min[\rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3)]$), то

$$M \leq \gamma(Q, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) = V(\gamma(-Q, \mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t), \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s) < V(v_t, \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_s)$$

для всех $s \in J$, $t \in I \setminus J$, $M < V$.

З а м е ч а н и е 6. Из свойства 2 (см. п. 1) следует, что любая J -оптимальная последовательность из теорем 1, 3–5 является также

J -оптимальной последовательностью для некоторого множества P_* при надлежащем выборе параметров α_t, n_0 .

Автор благодарен В. П. Чистякову, А. М. Зубкову и рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакут П. А. О теоретико-информационном подходе к задачам статистических решений. — Проблемы передачи информации, 1971, т. 7, в. 1, с. 51–57.
2. Блекуэлл Д., Гиршик М. А. Теория игр и статистических решений. М.: ИЛ, 1958, 374 с.
3. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 431 с.
4. Боровков А. А., Могульский А. А. Большие отклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992, 224 с. (Труды Ин-та математики СО РАН, т. 19.)
5. Вайда И. Оценка минимальной вероятности ошибки при проверке конечного или счетного числа гипотез. — Проблемы передачи информации, 1968, т. 4, в. 1, с. 9–19.
6. Вайда И. О сходимости средней условной энтропии. — Идентификация и аппаратура для статистических исследований: Труды Первого Всесоюзного симпозиума по статистическим проблемам в технической кибернетике. М.: Наука, 1970, с. 137–141.
7. Вальд А. Статистические решающие функции. — Позиционные игры. Под ред. Н. Н. Воробьева и И. Н. Врублевской. М.: Наука, 1967, с. 300–522.
8. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1980, 256 с.
9. Ковалевский В. А. Задача распознавания образов с точки зрения математической статистики. — Читающие автоматы и распознавание образов. Киев: Наукова думка, 1965, с. 8–37.
10. Коваль В. Н., Кук Ю. В. Проверка многих гипотез с помощью оптимальной расширенной нерандомизированной процедуры. — Украин. матем. журн., 1997, т. 49, № 8, с. 1042–1054.
11. Кульбак С. Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967, 408 с.
12. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964, 498 с.
13. Ляпунов А. А. О выборе из конечного числа законов распределения. — Успехи матем. наук, 1951, т. 6, в. 1, с. 176–186.
14. Рао С. Р. Линейные статистические методы. М.: Наука, 1968, 548 с.
15. Розовский Л. В. Одно обобщение теоремы Колмогорова о законе повторного логарифма. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 1, с. 134–143.
16. Сализов Н. П. Асимптотические свойства вероятностей ошибок критериев для различения нескольких мультиномиальных схем испытаний. — Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 1, с. 54–57.
17. Сализов Н. П. Уточнение неравенства Г. Чернова. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 3, с. 583–586.
18. Сализов Н. П. Об одном обобщении расстояния Чернова. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 2, с. 294–314.
19. Санов И. Н. О вероятности больших отклонений случайных величин. — Матем. сб., 1957, т. 2, № 1, с. 11–44.
20. Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи. М.: Мир, 1965, 438 с.
21. Хазен Э. М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Советское радио, 1968, 256 с.
22. Хазен Э. М. Определение потенциальной точности решения некоторых задач распознавания и оценивания. — Изв. АН СССР. Техн. кибернет., 1971, № 3, с. 184–192.

23. *Anderson J. A.* Discrimination between k population with constraints on the probabilities of misclassification. — J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1969, v. 31, № 1, p. 123–139.
24. *Blahut R. E.* Hypothesis testing and information theory. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1974, v. 20, № 4, p. 405–417.
25. *Bunke O.* Über optimal Verfahren der Diskriminanzanalyse. — Abh. Deutschen Akad. Wiss. Berlin. Kl. Math., Phys. und Techn., 1964, v. 4, p. 35–41.
26. *Bunke O.* Stabilität statistischer Entscheidungsprobleme und Anwendungen in der Diskriminanzanalyse. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1967, v. 7, № 2, p. 131–146.
27. *Chernoff H.* A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, № 4, p. 493–507.
28. *Chernoff H.* Large-sample theory: parametric case. — Ann. Math. Statist., 1956, v. 27, № 1, p. 1–22.
29. *Csiszár I., Longo G.* On the error exponent for source coding and for testing simple statistical hypotheses. — Studia Sci. Math. Hungar., 1971, v. 6, № 1–2, p. 181–191.
30. *Efron B.* The power of the likelihood ratio test. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, № 3, p. 802–806.
31. *Ferguson T. S.* Mathematical Statistics. A Decision Theoretic Approach. New York: Academic Press, 1967, 396 p.
32. *Fu F.-W., Shen S.-Y.* Hypothesis testing for arbitrarily varying source with exponential-type constraint. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1998, v. 44, № 2, p. 892–895.
33. *Ghosh J. K., Subramanyam K.* Inference about separated families in large samples. — Sankhyā Ser. A, 1975, v. 37, № 4, p. 502–513.
34. *Hoeffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables. — J. Amer. Statist. Assoc., 1963, v. 58, № 301, p. 13–30.
35. *Hoeffding W.* Asymptotically optimal tests for multinomial distributions. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 2, p. 369–408.
36. *Hoel P. G., Peterson R. P.* A solution to the problem of optimum classification. — Ann. Math. Statist., 1949, v. 20, № 3, p. 433–438.
37. *Krafft O., Plachky D.* Bounds for the power of likelihood ratio tests and their asymptotic properties. — Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, № 5, p. 1646–1654.
38. *Krafft O., Puri M. L.* The asymptotic behavior of the minimax risk for multiple decision problems. — Sankhyā Ser. A, 1974, v. 36, № 1, p. 1–12.
39. *Leang C. C., Johnson D. H.* On the asymptotics of M -hypothesis Bayesian detection. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1997, v. 43, № 1, p. 280–282.
40. *von Mises R.* On the classification of observation data into distinct groups. — Ann. Math. Statist., 1945, v. 16, № 1, p. 68–73.
41. *Perez A.* Information method in reducing complex decision problems. — Transactions of the Fourth Prague Conference on Information Theory, 1965, p. 55–87.
42. *Perez A.* Information-theoretic risk estimates in statistical decision. — Kybernetika (Prague), 1967, v. 3, № 1, p. 1–21.
43. *Plachky D., Steinebach J.* A generalization of a result of Chernoff in large sample theory. — Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statist., 1977, v. 8, № 3, p. 375–379.
44. *Raghavachari M.* On theorem of Bahadur on the rate of convergence of test statistics. — Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, № 5, p. 1695–1699.
45. *Rao C. R.* Efficient estimates and optimum inference procedures in large samples. — J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1962, v. 24, p. 46–63; Discussion, p. 63–72.
46. *Vajda I.* On the statistical decision problems with discrete parameter space. — Kybernetika (Prague), 1967, v. 3, № 2, p. 110–126.
47. *Vajda I.* On the amount of information contained in a sequence of independent observations. — Kybernetika (Prague), 1970, v. 6, № 4, p. 306–323.
48. *Welch B. L.* Note on discriminant functions. — Biometrika, 1939, v. 31, p. 218–220.

Поступила в редакцию
24.VIII.1998

Исправленный вариант
13.III.2000