Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, Предельные теоремы пуассоновско-
го типа для числа неполных совпадений s -цепочек,
Теория вероятн. и ее примен., 2002, том 47, вы-
пуск 2, 350–357

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3654>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 11:39:13

© 2002 г.

МИХАЙЛОВ В. Г.*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПУАССОНОВСКОГО ТИПА ДЛЯ ЧИСЛА НЕПОЛНЫХ СОВПАДЕНИЙ s -ЦЕПОЧЕК¹⁾

Основной результат статьи — предельная теорема для вектора из чисел неполных (с заданным числом несовпавших букв) совпадений s -цепочек в двух последовательностях независимых одинаково распределенных случайных величин. Указаны вид предельного совместного распределения и достаточные условия сходимости. Получены явные оценки близости к сопровождающему многомерному сложному пуассоновскому распределению. При доказательстве использован локальный вариант метода Чена–Стейна оценивания точности пуассоновской аппроксимации для распределения набора зависимых случайных индикаторов.

Ключевые слова и фразы: совпадения и повторения цепочек, неполные совпадения, предельное сложное пуассоновское распределение, явные оценки скорости сходимости, метод Чена–Стейна.

1. Введение. Пусть $X = (X_1, \dots, X_m)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ — две последовательности независимых одинаково (внутри каждой последовательности) распределенных случайных величин, принимающих значения в множестве $\{1, 2, \dots\}$. Введем обозначения

$$p_k = \mathbf{P}\{X_1 = k\}, \quad q_k = \mathbf{P}\{Y_1 = k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ p = \max_k p_k I(q_k > 0), \quad q = \max_k q_k I(p_k > 0)$$

(здесь и далее выражение $I(\cdot)$ обозначает индикатор случайного события или неслучайного множества), $r = \max_k p_k q_k$, $R = \sum_{k=1}^{\infty} p_k q_k$.

На множестве цепочек $x = (x_1, \dots, x_s)$, $x_i \in \mathbf{Z}^+$, $s = 1, 2, \dots$, введем функцию $H(x, y) = \sum_{i=1}^s I(x_i = y_i)$. Рассмотрим события

$$H_{i,j}(s, c) = \left\{ H((X_i, \dots, X_{i+s-1}), (Y_j, \dots, Y_{j+s-1})) = c \right\}, \\ H'_{i,j}(s, c) = H_{i,j}(s, c) \cap \{X_i = Y_j\} \cap \{X_{i+s-1} = Y_{j+s-1}\},$$

которые будем называть (s, c) -совпадениями и $(s, c)'$ -совпадениями с координатами i и j . При $c = s$ оба этих понятия имеют один и тот же смысл полного совпадения цепочек. При $c < s$ мы используем термин *неполные совпадения*.

Число (s, c) -совпадений и число $(s, c)'$ -совпадений цепочек последовательностей X и Y выражаются формулами

$$N(s, c) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I(H_{i,j}(s, c)), \quad N'(s, c) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I(H'_{i,j}(s, c)).$$

В этом определении считается, что $X_{m+i} = X_i$, $Y_{n+i} = Y_i$, $i = 1, 2, \dots$.

Ниже с помощью локального варианта метода Чена–Стейна для совместного распределения зависимых случайных индикаторов будет доказана

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00012) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект 00-15-96136).

Теорема 1. Пусть параметры $m, n \rightarrow \infty$, величины s и c постоянны, причем $2 \leq c \leq s$, а вероятности p_k, q_k меняются так, что

$$\lambda(m, n) = mnR^c \rightarrow \lambda < \infty, \quad mp^c + nq^c + rR^{-1} \rightarrow 0. \quad (1)$$

Тогда случайные величины $N'(k, c)$, $k = c, \dots, s$, асимптотически независимы, а их распределения сходятся к распределениям Пуассона с параметрами $\lambda_k = C_{k-2}^{c-2} \lambda$ соответственно.

З а м е ч а н и е 1. При условии (1)

$$\mathbf{E}N(s, c+1) \rightarrow 0 \quad (s \geq c+1), \quad \mathbf{E}N(s, c-1) \rightarrow \infty \quad (s \geq c-1).$$

Аналогичные соотношения выполнены для $\mathbf{E}N'(s, c \pm 1)$. Если при этом $N(s+1, c+1) = 0$, то каждому $(s-k, c)'$ -совпадению отвечает своя серия из $k+1$ штук (s, c) -совпадений, причем каждая серия (s, c) -совпадений порождена каким-либо $(s-k, c)'$ -совпадением.

