Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Фролов, Об асимптотическом поведении больших приращений сумм независимых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 2, 366–374

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3668>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:05:43

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов А. В. Экстремальные порядковые статистики при изменении отношения порядка. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 896–900.
2. Stepanov A. V. Limit laws for times of one-sided sequential approximations. — International Conference «Asymptotic Methods in Probability and Mathematical Statistics» dedicated to the 50-th Anniversary of the Chair of Probability and Statistics in St. Petersburg University, St. Petersburg, 1998.
3. Stepanov A. V. Limit behavior of the times of one-sided successive approximations. — Istatistik, Journal of the Turkish Statist. Association, 1998, v. 1, № 3, p. 43–46.
4. Невзоров В. Б. Рекорды. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 2, с. 219–251.

Поступила в редакцию
26.III.1999

© 2002 г.

ФРОЛОВ А. Н.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ БОЛЬШИХ ПРИРАЩЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Исследовано асимптотическое поведение почти наверное больших (длины более логарифма) приращений сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин с нулевыми средними, конечными дисперсиями и производящими функциями моментов, конечными в некотором интервале с левым концом в нуле. Полученные результаты обобщают известные результаты М. Чёргё и П. Ревеса.

Ключевые слова и фразы: приращения сумм независимых случайных величин, большие приращения, законы сильной аппроксимации, законы Эрдёша–Реньи и Шеппа.

1. Введение. Пусть $\{X_k\}$ — последовательность независимых случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность натуральных чисел, $1 \leq a_n \leq n$.

Настоящая работа посвящена исследованию предельного поведения почти наверное максимумов

$$U_n = \max_{0 \leq k \leq n - a_n} (S_{k+a_n} - S_k),$$

описывающих колебания максимального выигрыша игрока в a_n последовательных партиях некоторой игры. Впервые статистики такого типа рассматривали Эрдёш, Реньи [1] и Шепп [2].

Для одинаково распределенных случайных величин асимптотическое поведение статистик типа U_n изучено в работах [1]–[8], в которых найдены условия, необходимые и/или достаточные для того, чтобы

$$\limsup \frac{U_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.}, \tag{1}$$

* С.-Петербургский государственный университет; математико-механический факультет, Библиотечная пл. 2, Старый Петергоф, 198904 С.-Петербург, Россия; e-mail: Andrei.Frolov@inbox.spbu.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Грантового центра Новосибирского государственного университета, грант № 1997-3-32, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00732.

где $\{b_n\}$ — некоторая последовательность положительных постоянных. При этом $\limsup$ в (1) можно заменить на $\lim$ для широкого класса последовательностей $\{a_n\}$. В этих результатах моментные условия, накладываемые на X_1 , определяют минимальную скорость роста a_n , для которой можно получить (1). Поэтому наиболее интересен случай, когда у X_1 существует экспоненциальный момент. Этот случай мы и рассматриваем в дальнейшем.

Выделяются два различных типа поведения U_n . В случае малых ($a_n = O(\ln n)$) приращений нормирующая последовательность b_n и распределение X_1 однозначно определяют друг друга. Этот случай исследован в работах [1], [2], [4]–[6] и др. Для больших ($a_n/\ln n \rightarrow \infty$) приращений нормировка в (1) та же, что и в гауссовском случае: $b_n = (2EX_1^2 a_n (\ln(n/a_n) + \ln \ln n))^{1/2}$. Изучению асимптотики больших приращений посвящены работы [3], [4], [7], [8]. В остальной части статьи мы рассматриваем только большие приращения.

Предельное поведение больших приращений сумм неодинаково распределенных случайных величин исследовано в работах [9]–[13]. В [9], [11]–[13] рассматривались максимумы типа $\max_{0 \leq k \leq n-a_n} (S_{k+a_n} - S_k)/b_{n,k}$ при различных двусторонних моментных предположениях. В [10] изучено поведение U_n при выполнении условия Бернштейна.

