Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Рогозин, Тауберовы теоремы для мажорируемо меняющихся убывающих функций, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 2, 357–363

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:00:19

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубков А. М., Михайлов В. Г. Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, в. 1, с. 173–181.
2. Зубков А. М., Михайлов В. Г. О повторениях s -цепочек в последовательности независимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 2, с. 267–279.
3. Новак С. Ю. Пуассонова аппроксимация числа длинных «повторов» в случайных последовательностях. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 4, с. 731–742.
4. Новак С. Ю. Письмо в редакцию. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 3, с. 700.
5. Novak S. Yu. Long match patterns in random sequences. — Siberian Adv. Math., 1995, v. 5, № 3, p. 128–140.
6. Arratia R., Gordon L., Waterman M. S. An extreme value theory for sequence matching. — Ann. Statist., 1986, v. 14, № 3, p. 971–993.
7. Arratia R., Waterman M. S. The Erdős–Rényi strong law for pattern matching with a given proportion of mismatches. — Ann. Probab., 1989, v. 17, № 3, p. 1152–1169.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
9. Barbour A. D., Holst L., Janson S. Poisson Approximation. Oxford: Clarendon Press, 1992, 277 p.
10. Arratia R., Gordon L., Waterman M. S. The Erdős–Rényi law in distribution, for coin tossing and sequence matching. — Ann. Statist., 1990, v. 18, № 2, p. 539–570.
11. Зубков А. М. Оценки для сумм конечно-зависимых индикаторов и для момента первого наступления редкого события. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1986, т. 177, с. 33–46.

Поступила в редакцию
5.VII.1999

© 2002 г.

РОГОЗИН Б. А.*

**ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАЖОРИРУЕМО МЕНЯЮЩИХСЯ
УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ¹⁾**

Доказываются тауберовы теоремы для мажорируемо меняющихся убывающих функций, а также некоторые следствия из них.

Ключевые слова и фразы: тауберова теорема, мажорируемо меняющаяся функция, функция восстановления, возвратное случайное блуждание, время первого возвращения в 0.

Пусть F — распределение на $[0, \infty)$, $\bar{F}(x) = F([x, \infty))$ при $x \geq 0$. Функция $\bar{F}(x)$ называется надстепенной на бесконечности убывающей функцией (н. на б. уб. ф.), если при некотором λ ($0 < \lambda < 1$) $\liminf_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)/\bar{F}(x\lambda) > 0$. Если $\bar{F}$ — н. на б. уб. ф., то функция $G(t) = \bar{F}(1/t)$, $t \geq 0$, называется надстепенной в 0 возрастающей функцией (н. в 0 в. ф.), в этом случае $\liminf_{t \rightarrow 0} G(\lambda t)/G(t) > 0$.

* Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия; e-mail: rogozin@iitam.omsk.net.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99-01-01130, 00-15-96178) и INTAS (проект 00-265).

Эти классы функций под названием мажорируемо меняющихся в теорию вероятностей были введены в [1], [2]. Связанные с этими функциями результаты и дальнейшие ссылки содержатся в [3]. Близкие к этим классам функции использовались в [4] под названием надстепенных, это название нами используется и здесь.

Цель работы — доказать тауберовы теоремы для этих функций. Положим при $t \geq 0$

$$\hat{F}(t) = 1 - \int_0^\infty \exp\{-ty\} F(dy).$$

Теорема 1. Следующие утверждения выполняются одновременно:

1. $\bar{F}(y)$ — надстепенная на бесконечности убывающая функция, для которой

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \sup_{x > 0} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(xy)} = 0; \quad (1)$$

2. $\bar{F}(y)$ — надстепенная на бесконечности убывающая функция, для которой при некотором β ($0 < \beta < 1$)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-\beta} \sup_{x > 0} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(xy)} = 0; \quad (2)$$

3. $\hat{F}(t)$ — надстепенная в 0 возрастающая функция, для которой

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \sup_{t > 0} \frac{\hat{F}(t)}{\hat{F}(t\lambda)} = 0; \quad (3)$$

4. $\hat{F}(t)$ — надстепенная в 0 возрастающая функция, для которой при некотором β ($0 < \beta < 1$)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^\beta \sup_{t > 0} \frac{\hat{F}(t)}{\hat{F}(t\lambda)} = 0. \quad (4)$$

При этом

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(1/x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(1/x)} < \infty. \quad (5)$$

Доказательство. Сначала докажем, что из первого утверждения теоремы вытекает второе. Для этого установим неравенство, в определенной степени оправдывающее название функций как надстепенных: при $0 < \lambda \leq \lambda_0 < 1$ и $x \geq 0$

$$\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(\lambda x)} \geq \lambda^\beta \quad (6)$$

для некоторого β ($0 \leq \beta < 1$). Выполнение неравенства (6) при некотором $\beta > 0$ вытекает из теоремы П. 5 [3].