Эти свойства позволяют вывести из теоремы 1 следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда распределение $(s-c+1)$ -мерного вектора $(N(l, c), l = c, \dots, s)$ сходится к распределению $\text{CP}(\lambda_c, \dots, \lambda_s)$ вектора $(\sum_{k=c}^l (l-k+1)\pi_k, l = c, \dots, s)$, где $\pi_c, \dots, \pi_s$ — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_c, \dots, \lambda_s$ соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 1 и 2 и замечание 1 дают следующую картину асимптотического поведения числа (s, c) -совпадений. Эти совпадения возникают сериями, число серий с вероятностью, стремящейся к единице, совпадает с числом $(s, c)'$ -совпадений и имеет в пределе распределение Пуассона с параметром $\lambda(s) = \lambda \sum_{k=c}^s C_{k-2}^{c-2} = \lambda C_{s-1}^{c-1}$, а длины серий асимптотически независимы и имеют в пределе распределение

$$\mathbf{P}\{\kappa = k+1\} = C_{s-k-2}^{c-2} (C_{s-1}^{c-1})^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Поэтому предельным распределением для $N(s, c)$ является сложное пуассоновское распределение с производящей функцией $\exp\{\sum_{k=c}^s \lambda_k (z^{s-k+1} - 1)\}$. При $c = s$ это распределение оказывается просто пуассоновским с параметром $\lambda_s = \lambda$.

З а м е ч а н и е 3. В работе [1] был использован иной прием перечисления (s, c) -совпадений. Каждая серия таких совпадений начинается с первого в серии (s, c) -совпадения — события $H_{i,j}(s, c) \cap H_{i-1,j-1}(s, c-1)$. Число «первых» совпадений равно числу серий. В работе [1] изучалось число повторений s -цепочек (т.е. число (s, s) -совпадений цепочек внутри одной последовательности). Используя свойства «первых» повторений s -цепочек, было показано, что число серий повторений s -цепочек имеет в пределе распределение Пуассона, а длины серий асимптотически независимы и имеют в пределе геометрическое распределение с параметром $\rho = \lim R$. В работе [1] допускался и случай $\rho > 0$.

Продолжим изложение результатов. При доказательстве теорем 1 и 2 удалось получить оценки близости исследуемых совместных распределений к сопровождающим распределениям пуассоновского типа.

Обозначим через $\rho(F, G)$ расстояние по вариации между распределениями F и G . Для распределений, сосредоточенных на не более чем счетном множестве K , оно выражается формулой

$$\rho(F, G) = \frac{1}{2} \sum_{k \in K} |F\{k\} - G\{k\}|.$$

Обозначим через $\text{Po}(\lambda_c, \dots, \lambda_s)$ распределение $(s-c+1)$ -мерного случайного вектора, состоящего из независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметрами $\lambda_c, \dots, \lambda_s$ соответственно. Обозначим через $\mathcal{L}(s, c)$ и $\mathcal{L}'(s, c)$ распределения векторов $(N(l, c), l = c, \dots, s)$ и $(N'(l, c), l = c, \dots, s)$ соответственно.

Используем обозначения

$$\lambda_k(m, n) = C_{k-2}^{c-2} (1-R)^{k-c} \lambda(m, n).$$

Заметим сразу, что $\mathbf{E}N(k, c) = \lambda_k(m, n)$.

Теорема 3. Пусть параметры $m, n \geq 2s - 1$ и $2 \leq c \leq s$. Тогда

$$\rho(\mathcal{L}'(s, c), \text{Po}(\lambda_c(m, n), \dots, \lambda_s(m, n))) \leq S, \quad (2)$$

$$\rho(\mathcal{L}(s, c), \text{CP}(\lambda_c(m, n), \dots, \lambda_s(m, n))) \leq S + T, \quad (3)$$

где

$$S = (2s - 1)(C_{s-1}^{c-1})^2 \lambda(m, n) (\lambda(m, n)(m^{-1} + n^{-1}) + R + mp^c + nq^c + (2s - 1)(rR^{-1})^c), \quad T = C_s^c R \lambda(m, n). \quad (4)$$

З а м е ч а н и е 4. Аналогичные утверждения могут быть доказаны и для числа неполных повторений цепочек в одной последовательности независимых испытаний. Вопрос о виде совместных предельных распределений для (s, c) -совпадений цепочек в паре последовательностей и для (s, c) -повторений в одной последовательности был впервые поднят в 1974 году и оставался открытым до настоящего времени.