В настоящей работе найдены достаточные для (1) условия в случае неодинаково распределенных случайных величин, у которых производящие функции моментов существуют в интервале с левым концом в нуле. Полученные результаты распространяют на случай неодинаково распределенных случайных величин результаты автора [8], обобщающие теоремы Чёргё-Ревеса [3]. Отметим, что в доказательстве результатов для больших приращений при двусторонних моментных предположениях используются результаты Комлоша-Майора-Тушнади или результаты Саханенко о сильной аппроксимации сумм независимых случайных величин винеровским процессом. В нашем случае этот подход невозможен, так как точность такой аппроксимации недостаточна. Поэтому мы используем технику, подобную той, что применяется при доказательстве теорем типа закона повторного логарифма.

Всюду, где использованы символы $\sim$, o , O , $\rightarrow$, $\limsup$ и $\liminf$, считаем, что $n \rightarrow \infty$, если не оговорено противное.

2. Основные результаты. Пусть $\{X_k\}$ — последовательность независимых случайных величин с $EX_k = 0$, $DX_k = \sigma_k^2$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $B_0 = 0$, $B_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Пусть $B_n \rightarrow \infty$.

Пусть $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность натуральных чисел, $1 \leq a_n \leq n$. Обозначим

$$U_n = \max_{0 \leq k \leq n-a_n} (S_{k+a_n} - S_k), \quad V_n = \max_{1 \leq j \leq a_n} (S_{j+n-a_n} - S_{n-a_n}),$$

$$W_n = \max_{0 \leq k \leq n-a_n} \max_{1 \leq j \leq a_n} (S_{k+j} - S_k), \quad T_n = S_{n+a_n} - S_n.$$

Пусть $b(x, y) = (2x(\ln(y/x) + \ln \ln y))^{1/2}$.

Положим $B_n^* = \max_{0 \leq k \leq n-a_n} (B_{k+a_n} - B_k)$, $b_n = b(B_n^*, B_n)$.

Сформулируем сначала результат, дающий представление о наибольшей возможной скорости роста больших приращений.

Теорема 1. Пусть $\varphi_k(h) = E \exp\{hX_k\} < \infty$ при $0 \leq h < h_0$ для всех k . Пусть

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_k \frac{\varphi_k(h) - 1}{h^2 \sigma_k^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $B_n/B_n^* \sim \alpha_n$, α_n не убывает;
- 2) $B_n^*/\ln B_n \rightarrow \infty$;
- 3) $\max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2/B_n^* \rightarrow 0$.

Тогда

$$\limsup \frac{W_n}{b_n} \leq 1 \quad \text{н.н.} \quad (3)$$

Отметим, что если в последовательности функций распределения случайных величин X_k число различных функций конечно, то условия (2) и 3) выполнены. Кроме того, имеет место следующее предложение.

З а м е ч а н и е 1. Условие (2) выполнено, если

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_k \frac{\mathbf{E} X_k^2 e^{h X_k^+}}{\sigma_k^2} \leq 1, \quad (4)$$

где $X_k^+ = \max\{X_k, 0\}$.

Действительно, по формуле Тейлора

$$\frac{\varphi_k(h) - 1}{h^2 \sigma_k^2} = \frac{\varphi_k''(\theta)}{2 \sigma_k^2} \leq \frac{\mathbf{E} X_k^2 e^{\theta X_k^+}}{2 \sigma_k^2} \leq \frac{\mathbf{E} X_k^2 e^{h X_k^+}}{2 \sigma_k^2},$$

где $0 < \theta < h$. Условие (4) можно рассматривать как равномерное правостороннее условие типа условия Саханенко: *существует $\lambda > 0$ такое, что $\mathbf{E} X_k^2 e^{\lambda |X_k|} \leq 3 \sigma_k^2$ для всех k* . Хорошо известно, что условие Саханенко эквивалентно классическому условию Бернштейна.

Перейдем теперь к оценкам снизу. Обозначим для $i < j$

$$\Lambda(i, j, y) = \frac{1}{B_j - B_i} \sum_{k=i+1}^j \mathbf{E} X_k^2 \min\{1, y |X_k|\}. \quad (5)$$

Положим $\tilde{B}_n = B_n - B_{n-a_n}$, $\tilde{b}_n = b(\tilde{B}_n, B_n)$.