При $y \geq 1$ обозначим $\Phi(y) = \sup_{x \geq 0} \bar{F}(x)/\bar{F}(xy)$.

Лемма 1. Для надстепенной на бесконечности убывающей функции $\bar{F}$

$$\inf_{y \geq 1} \frac{\ln \Phi(y)}{\ln y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi(y)}{\ln y} = \alpha < \infty.$$

Доказательство. Используя рассуждения доказательства леммы П. 4 [3], получим при $y \geq 1, z \geq 1$

$$\Phi(yz) = \sup_{x \geq 0} \frac{\bar{F}(x) \bar{F}(xy)}{\bar{F}(xy) \bar{F}(xyz)} \leq \Phi(y) \Phi(z). \quad (7)$$

При $v \geq 0$ обозначим $\Psi(v) = \ln \Phi(e^v)$. Из неравенства (7) вытекает, что Ψ полуаддитивна на $\{0, \infty\}$, и с помощью теоремы 7.6.1 [5] получим утверждение леммы.

С помощью леммы 1 получаем, что $\ln \Phi(y) \geq \alpha \ln y$ при $y > 1$ и $\ln \Phi(y) \leq \beta \ln y$ при любом $\beta > \alpha$ и $y \geq y_0$ для достаточно большого y_0 , зависящего от β , или, при тех же условиях,

$$\Phi(y) \geq y^\alpha, \quad \Phi(y) \leq y^\beta. \quad (8)$$

Из первого неравенства (8) и соотношения (1) вытекает, что $\alpha < 1$, а с помощью второго неравенства (8) получаем неравенство (6), а также утверждение 2 теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Число α естественно назвать порядком изменения функции $1/\bar{F}(x)$ при $x \rightarrow \infty$, а число $-\alpha$ — порядком надстепенного изменения $\bar{F}(x)$ при $x \rightarrow \infty$, хотя это определение порядка изменения функции отличается от предлагаемого в [3]. Таким образом, выполнение соотношения (1) эквивалентно утверждению, что порядок изменения н. на б. уб. ф. $\bar{F}$ равен $-\alpha$ при некотором α , где $0 \leq \alpha < 1$. Определяя порядок надстепенного изменения в 0 для н. в 0 в. ф. $\hat{F}(t)$ как порядок надстепенного изменения на бесконечности н. на б. уб. ф. $\hat{F}(1/x)$ с противоположным знаком, получим, что утверждения 3 и 4 теоремы 1 равносильны утверждению, что $\hat{F}(t)$ имеет порядок надстепенного изменения в нуле $\alpha < 1$. Совпадение порядков изменения по модулю для функций $\hat{F}$ и $\bar{F}$ является следствием соотношений (5).

Для доказательства, что из утверждения 1 теоремы вытекает утверждение 3, приведем один результат. Пусть $X(1), X(2), \dots$ — последовательность независимых случайных величин с распределением F , $S(n) = X(1) + \dots + X(n)$, $n = 1, \dots$, $S(0) = 0$, $Z(y) = \min\{n: S(n) \geq y\}$, $y \geq 0$, $H(y) = \mathbf{E}Z(y)$ при $y \geq 0$, $H(y) = 0$ при $y < 0$.

Лемма 2. *Выполняются следующие неравенства: при $x > 0$*

$$\frac{x}{\int_0^x \bar{F}(y) dy} \leq H(x) \leq \frac{2x}{\int_0^x \bar{F}(y) dy}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим наряду с $S(n), Z(y)$ случайные величины $S_1(n), Z_1(y)$, соответствующие последовательности $X_1(1) = \min(X(1), x), \dots$ при некотором $x > 0$. Нетрудно заметить, что $\mathbf{E}Z_1(x) = H(x)$ и в силу тождества Вальда (см. [4, с. 318]) $\mathbf{E}S_1(Z_1(x)) = H(x) \mathbf{E}X_1(1)$. Откуда, так как $x \leq \mathbf{E}S_1(Z_1(x)) \leq 2x$, получим $x/\mathbf{E}X_1(1) \leq H(x) \leq 2x/\mathbf{E}X_1(1)$. Из этих двух неравенств немедленно следует утверждение леммы.

