Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Степанов, Условные распределения времен односторонних последовательных приближений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 2, 364–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3656>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:51:43

© 2002 г.

СТЕПАНОВ А. В.*

УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕН ОДНОСТОРОННИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин с общей непрерывной функцией распределения $F(x)$. Пусть a — произвольная точка на носителе вероятностной меры. В настоящей работе рассматриваются случайные индексы тех X , которые стремятся к точке a слева. Изучаются условные распределения таких случайных величин, а также формулируются некоторые предельные законы для них.

Ключевые слова и фразы: времена и величины односторонних последовательных приближений, рекордные моменты и величины, предельные теоремы.

1. Введение. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины (с.в.) с общей непрерывной функцией распределения $F(x)$. Пусть интервал $I = (\gamma, \beta)$, где $-\infty \leq \gamma < \beta \leq \infty$, — носитель вероятностной меры. Рассмотрим последовательности величин односторонних последовательных приближений (о.п.п.) $V_{(n)}^a$ и времен о.п.п. $T^a(n)$, задаваемых следующим образом:

$$\begin{aligned} T^a(0) &= 0, & X_0 &= V^a(0) = \gamma, \\ T^a(n+1) &= \min \left\{ j: j > T^a(n), X_{T^a(n)} < X_j < a \right\}, \\ V_{(n)}^a &= X_{T^a(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

где $a \in I$. При $a = \beta$ из $V_{(n)}^a$ мы получаем известные рекордные величины, а из $T^a(n)$ — рекордные времена, которые в дальнейшем будем обозначать $X_{(n)}$ и $L(n)$ соответственно. Величины $V_{(n)}^a$ и $T^a(n)$ рассматривались в работах [1]–[3]. Поведение величин $V_{(n)}^a$ практически полностью повторяет поведение рекордных величин $X_{(n)}$ (см. [1]) и не требует дальнейшего изучения. Для времен о.п.п. ситуация иная. Так, если распределения последовательностей $L(n)$ не зависят от первоначального непрерывного распределения $F(x)$ и имеют вид:

$$\begin{aligned} &P\{L(1) = k_1, L(2) = k_2, \dots, L(n-1) = k_{n-1}, L(n) \geq k_n\} \\ &= \frac{1}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1) \cdots (k_n - k_1)} \end{aligned} \quad (1)$$

(здесь $k_1 \equiv 1, k_1 < k_2 < \dots < k_n$), то уже для величин $T^a(n)$ справедлива формула [1]

$$\begin{aligned} &P\{T^a(1) = k_1, T^a(2) = k_2, \dots, T^a(n-1) = k_{n-1}, T^a(n) \geq k_n\} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(1 - F(a))^{k_i - 1}}{(k_1 - k_i) \cdots (k_{i-1} - k_i)(k_{i+1} - k_i) \cdots (k_n - k_i)} \end{aligned} \quad (2)$$

($1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$), где крайние члены в последней сумме выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} (i=1) & \quad \frac{(1 - F(a))^{k_1 - 1}}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1) \cdots (k_n - k_1)}, \\ (i=n) & \quad \frac{(1 - F(a))^{k_n - 1}}{(k_1 - k_n)(k_3 - k_n) \cdots (k_{n-1} - k_n)}. \end{aligned}$$

Из формулы (2) вытекает (1) при $a \rightarrow \beta, k_1 = 1$, так как все члены суммы кроме первого обращаются в нуль.

В данной работе мы рассмотрим условные распределения величин $T^a(n)$ и предельное поведение величин $\Delta^a(n)(F(a) - F(V_{(n-1)}^a))$, где $\Delta^a(n) = T^a(n) - T^a(n-1)$.

* Калининградский государственный технический университет, Советский просп., 1, 236000 Калининград, Россия.

2. Результаты.

Теорема. Последовательность векторов $(T^a(n), V^a(n))$, $n \geq 1$, образует цепь Маркова, причем

$$\mathbf{P}\left\{T^a(n) = j, V_{(n)}^a > x \mid V_{(1)}^a, T^a(1), \dots, V_{(n-2)}^a, T^a(n-2), V_{(n-1)}^a = y, \right. \\ \left. T^a(n-1) = i\right\} = (F(a) - F(x))(1 - F(a) + F(y))^{j-i-1} \quad (3)$$

Следствие. При $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\Delta^a(n)(F(a) - F(V_{(n-1)}^a)) \rightarrow \xi \quad \text{по вероятности,}$$

где ξ имеет стандартное показательное распределение.

Доказательство теоремы. Пусть исходные с.в. X_i имеют плотность $p(x)$. Рассмотрим систему с.в. $Z_n = \{T^a(1), T^a(2), \dots, T^a(n), V_{(1)}^a, V_{(2)}^a, \dots, V_{(n)}^a\}$. Пусть $f_{Z_n}(i_1, i_2, \dots, i_n, x_1, x_2, \dots, x_n)$ — плотность-распределение этого случайного вектора, где распределение задается для величин $T^a(k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, а плотность — для величин $V_{(k)}^a$, $k = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, что $f_{Z_1}(i_1, x_1) = (1 - F(a))^{i_1-1}p(x_1)$ ($\gamma < x_1 < a$). Также верно равенство

$$f_{Z_2}(i_1, i_2, x_1, x_2) = (1 - F(a))^{i_1-1}p(x_1)(1 - F(a) + F(x))^{i_2-i_1-1}p(x_2),$$