З а м е ч а н и е 5. Теоремы 1 и 2 являются следствиями теоремы 3. Они описывают свойства числа (s, c) -совпадений и числа (s, c) -совпадений при постоянных значениях параметров s и c и $R \rightarrow 0$ (последнее вытекает из условия (1)).

З а м е ч а н и е 6. Величина $N(s, s)$ — это число полных совпадений s -цепочек. Число полных совпадений и число полных повторений цепочек изучались, например, в [1], [2] и [3] (см. также [4]). Как мы уже упоминали в замечании 2, был охвачен и случай, когда $R \rightarrow \rho > 0$. В этом случае предельное распределение величины $N(s, s)$ является сложным пуассоновским распределением с производящей функцией $\exp\{\lambda(z - 1)/(1 - \rho z)\}$. Этот факт свидетельствует о том, что предельное распределение для вектора $(N(s - l, c), l = 0, \dots, s - c)$ при $R \rightarrow \rho > 0$ будет существенно отличаться от приведенного в теореме 2. Автору пока не известен вид предельного распределения $N(s, c)$ при $c < s$ в этом случае. Следует заметить, что условие $R \rightarrow 0$ является существенным в доказательстве наших теорем, и в случае $R \rightarrow \rho > 0$ использованный ход доказательств, скорее всего, будет непригодным.

З а м е ч а н и е 7. Свойства величин $N(s, c)$ при $c \leq s - 1$ изучались в работе [5], где была получена оценка для расстояния по вариации между распределением величины $N(s, c)$ и пуассоновским распределением. Впрочем, как показывает теорема 2, в нашем случае эти оценки особого значения не имеют. Нетрудно проверить, что (как и следовало ожидать) указанные в [5] границы для расстояния по вариации до пуассоновского распределения в условиях теоремы 2 не сходятся к нулю (при $c \geq 1$). Близкие вопросы рассматривались в статьях [6], [7], где были доказаны предельные теоремы для распределения величины $R(d)$ — длины самого длинного совпадения отрезков с заданным числом d несовпадений букв.

З а м е ч а н и е 8. Теорема 3 позволяет сделать определенные выводы о предельном поведении величин $N(s, c)$ и при переменных s и c . Она, например, показывает, что если $m, n, s \rightarrow \infty$, $\lambda_s(m, n) \rightarrow \mu < \infty$, $2 \leq c \leq s$ и $sm^{-1} + sn^{-1} + s^{s-c+1}(R + mp^c + nq^c + s(rR^{-1})^c) \rightarrow 0$, то распределение случайной величины $N(s, c)$ сходится к распределению Пуассона с параметром μ . Обратим внимание на то, что, в отличие от случая $s = \text{const}$, здесь $\lambda(m, n) \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е 9. Утверждения теорем 1 и 2 справедливы и для неполных совпадений цепочек из обычных (не замкнутых в циклы) последовательностей случайных величин. Возникающие в этом случае эффекты, связанные со спецификой свойств совпадений цепочек, расположенных в началах и концах последовательностей, значительно усложняют рассуждения.

З а м е ч а н и е 10. В одномерном случае оценка (2) теоремы 3 может быть существенно уточнена. Пусть $L'(s, c)$ — распределение случайной величины $N'(s, c)$. Тогда

$$\rho(L'(s, c), \text{Po}(\lambda_s(m, n))) \leq \frac{1 - \exp\{-\lambda_s(m, n)\}}{\lambda_s(m, n)} S. \quad (5)$$

Значительное уточнение допускает в одномерном случае и оценка (3) теоремы 3. Этому результату будет посвящена специальная статья.

Завершая вступную часть, приведем два интересных следствия сформулированных теорем.