С помощью леммы 2 получаем, что соотношения

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x y F(dy)}{x \bar{F}(x)} < \infty, \quad (9)$$

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} H(x) \bar{F}(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} H(x) \bar{F}(x) < \infty, \quad (10)$$

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \bar{F}(y) dy}{x \bar{F}(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \bar{F}(y) dy}{x \bar{F}(x)} < \infty \quad (11)$$

выполняются одновременно.

При $x > 0$ из утверждения 1 теоремы вытекает (см. соотношение (6)), что

$$\frac{1}{x} \int_0^x \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} dy = \int_0^1 \frac{\bar{F}(\lambda x)}{\bar{F}(x)} d\lambda \leq \int_0^{\lambda_0} \lambda^{-\beta} d\lambda + (1 - \lambda_0) \lambda_0^{-\beta},$$

т.е. соотношения (11) выполняются, и потому имеет место (10).

Приведем одно известное свойство функции $H_1(x) = \inf_{y > x} H(y)$.

Лемма 3. *Функция $H_1(x)$ полуаддитивна на $[0, \infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $V = \min\{S(n): S(n) > y, n = 1, 2, \dots\}$, тогда

$$H_1(x+y) - H_1(y) = \int_{(y, x+y]} H_1(x+y-z) \mathbf{P}\{V \in dz\} \leq H_1(x).$$

Из этой леммы вытекает, что $H_1(2x) \leq 2H_1(x)$ при $x \geq 0$, т.е. функции $H_1(x)$ и $H(x)$ — мажорируемо меняющиеся на бесконечности, и поэтому имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{H(x)}{\hat{H}(1/x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{H(x)}{\hat{H}(1/x)} < \infty, \quad (12)$$

где $\hat{H}(t) = \int_{[0, \infty)} \exp\{-ty\} dH(y)$ при $t > 0$.

Доказательство. Для функции $U: U(x) = H(x) - H_1(0)$ при $x > 0$ и $U(x) = 0$ при $x \leq 0$, для которой $\hat{U}(t) = \int_{[0, \infty)} \exp\{-ty\} dU(y) = \hat{H}(t) - H_1(0)$ при $t > 0$, в силу теоремы 1 из [6] отношение $U(x)/\hat{U}(1/x)$ отделено от 0 и ограничено при x , стремящемся к бесконечности, откуда и следуют неравенства (12).

Следовательно, так как $\hat{H}(t) = 1/\hat{F}(t)$ и выполняются соотношения (10), то с помощью леммы 4 получим, что имеет место (5). Таким образом, из утверждения 1 вытекает утверждение 3 теоремы, и при этом выполняются соотношения (5).

Перейдем к доказательству того, что из утверждения 3 теоремы вытекает утверждение 1. Для этого снова установим выполнение соотношений (5). Отметим, что

$$\hat{F}(1/x) = \int_0^\infty (1 - e^{y/x}) F(dy) \geq \int_x^\infty (1 - e^{-y/x}) F(dy) \geq (1 - e^{-1}) \bar{F}(x),$$

т.е. $\limsup_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)/\hat{F}(1/x) < \infty$. Таким образом, необходимо доказать, что $\liminf_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)/\hat{F}(1/x) > 0$, и так как $\hat{F}$ — н. в. 0 в. ф., то достаточно установить, что при некотором $y > 0$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(yx)}{\hat{F}(1/x)} > 0. \quad (13)$$

Допустим, что (13) не выполняется, т.е. при любом $y > 0$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(yx)}{\hat{F}(1/x)} = 0. \quad (14)$$

Покажем, что существует последовательность $x_1, x_2, \dots$ такая, что при любом $y > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(yx_k)}{\hat{F}(1/x_k)} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty. \quad (15)$$

Положим $y_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$. Выберем число $x_k \geq x_i$ при $i = 1, \dots, k-1$, $x_k \geq k$, такое, что $\bar{F}(yx_k)/\hat{F}(1/x_k) \leq 1/k$, — это возможно в силу выполнения соотношения (14). Проверим, что для этой последовательности $x_1, x_2, \dots$ имеет место (15). Действительно, если $ky \geq 1$, то $\bar{F}(yx_k) \leq \bar{F}(yx_k) \leq \hat{F}(1/x_k)/k$, и, следовательно, выполняется соотношение (15).