которое можно записать и для произвольного n при $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ и $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ следующим образом:

$$f_{Z_n}(i_1, i_2, \dots, i_n, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = (1 - F(a))^{i_1-1}p(x_1) \prod_{k=1}^{n-1} ((1 - F(a) + F(x_k))^{i_{k+1}-i_k-1}p(x_{k+1})).$$

Из последней формулы находим условную плотность-распределение f величины Z_n при условии, что вектор Z_{n-1} принял значения $Z_{n-1} = \{i_1, \dots, i_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-1}\}$: $f = p(x_n)(1 - F(a) + F(x_{n-1}))^{i_n-i_{n-1}-1}$. Интегрируя последнее равенство по x_n в области (x_{n-1}, a) и проводя соответствующую замену переменных, получаем соотношение (3).

З а м е ч а н и е. Теорема остается верной при достаточно широких условиях. В частности, при отказе от существования плотности у исходных с.в.

Доказательство следствия. Из (3) следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\Delta^a(n) = m, V_{(n)}^a > x \mid T^a(n-1) = i, V_{(n-1)}^a = y\right\} \\ = (F(a) - F(x))(F(y) + 1 - F(a))^{m-1}$$

(где $m \geq 1$ целое), откуда для произвольного $m \geq 0$

$$\mathbf{P}\left\{\Delta^a(n) = m \mid V_{(n-1)}^a = y\right\} = (1 - F(a) + F(y))^{[m]}, \quad (4)$$

здесь $[x]$ — целая часть числа x . Из последней формулы получаем равенство

$$\mathbf{P}\left\{\Delta^a(n)(F(a) - F(V_{(n-1)}^a)) > x \mid V_{(n-1)}^a = y\right\} = (1 - F(a) + F(y))^{[x/(F(a)-F(y))]} \quad (5)$$

Известно, что если исходное распределение $F(x)$ непрерывно, то для рекордных величин справедливо соотношение $F(X_{(n)}) \rightarrow 1$ по вероятности (см. [4]). В [1] было показано, что распределения с.в. $V_{(n)}^a$ такие же, как и распределения величин $Z_{(n)}$, где $Z_{(n)}$ — рекордные величины в последовательности Z_i ($i \geq 1$) с непрерывной функцией распределения $F(x)/F(a)$ ($\gamma \leq x \leq a$). Следовательно, $F(V_{(n)}^a) \rightarrow F(a)$ по вероятности. Учитывая соотношение

$$\frac{x}{F(a) - F(y)} - 1 < \left\lceil \frac{x}{F(a) - F(y)} \right\rceil < \frac{x}{F(a) - F(y)},$$

из формулы (5) получаем требуемое.

З а м е ч а н и е. Результаты работы останутся верными и в случае, если $F(x)$ непрерывна лишь левее точки a .

Автор признателен рецензенту за благожелательное отношение при устранении ошибок и неточностей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов А. В. Экстремальные порядковые статистики при изменении отношения порядка. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 896–900.
2. Stepanov A. V. Limit laws for times of one-sided sequential approximations. — International Conference «Asymptotic Methods in Probability and Mathematical Statistics» dedicated to the 50-th Anniversary of the Chair of Probability and Statistics in St. Petersburg University, St. Petersburg, 1998.
3. Stepanov A. V. Limit behavior of the times of one-sided successive approximations. — Istatistik, Journal of the Turkish Statist. Association, 1998, v. 1, № 3, p. 43–46.
4. Невзоров В. Б. Рекорды. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 2, с. 219–251.

Поступила в редакцию
26.III.1999

© 2002 г.

ФРОЛОВ А. Н.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ БОЛЬШИХ ПРИРАЩЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Исследовано асимптотическое поведение почти наверное больших (длины более логарифма) приращений сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин с нулевыми средними, конечными дисперсиями и производящими функциями моментов, конечными в некотором интервале с левым концом в нуле. Полученные результаты обобщают известные результаты М. Чёргё и П. Ревеса.

Ключевые слова и фразы: приращения сумм независимых случайных величин, большие приращения, законы сильной аппроксимации, законы Эрдёша–Реньи и Шеппа.

1. Введение. Пусть $\{X_k\}$ — последовательность независимых случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность натуральных чисел, $1 \leq a_n \leq n$.

Настоящая работа посвящена исследованию предельного поведения почти наверное максимумов

$$U_n = \max_{0 \leq k \leq n - a_n} (S_{k+a_n} - S_k),$$

описывающих колебания максимального выигрыша игрока в a_n последовательных партиях некоторой игры. Впервые статистики такого типа рассматривали Эрдёш, Реньи [1] и Шепп [2].

Для одинаково распределенных случайных величин асимптотическое поведение статистик типа U_n изучено в работах [1]–[8], в которых найдены условия, необходимые и/или достаточные для того, чтобы

$$\limsup \frac{U_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.}, \tag{1}$$

* С.-Петербургский государственный университет; математико-механический факультет, Библиотечная пл. 2, Старый Петергоф, 198904 С.-Петербург, Россия; e-mail: Andrei.Frolov@inbox.spbu.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Грантового центра Новосибирского государственного университета, грант № 1997-3-32, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00732.