Следствие 1. Пусть параметры $m, n \rightarrow \infty$, величины s и c постоянны, причем $2 \leq c \leq s$, а вероятности p_k, q_k меняются так, что

$$\lambda(m, n) = mpR^c \rightarrow \infty, \quad \lambda^2 m^{-1} + \lambda^2 n^{-1} + \lambda(R + mp^c + nq^c + (rR^{-1})^c) \rightarrow 0.$$

Тогда

а) случайные величины $(N'(k, c) - \mathbf{E}N'(k, c))(\mathbf{E}N'(k, c))^{-1/2}$, $k = c, \dots, s$, асимптотически независимы, а их распределения сходятся к стандартному нормальному распределению,

б) функция распределения вектора $((\lambda(m, n))^{-1/2}(N(l, c) - \lambda_l(m, n)), l = c, \dots, s)$ сходится к $(s - c + 1)$ -мерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций

$$\left\| \sum_{k=c}^{\min\{i,j\}} (i-k+1)(j-k+1) C_{k-2}^{c-2} \right\|.$$

Рассмотрим величину $\nu(c) = \min\{s: N(s, c) > 0\}$, выражающую минимальную длину отрезков в последовательностях $(X_1, \dots, X_m)$ и $(Y_1, \dots, Y_n)$, имеющих между собой ровно c совпадений букв (с учетом их мест в отрезках).

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$\mathbf{P}\{c \leq \nu(c) \leq k\} \rightarrow 1 - \exp\{-\lambda C_{k-1}^{c-1}\}, \quad k = c, c+1, \dots$$

2. Доказательства для (s, c) -совпадений. В этом пункте доказываются оценка (2) теоремы 3 и теорема 1.

Нам будет удобно разбить события $H'_{i,j}(s, c)$ на более мелкие следующим образом. Рассмотрим множество Δ_s векторов $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_s)$ из нулей и единиц, у которых $\sum_l \delta_l = c$ и $\delta_1 = \delta_s = 1$. При $\delta \in \Delta_s$ положим

$$H'_{i,j}(s, c, \delta) = \{X_{i+l-1} = Y_{j+l-1} \iff \delta_l = 1, l = 1, \dots, s\}.$$

Введем обозначения $W_s(i, j) = I\{H'_{i,j}(s, c)\}$, $W(i, j, \delta) = I\{H'_{i,j}(s, c, \delta)\}$, где $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ и $\delta \in \Delta_s$. Очевидно, что $W_s(i, j) = \sum_{\delta \in \Delta_s} W(i, j, \delta)$. Надо заметить (см. [8, формула (II.12.8)]), что

$$\sum_{k=c}^s |\Delta_k| = \sum_{k=c}^s C_{k-2}^{c-2} = C_{s-1}^{c-1}. \quad (6)$$

Обозначим через W набор случайных величин $\{W(i, j, \delta)\}_\Gamma$ на множестве $\Gamma = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \times \Delta$, где $\Delta = \bigcup_{k=c}^s \Delta_k$. Пусть $\pi = \{\pi(i, j, \delta)\}_\Gamma$ — набор независимых случайных величин, имеющих распределения Пуассона с параметрами

$$\mathbf{E}\pi(i, j, \delta) = \mathbf{E}W(i, j, \delta) = R^c(1 - R)^{k-c} \quad (7)$$

при $\delta \in \Delta_k$.

Будем использовать обозначение $\mathcal{L}(Z)$ для распределения случайной величины (или набора случайных величин) Z .

Теорема 4. Пусть параметры $m, n \geq 2s - 1$. Тогда

$$\rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\pi)) \leq S, \quad (8)$$

где S определено в (4).

Доказательство. Для элементов $(i, j, \delta) \in \Gamma$ будем использовать обозначение $a = (i, j, \delta)$. Для числа компонент вектора δ будем использовать обозначение $|\delta|$. Другими словами, δ принадлежит $\Delta_{|\delta|}$.