Для так построенной последовательности $x_1, x_2, \dots$ обозначим при $y > 0$, $t > 0$ и $k = 1, 2, \dots$

$$\Psi_k(y) = -\frac{\bar{F}(yx_k)}{\hat{F}(1/x_k)}, \quad \hat{\Psi}_k(t) = \int_0^\infty (1 - e^{-ty}) d\Psi_k(y) = \frac{\hat{F}(t/x_k)}{\hat{F}(1/x_k)}.$$

Отметим, что $\phi_k(t) = \exp\{-\hat{\Psi}_k(t)\}$ есть преобразование Лапласа безгранично делимого распределения, сосредоточенного на положительной полуоси.

При $t > 0$ обозначим $\phi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(t) = \exp\{-\hat{\Psi}(t)\}$. Этот предел существует по крайней мере для подпоследовательности значений k . Функция $\phi(t)$ является преобразованием Лапласа безгранично делимого распределения, сосредоточенного на положительной полуоси.

Действительно, допустим, что $\hat{\Psi}(t) \geq c > 0$ при $t > 0$, но при $0 < t \leq 1$ и некоторой постоянной C_1

$$\hat{\Psi}_k(t) \leq -\Psi_k(1) + t \int_0^1 \frac{1 - e^{-ty}}{ty} y d\Psi_k(y) \leq -\Psi_k(1) + C_1 t.$$

Последнее неравенство следует из соотношений $\hat{F}(1/x) = 1/\hat{H}(1/x)$, (12) и неравенства $1/H(x) \geq (2x)^{-1} \int_0^x y F(dy)$, вытекающего из второго неравенства леммы 2. Поэтому для всех достаточно больших k и достаточно малых t $\hat{\Psi}_k(t) < c/2$ и, таким образом, для этих $t > 0$ $\hat{\Psi}(t) \leq c/2$. Следовательно, $\hat{\Psi}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \hat{\Psi}(t) = 0$, и при некотором $a \geq 0$ и $t \geq 0$

$$\hat{\Psi}(t) = at + \int_0^\infty (1 - e^{-ty}) d\Psi(y) = t. \quad (16)$$

Последнее равенство в (16) является следствием соотношений $\hat{\Psi}_k(1) = 1 = \hat{\Psi}(1)$ и $\Psi(y) = 0$ при $y > 0$.

Для функции $\hat{F}(1/y)$ в силу соотношения (3) имеет место соотношение (1) с заменой $\bar{F}(y)$ на $\hat{F}(1/y)$, а потому также лемма 1 и неравенство (6) с такой же заменой, откуда получим, что при $t \leq t_0 < 1$ и $x > 0$

$$\frac{\hat{F}(t/x)}{\hat{F}(1/x)} \geq t^\beta \quad (17)$$

при некотором β ($0 \leq \beta < 1$), что противоречит соотношению (16). Таким образом, соотношение (13) выполняется, а следовательно, имеет место (5), и потому из утверждения 3 теоремы вытекает утверждение 1. С помощью неравенства (17) получим утверждение 4 теоремы. Теорема доказана.

Теорема 1 благодаря неравенствам (12) и равенству $\hat{H}(t) = 1/\hat{F}(t)$ фактически устанавливает связь между асимптотическим поведением функции восстановления H и асимптотическим поведением соответствующего распределения F . Соберем вместе эти результаты.

Следствие 1. Утверждения 1 и 2 теоремы 1 и соотношения

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \sup_{x > 0} \frac{H(xy)}{H(x)} = 0, \quad (18)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-\beta} \sup_{x > 0} \frac{H(xy)}{H(x)} = 0 \quad \text{при некотором } \beta \ (0 < \beta < 1) \quad (19)$$

выполняются одновременно, и при этом также выполняются соотношения (6), (9), (10) и (11).

Применим следствие 1 для изучения времени первого возвращения в 0 возвратного случайного блуждания. Пусть $Y(0) = 0, Y(1), Y(2), \dots$ — последовательные положения однородного возвратного случайного блуждания с независимыми приращениями на множестве целых чисел. Пусть $T = \inf\{k \geq 1: Y(k) = 0\}$ — момент первого возвращения после 0 в 0 — имеет распределение F , $H_1(x) = \sum_{k \leq x} \mathbf{P}\{Y(k) = 0\}$ — функция восстановления, соответствующая распределению F .

В лемме 4 [7] для функции H_1 доказано соотношение

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-1} \sup_n \frac{H_1(ns)}{H_1(n)} = 0, \quad (20)$$

где n и s — целые числа, и с помощью этого соотношения устанавливается, что $\sup_n \mathbf{P}\{T \geq n\} / \mathbf{P}\{T \geq 2n\} < \infty$. Дополним эти результаты.