Теорема 2. Пусть

$$\Lambda(n - a_n, n, \varepsilon \tilde{b}_n (\tilde{B}_n)^{-1}) \rightarrow 0 \quad (6)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Пусть $B_n / \tilde{B}_n \sim \beta_n$, β_n не убывает. Если $\beta_n \rightarrow 1$, то предположим, что $\sigma_n^2 / B_n \rightarrow 0$. Тогда

$$\limsup \frac{S_n - S_{n-a_n}}{\tilde{b}_n} \geq 1 \quad \text{н.н.} \quad (7)$$

Аналогичная теорема имеет место и для T_n . Положим

$$\bar{B}_n = B_{n+a_n} - B_n, \quad \bar{b}_n = b(\bar{B}_n, B_{n+a_n}).$$

Теорема 3. Пусть

$$\Lambda(n, n + a_n, \varepsilon \bar{b}_n (\bar{B}_n)^{-1}) \rightarrow 0 \quad (8)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Пусть $B_{n+a_n} / \bar{B}_n \sim \gamma_n$, γ_n не убывает. Если $\gamma_n \rightarrow 1$, то предположим, что $\sigma_{n+a_n}^2 / B_{n+a_n} \rightarrow 0$. Тогда

$$\limsup \frac{T_n}{\bar{b}_n} \geq 1 \quad \text{н.н.} \quad (9)$$

При дополнительных ограничениях для U_n можно улучшить оценку снизу из теоремы 2. Обозначим

$$B'_n = \min_{0 \leq k \leq n/a_n - 1} (B_{(k+1)a_n} - B_{ka_n}).$$

Теорема 4. Пусть $B_n / B_n^* \sim \alpha_n$, α_n не убывает. Пусть

$$\frac{\ln(B_n / B_n^*)}{\ln \ln \max(B_n, n)} \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Пусть $B'_n / B_n^* \rightarrow 1$. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\max_{0 \leq k \leq n/a_n - 1} \Lambda(ka_n, (k+1)a_n, \varepsilon b_n (B_n^*)^{-1}) \rightarrow 0. \quad (11)$$

Тогда

$$\liminf \frac{U_n}{b_n} \geq 1 \quad \text{н.н.} \quad (12)$$

Положим $M_n(\delta) = \#\{k: 0 \leq k \leq n/a_n - 1, B_{(k+1)a_n} - B_{ka_n} \geq (1 - \delta)B_n^*\}$, где $0 < \delta < 1$, $\#A$ — число элементов множества A .

З а м е ч а н и е 2. Условия $B_n'/B_n^* \rightarrow 1$ и (11) можно заменить более слабыми условиями:

- 1) $\forall \delta > 0 \quad \liminf \frac{M_n(\delta)}{n/a_n} > 0$,
- 2) $\forall \varepsilon, \delta > 0 \quad \max_{k \in M_n(\delta)} \Lambda(ka_n, (k+1)a_n, \varepsilon b_n(B_n^*)^{-1}) \rightarrow 0$.

Из теорем 1, 2 и 4 вытекает

Теорема 5. Пусть выполнены условия теорем 1 и 2. Предположим, что $B_n^*/\bar{B}_n \rightarrow 1$. Тогда

$$\limsup \frac{W_n}{b_n} = \limsup \frac{U_n}{b_n} = \limsup \frac{V_n}{b_n} = 1 \quad \text{н.н.}$$

Если дополнительно предположить, что выполнены условия теоремы 4, то в последнем соотношении $\limsup$ можно заменить на $\lim$ для W_n и U_n .

Если в условиях теоремы 5 случайные величины одинаково распределены и $\mathbf{E}X_1^2 f(|X_1|) < \infty$, где $f(x)$ — неубывающая функция такая, что $x/f(x)$ не убывает и $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, то мы получим результат, близкий к теореме 1 работы автора [8], где $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$. Отметим, что условия теоремы 1 из [8] оптимальны.