Рассмотрим множество

$$\Gamma_a^{\text{ind}} = \left\{ a' \in \Gamma: i' - i \geq |\delta|, i - i' \geq |\delta'|, \text{ или } j' - j \geq |\delta|, \text{ или } j - j' \geq |\delta'| \right\}.$$

Нетрудно проверить, что случайная величина $W(a)$ не зависит от совокупности случайных величин $\{W(a'), a' \in \Gamma_a^{\text{ind}}\}$. Положим

$$\Gamma_a = (\Gamma \setminus \{a\}) \setminus \Gamma_a^{\text{ind}}.$$

Воспользуемся теоремой 10.А из книги [9], из которой следует, что

$$\rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\pi)) \leq \sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a) (\mathbf{E}W(a) + \mathbf{E}U(a)) + \sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a)U(a), \quad (9)$$

где $U(a) = \sum_{a' \in \Gamma_a} W(a')$.

Оценим первую сумму в правой части (9). Ее можно записать в виде

$$\sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a) (\mathbf{E}W(a) + \mathbf{E}U(a)) = \sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \{a\} \cup \Gamma_a} \mathbf{E}W(a) \mathbf{E}W(a').$$

Число слагаемых во внутренней сумме допускает оценку $|\{a\} \cup \Gamma_a| = |\Gamma \setminus \Gamma_a^{\text{ind}}| \leq (C_{s-1}^{-1})^2(mn - (m - 2s + 1)(n - 2s + 1))$. Кроме того, согласно (7) и (1), $\mathbf{E}W(a) \leq R^c = m^{-1}n^{-1}\lambda(m, n)$. Значит,

$$\sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a) (\mathbf{E}W(a) + \mathbf{E}U(a)) \leq (C_{s-1}^{-1})^2(2s - 1)\lambda^2(m, n)(m^{-1} + n^{-1}). \quad (10)$$

Оценим вторую сумму в правой части (9). Введем множества

$$\begin{aligned} \Gamma_a^s &= \{a' = (i', j', k') \in \Gamma_a: -|\delta'| < i' - i = j' - j < |\delta|\}, \\ \Gamma_a^* &= \Gamma_a \setminus \Gamma_a^s, \\ \Gamma_a^{**} &= \{a' \in \Gamma_a^*: 0 < i' - i < |\delta| \text{ или } 0 < i - i' < |\delta'|, \\ &\quad 0 < j' - j < |\delta| \text{ или } 0 < j - j' < |\delta'|\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Лемма 1. Пусть $a \in \Gamma$.

- (а) При $a' \in \Gamma_a^s$ имеет место неравенство $\mathbf{E}W(a)W(a') \leq R\mathbf{E}W(a)$.
 (б) При $a' \in \Gamma_a^* \setminus \Gamma_a^{**}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}W(a)W(a') &\leq q^c \mathbf{E}W(a), \text{ если } 0 < i' - i < |\delta| \text{ или } 0 < i - i' < |\delta'|, \\ \mathbf{E}W(a)W(a') &\leq p^c \mathbf{E}W(a), \text{ если } 0 < j' - j < |\delta| \text{ или } 0 < j - j' < |\delta'|. \end{aligned}$$

- (с) При $a' \in \Gamma_a^{**}$ имеет место неравенство $\mathbf{E}W(a)W(a') \leq r^c$.

Доказательство. (а) Пусть $a' \in \Gamma_a^s$ и, для определенности, $i' < i$. Тогда

$$\mathbf{E}W(a)W(a') \leq \mathbf{E}(W(a)I\{X_{i'} = Y_{j'}\}) = \mathbf{E}(W(a)\mathbf{P}\{X_{i'} = Y_{j'}\}) = R\mathbf{E}W(a).$$

(б) Пусть $a' \in \Gamma_a^* \setminus \Gamma_a^{**}$ и, для определенности, $0 < i' - i < |\delta|$. Тогда $j' - j > |\delta|$ или $j' - j < -|\delta'|$. Поэтому $\mathbf{E}(W(a')|A) \leq q^c$ для любого события A с $\mathbf{P}(A) > 0$, порожденного случайными величинами $X_i, \dots, X_{i+|\delta|-1}$ и $Y_j, \dots, Y_{j+|\delta|-1}$. Поэтому

$$\mathbf{E}W(a)W(a') \leq \mathbf{E}(W(a)\mathbf{E}(W(a')|W(a) = 1)) \leq q^c \mathbf{E}W(a).$$