Следствие 2. Для распределения F случайной величины T и соответствующей функции восстановления H_1 выполняются утверждения 1 и 2 теоремы 1, а также соотношения (18), (19), (6), (9), (10) и (11).

Доказательство. Пусть $[x]$ — целая часть числа x , тогда при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ $H_1(x) = H_1([x])$ и

$$\frac{H_1(xy)}{H_1(x)} \leq \frac{H_1([x] + 1)([y] + 1)}{H_1([x])} \leq \frac{H_1([x][y])}{H_1([x])} + H_1([y]) + 1 + H_1(1).$$

Откуда, поскольку $\lim_{y \rightarrow \infty} H_1(y)/y = 1/ET = 0$, получаем, что соотношение (18) вытекает из (20). С помощью следствия 1 устанавливаем справедливость остальных утверждений следствия 2.

Замечание 2. Для F — распределения T — выполняется соотношение $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x+1)/\bar{F}(x) = 1$ (см. [8, с. 445]), и так как $\bar{F}$ — н. на б. уб. ф., то для свертки $F * F$ имеет место соотношение $\lim_{x \rightarrow \infty} F * F([x, \infty))/\bar{F}(x) = 2$, т.е. F — субэкспоненциальное распределение, и при этом

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x) \sum_{k \leq x} \mathbf{P}\{Y(k) = 0\} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x) \sum_{k \leq x} \mathbf{P}\{Y(k) = 0\} < \infty.$$

Приведем еще один вариант тауберовой теоремы.

Теорема 2. Следующие соотношения:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{H(xy)}{H(x)} = 0, \quad (21)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-\beta} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{H(xy)}{H(x)} = 0 \quad \text{при некотором } \beta \ (0 < \beta < 1), \quad (22)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\lambda x} y F(dy)}{x \bar{F}(x)} = 0, \quad (23)$$

выполняются одновременно. При этом также выполняются соотношения (9), (10) и (11).

Доказательство. Пусть выполнено соотношение (21). Воспользуемся в этом случае аналогом леммы 1 с заменой Φ на $\Phi_1(y) = \limsup_{x \rightarrow \infty} H(xy)/H(x)$ при $y \geq 1$ и α на α_1 (ср. с леммой П.4 [3]). Характеристику α_1 можно назвать асимптотическим порядком изменения функции H . Для Φ_1 имеют место неравенства, аналогичные (8), с заменой α на α_1 , и так как в силу (21) $\alpha_1 < 1$, то имеет место (22). Неравенства (10) при выполнении соотношения (21) устанавливаются повторением доказательства теоремы 1 в части вывода неравенств (5) при выполнении утверждения 3. Из соотношений (10) следуют неравенства (9) и (11). Далее, в силу (10) и (21)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sup \bar{F}(x)}{\bar{F}(xy)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda \bar{F}(\lambda x)}{\bar{F}(x)} = 0, \quad (24)$$

откуда с помощью (9) получаем соотношение (23).

Предположим, что выполняется соотношение (23), тогда при некотором λ ($0 < \lambda < 1$)

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\lambda x} y F(dy)}{\lambda x \bar{F}(\lambda x)} \frac{\lambda \bar{F}(\lambda x)}{\bar{F}(x)} < \infty. \quad (25)$$

Откуда получаем, что соотношения (9), а потому (10) выполняются, и в силу (25) имеет место (24), а следовательно, (21). Это завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е 3. Если использовать для определения порядка изменения H функцию $\sup_{x>0} H(xy)/H(x)$ при $y \geq 1$, то, обозначая через α_0 этот порядок изменения, получим $\alpha_0 \geq \alpha_1$. Для характеристики α_1 — асимптотического порядка изменения на бесконечности функции $H(x)$, выполнение соотношений (21) или (22) равносильно утверждению, что асимптотический порядок изменения на бесконечности функции H равен $\alpha_1 < 1$. Определяя асимптотический порядок надстепенного изменения на бесконечности функции $\bar{F}$ как асимптотический порядок изменения на бесконечности функции $1/\bar{F}(x)$ с противоположным знаком, получим из соотношения (23) с помощью (24) и (10), что асимптотический порядок надстепенного изменения на бесконечности функции $\bar{F}$ равен $-\alpha_1 > -1$.