(с) Воспользуемся схемой доказательства леммы 2 из работы [1]. Выберем некоторые $a = (i, j, \delta) \in \Gamma$ и $a' = (i', j', \delta') \in \Gamma_a^{**}$. Рассмотрим двудольный граф $G(a, a')$ с множеством вершин

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2, \quad V_1 = \{i + l - 1: \delta_l = 1\} \cup \{i' + l - 1: \delta' = 1\}, \\ V_2 &= \{j + l - 1: \delta_l = 1\} \cup \{j' + l - 1: \delta' = 1\} \end{aligned}$$

и множеством из $2c$ ребер $E = \{(i + l - 1, j + l - 1): \delta_l = 1\} \cup \{(i' + l - 1, j' + l - 1): \delta'_l = 1\}$. Граф $G(a, a')$ не имеет циклов и состоит из связанных компонент, представляющих собой простые цепи, в которых чередуются вершины из V_1 и V_2 . Обозначим через N_{s_1, s_2} число цепей с s_1 вершинами в V_1 и с s_2 вершинами в V_2 , $|s_1 - s_2| \leq 1$. Цепь с s_1 вершинами в V_1 и с s_2 вершинами в V_2 имеет $s_1 + s_2 - 1$ ребер, поэтому

$$\sum_{s_1, s_2} (s_1 + s_2 - 1) N_{s_1, s_2} = 2c. \quad (12)$$

Как нетрудно проверить, обратившись к определению случайной величины $W(a)$,

$$\mathbf{E}W(a)W(a') \leq \prod_{s_1, s_2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{s_1} q_k^{s_2} \right)^{N(s_1, s_2)}. \quad (13)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_k p_k^h q_k^h &\leq r^{h-1/2} \sum_k (p_k q_k)^{1/2} \leq r^{(2h-1)/2}, \\ \sum_k p_k^h q_k^{h+1} &\leq r^h = r^{((2h+1)-1)/2}, \quad \sum_k p_k^{h+1} q_k^h \leq r^h = r^{((2h+1)-1)/2}. \end{aligned}$$

Подставим эти оценки в (13) и воспользуемся равенствами (12): $\mathbf{E}W(a)W(a') \leq r^c$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 11. Оценки для $\mathbf{E}W(a)W(a')$ типа полученных в лемме 1 используются при доказательстве предельных теорем пуассоновского типа не только методом Чена–Стейна, но и методом моментов (см., например, [1]). Близкие по смыслу к оценкам леммы 1 (и, возможно, немного более точные) оценки для случая одинаково распределенных последовательностей содержатся в лемме 4.1 работы [5].

Продолжим доказательство теоремы 4. Заметим, что в силу определений и равенства (6)

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a) &= C_{s-1}^{c-1} \lambda(m, n), \\ |\Gamma_a^s| &= (2s-1) C_{s-1}^{c-1}, \quad |\Gamma \times \Gamma_a^{**}| \leq (2s-1)^2 mn (C_{s-1}^{c-1})^2, \end{aligned}$$

а численности двух частей множества $\Gamma_a^* \setminus \Gamma_a^{**}$, упомянутых в п. (b) леммы 1, оцениваются величинами $(2s-1) n C_{s-1}^{c-1}$ и $(2s-1) m C_{s-1}^{c-1}$ соответственно. Поэтому, используя лемму, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \Gamma_a^*} \mathbf{E}W(a)W(a') &\leq (2s-1) R(C_{s-1}^{c-1})^2 \lambda(m, n), \\ \sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \Gamma_a^* \setminus \Gamma_a^{**}} \mathbf{E}W(a)W(a') &\leq (2s-1) (C_{s-1}^{c-1})^2 \lambda(m, n) (mp^c + nq^c), \quad (14) \\ \sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \Gamma_a^{**}} \mathbf{E}W(a)W(a') &\leq (2s-1)^2 (C_{s-1}^{c-1})^2 mn r^c. \end{aligned}$$

Подставив оценки (10) и (14) в (9), приходим к неравенству (8). Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е 12. Если бы в теореме 4 нас интересовало поведение распределения не самого набора W , а лишь суммы всех или некоторой части его элементов, например, величины $N'(s, d)$, то мы могли бы воспользоваться теоремой 1.А из книги [9], оценка которой отличается от (9) дополнительным множителем $(1 - e^{-\lambda})/\lambda$, где λ — математическое ожидание исследуемой суммы. Однако получаемые таким способом более точные, но «одномерные» результаты типа неравенства (5) бесполезны при изучении совместного распределения величин $N(c, c), \dots, N(s, c)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о н е р а в е н с т в а (2). Рассмотрим произвольное отображение $F: \{0, 1\}^\Gamma \rightarrow M$, где M — некоторое множество. Очевидно, что

$$\rho(\mathcal{L}(F(W)), \mathcal{L}(F(\pi))) \leq \rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\pi)). \quad (15)$$

Возьмем в качестве F отображение, сопоставляющее вектору $(x_a, a \in \Gamma) \in \{0, 1\}^\Gamma$ вектор $(\sum_{a: |\delta|=k} x_a, k = c, \dots, s) \in \mathbf{R}^{s-c+1}$. Тогда

$$F(W) = (N'(k, c), k = c, \dots, s), \quad (16)$$

а

$$\mathcal{L}(F(\pi)) = \text{Po}(\lambda_c(m, n), \dots, \lambda_s(m, n)). \quad (17)$$

Из теоремы 4 и соотношений (15)–(17) следует (2).

Теорема 1 вытекает непосредственно из неравенства (2), поскольку из ее предположений следует, что $S \rightarrow 0$, а $\lambda_k(m, n) \rightarrow \lambda_k, k = c, \dots, s$.

3. Доказательства для (s, c) -совпадений. В этом пункте доказываются оценка (3) теоремы 3 и теорема 2. Начнем с оценки (3). Положим

$$\tilde{N}(l, c) = \sum_{k=c}^l (l - k + 1) N'(k, c).$$

Ясно, что набор $(\tilde{N}(c, c), \dots, \tilde{N}(s, c))$ является результатом применения к набору W некоторого отображения F из $\{0, 1\}^\Gamma$ в $\mathbf{R}^{s-c+1}$. Поэтому, согласно (15) и (8),

$$\rho\left(\mathcal{L}\left(\tilde{N}(c, c), \dots, \tilde{N}(s, c)\right), \operatorname{CP}\left(\lambda_c(m, n), \dots, \lambda_s(m, n)\right)\right) \leq \rho\left(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\pi)\right) \leq S. \tag{18}$$

Определим события

$$A = \left\{N(l, c) = \tilde{N}(l, c), \, l = c, \dots, s\right\}, \quad B = \left\{\sum_{k=c+1}^{s+1} N(k, c+1) > 0\right\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\overline{A} \subseteq B$. Поэтому

$$\mathbf{P}(\overline{A}) \leq \mathbf{P}(B) \leq \sum_{k=c+1}^{s+1} \mathbf{E} N(k, c+1) = \sum_{k=c+1}^{s+1} C_{k-2}^{c-1} (1-R)^{k-c-1} mn R^{c+1} < C_s^c mn R^{c+1} = T.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\mathbf{P}\{Z > 0\} \leq \mathbf{E} Z$ для случайной величины, принимающей неотрицательные целочисленные значения, выражениями для $\mathbf{E} N(k, c+1)$ и просуммировали биномиальные коэффициенты так же, как и в (6).

Используя неравенство $\rho(\mathcal{L}(U), \mathcal{L}(V)) \leq \mathbf{P}\{U \neq V\}$, выполненное для произвольных случайных величин U и V , заданных на одном вероятностном пространстве, получаем, что

$$\rho\left(\mathcal{L}(s, c), \mathcal{L}\left(\tilde{N}(c, c), \dots, \tilde{N}(s, c)\right)\right) \leq T. \tag{19}$$

По неравенству треугольника из (18) и (19) следует неравенство (3).

Теорема 2 вытекает непосредственно из неравенства (3), поскольку из ее предположений следует, что $S, T \rightarrow 0$, а $\lambda_k(m, n) \rightarrow \lambda_k$ при всех $k = c, \dots, s$.

Следствие 1 выводится из теоремы 3 стандартными рассуждениями, использующими тот факт, что функция пуассоновского распределения с ростом к бесконечности его параметра при соответствующей центровке и нормировке сходится к стандартной нормальной функции распределения. Поэтому доказательство следствия 1 мы опускаем.