З а м е ч а н и е 4. Соотношение (23) выполняется тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (9) и (24), или соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\lambda x} \bar{F}(y) dy}{x \bar{F}(x)} = 0, \quad (26)$$

или (11) и (24). Так как при этом выполняется соотношение (10), то получаем, что из (23) вытекает соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{H(x)}{x} \int_{(0, \lambda x)} \frac{1}{H(y)} dy = 0. \quad (27)$$

Применяя далее теорему 2 и замечание 3 к н. на б. уб. ф. $\bar{F}_1(x) = 1/H(x)$ при $x > 0$, получим, что ее порядок надстепенного изменения в силу (27) больше -1 , а следовательно, порядок изменения H будет меньше 1. Таким образом, соотношения (26), (27), (21)–(23) и условие, что асимптотический порядок изменения H на бесконечности меньше 1, выполняются одновременно. Вопрос, не будет ли из условия, что асимптотический порядок надстепенного изменения $\bar{F}$ больше -1 , вытекать выполнение соотношения (23), остается открытым.

Пусть G — σ -конечная мера на $[0, \infty)$ и $G([0, x]) = \int_0^x g(y) dy$. При $t > 0$ положим $\widehat{G}(t) = \int_0^\infty g(y) e^{-ty} dy$. Будем обозначать $f(x) \simeq g(x)$, $x \rightarrow \infty$, если $0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} g(x)/f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} g(x)/f(x) < \infty$. Аналогичные обозначения будем использовать и при $t \rightarrow 0$. Приведем тауберову теорему для плотности g (ср. с теоремой 4 [9, с. 513]).

Следствие 3. Пусть $g(x) \simeq f(x)$, $x \rightarrow \infty$.

1. Если неотрицательная функция $f(x)$ монотонно не убывает при $x \geq 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, то утверждения

а) $1/f(x)$ — надстепенная на бесконечности убывающая функция, или $\liminf_{x \rightarrow \infty} g(\lambda x)/g(x) > 0$ при некотором λ ($0 < \lambda < 1$),

б) $(\widehat{G}(t)t)^{-1}$ — надстепенная в 0 возрастающая функция,

в) $xg(x) \simeq \widehat{G}(1/x)$, $x \rightarrow \infty$,

выполняются одновременно.

2. Если $f(x)$ монотонно не возрастает при $x > 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, то соотношения

$$\text{а) } \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \sup_{x > 0} \frac{f(x)}{f(xy)} = 0 \quad \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\lambda x} g(y) dy}{xg(x)} = 0 \right),$$

$$\text{б) } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sup_{t > 0} \frac{\widehat{G}(t)}{\widehat{G}(t\lambda)} = 0 \quad \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\widehat{G}(t)}{\widehat{G}(t\lambda)} = 0 \right)$$

выполняются одновременно, и при этом $xg(x) \simeq \widehat{G}(1/x)$, $x \rightarrow \infty$.

3. Соотношения а) $g(x) \simeq 1$, $x \rightarrow \infty$, б) $t\widehat{G}(t) \simeq 1$, $t \rightarrow 0$, выполняются одновременно.

Доказательство. Пусть $f_1(x) = \sup_{y < x} f(y)$ при $x > 0$ и $f_1(0) = 0$, если выполняются условия п. 1 следствия, и $f_1(x) = \sup_{y > x} f(y)$ при $x > 0$ и $f_1(0) = 0$, если выполнены условия п. 2. Тогда при $t \rightarrow 0$

$$\widehat{G}(t) \simeq \int_0^\infty f_1(y) e^{-ty} dy = t^{-1} \int_{[0, \infty)} e^{-ty} df_1(y).$$

С помощью этого соотношения и теоремы 1 [6] получаем утверждение п. 1, а применяя теоремы 1 и 2 и соотношение (26) этой работы, получаем утверждение п. 2. Утверждение п. 3 очевидно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feller W. On regular variation and local limit theorems. — Proceeding of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Part I. Berkeley, Calif.: Univ. of California Press, 1967, p. 373–388.
2. Feller W. One-sided analogues of Karamata's regular variation. — Enseign. Math., 1969, v. 15, p. 107–121.
3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
4. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
5. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962, 829 с.
6. Haan L. de, Stadtmüller U. Dominated variation and related concepts and Tauberian theorems for Laplace transforms. — J. Math. Anal. Appl., 1985, v. 108, p. 344–365.
7. Kesten H., Spitzer F. Ratio theorems for random walks. I. — J. Anal. Math., v. 11, 1963, p. 285–322.
8. Спitzer Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967, 752 с.

Поступила в редакцию
14.III.2001