Следствие 2 вытекает из теоремы 1 и тождества $\{\nu(c) > s\} = \{N'(c, c) = \dots = N'(s, c) = 0\}$.

4. Заключительные замечания.

З а м е ч а н и е 13. Изложенный метод доказательства может быть использован при анализе предельного поведения числа неполных совпадений частного вида, например, числа $N''(s, c)$ таких (s, c) -совпадений, в которых нет соседствующих несовпадений букв.

Теорема 5. Пусть $m, n \rightarrow \infty$, величины s и c постоянны, причем $(s - 1)/2 \leq c \leq s$, а величины r_k и q_k меняются так, что выполнены условия (1). Тогда распределение вектора $(N''(c, c), \dots, N''(s, c))$ сходится к распределению вектора $(\pi''_k + 2\pi''_{k-1} + \pi''_{k-2}, \, k = c, \dots, s)$, где $\pi''_{c-2} = \pi''_{c-1} = 0$, а $\pi''_k, \, k = c, \dots, s$, — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda''_k = \lambda C_{c-1}^{k-c}$.

З а м е ч а н и е 14. Следует отметить явные аналогии рассмотренной задачи с задачами о числе неполных серий [10] и моменте первого появления не менее k событий пуассоновского потока в интервале заданной длины [11].

Автор признателен А. М. Зубкову за полезные обсуждения полученных результатов и замечания, способствовавшие улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубков А. М., Михайлов В. Г. Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, в. 1, с. 173–181.
2. Зубков А. М., Михайлов В. Г. О повторениях s -цепочек в последовательности независимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 2, с. 267–279.
3. Новак С. Ю. Пуассонова аппроксимация числа длинных «повторов» в случайных последовательностях. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 4, с. 731–742.
4. Новак С. Ю. Письмо в редакцию. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 3, с. 700.
5. Novak S. Yu. Long match patterns in random sequences. — Siberian Adv. Math., 1995, v. 5, № 3, p. 128–140.
6. Arratia R., Gordon L., Waterman M. S. An extreme value theory for sequence matching. — Ann. Statist., 1986, v. 14, № 3, p. 971–993.
7. Arratia R., Waterman M. S. The Erdős–Rényi strong law for pattern matching with a given proportion of mismatches. — Ann. Probab., 1989, v. 17, № 3, p. 1152–1169.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
9. Barbour A. D., Holst L., Janson S. Poisson Approximation. Oxford: Clarendon Press, 1992, 277 p.
10. Arratia R., Gordon L., Waterman M. S. The Erdős–Rényi law in distribution, for coin tossing and sequence matching. — Ann. Statist., 1990, v. 18, № 2, p. 539–570.
11. Зубков А. М. Оценки для сумм конечно-зависимых индикаторов и для момента первого наступления редкого события. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1986, т. 177, с. 33–46.

Поступила в редакцию
5.VII.1999

© 2002 г.

РОГОЗИН Б. А.*

**ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАЖОРИРУЕМО МЕНЯЮЩИХСЯ
УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ¹⁾**

Доказываются тауберовы теоремы для мажорируемо меняющихся убывающих функций, а также некоторые следствия из них.

Ключевые слова и фразы: тауберова теорема, мажорируемо меняющаяся функция, функция восстановления, возвратное случайное блуждание, время первого возвращения в 0.

Пусть F — распределение на $[0, \infty)$, $\bar{F}(x) = F([x, \infty))$ при $x \geq 0$. Функция $\bar{F}(x)$ называется надстепенной на бесконечности убывающей функцией (н. на б. уб. ф.), если при некотором λ ($0 < \lambda < 1$) $\liminf_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)/\bar{F}(x\lambda) > 0$. Если $\bar{F}$ — н. на б. уб. ф., то функция $G(t) = \bar{F}(1/t)$, $t \geq 0$, называется надстепенной в 0 возрастающей функцией (н. в 0 в. ф.), в этом случае $\liminf_{t \rightarrow 0} G(\lambda t)/G(t) > 0$.

* Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия; e-mail: rogozin@iitam.omsk.net.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99-01-01130, 00-15-96178) и INTAS (проект 00-265).