В заключение мы сформулируем теорему о поведении T_n и одной мажорирующей ее статистики. Положим

$$R_n = \max_{0 \leq k \leq n} \max_{1 \leq j \leq a_n} (S_{k+j} - S_k), \quad \hat{B}_n = \max_{0 \leq k \leq n} (B_{k+a_n} - B_k), \quad \hat{b}_n = b(\hat{B}_n, B_{n+a_n}).$$

Теорема 6. Пусть выполнено условие (2) и следующие условия:

- 1) $B_{n+a_n}/\bar{B}_n \sim \alpha_n$, α_n не убывает;
- 2) $\bar{B}_n/\ln B_{n+a_n} \rightarrow \infty$;
- 3) $\max_{1 \leq k \leq n+a_n} \sigma_k^2/\bar{B}_n \rightarrow 0$.

Пусть выполнены условия теоремы 3 и $\hat{B}_n/\bar{B}_n \rightarrow 1$. Тогда

$$\limsup \frac{R_n}{\hat{b}_n} = \limsup \frac{T_n}{\hat{b}_n} = 1 \quad \text{н.н.}$$

3. Доказательства. Для доказательства теоремы 1 нам потребуется несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1. Пусть $\{X_k\}$ — последовательность независимых случайных величин с $\mathbf{E}X_k = 0$, $\mathbf{D}X_k = \sigma_k^2$. Положим $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Если выполнено условие (2), то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}\{S_{n+k} - S_n \geq y\} \leq \exp \left\{ - \frac{y^2}{2(1+\varepsilon)(B_{n+k} - B_n)} \right\} \quad (13)$$

для всех $0 \leq y \leq \delta(1+\varepsilon)(B_{n+k} - B_n)$ и всех k и n .

Доказательство. Из условия (2) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\varphi_k(h) \leq 1 + \frac{1}{2} h^2 \sigma_k^2 (1+\varepsilon) \leq e^{h^2 \sigma_k^2 (1+\varepsilon)/2}$ для всех $0 \leq h \leq \delta$ и всех k . По теореме 16 главы 3 книги Петрова [14] получаем (13).

Лемма 2. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_{N+K}$ — независимые случайные величины с $\mathbf{E}X_k = 0$, $\mathbf{D}X_k = \sigma_k^2$. Положим $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $S_0 = 0$, $B_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$, $B_0 = 0$. Тогда для любого вещественного x и любого $q \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\left\{ \max_{0 \leq n \leq N} \max_{1 \leq k \leq K} (S_{n+k} - S_n) \geq x \right\} \leq q^{-2} \mathbf{P}\left\{ S_{N+K} \geq x - 2 \left(\frac{B_{N+K}}{1-q} \right)^{1/2} \right\}.$$

Доказательство леммы 2 проводится по образцу доказательства теоремы 14 главы 3 монографии Петрова [14]. Сначала мы докажем три леммы.

Лемма 3. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_{N+K}$ — независимые случайные величины, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $S_0 = 0$. Пусть $\kappa_q(-S_n)$ — квантиль порядка q случайной величины $-S_n$, $q \in (0, 1)$, $\kappa_q(0) = 0$. Тогда для любого вещественного x выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq n \leq N} \max_{1 \leq k \leq K} (S_{n+k} - S_n - \kappa_q(-S_n)) \geq x\right\} \leq q^{-1} \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq N+K} S_k \geq x\right\}.$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{S}_{n,k} = S_{n+k} - S_n - \kappa_q(-S_n)$, $\bar{S}_n = S_n - \kappa_{1-q}(S_n)$, $M_{NK} = \max_{0 \leq n \leq N} \max_{1 \leq k \leq K} \tilde{S}_{n,k}$. Для $m = 1, 2, \dots, N+1$ определим события

$$\begin{aligned} D_{m1} &= \left\{ \max_{N-m+2 \leq n \leq N} \max_{1 \leq k \leq K} \tilde{S}_{n,k} < x, \tilde{S}_{N-m+1,1} \geq x \right\}, \\ D_{mk} &= \left\{ \max_{N-m+2 \leq n \leq N} \max_{1 \leq k \leq K} \tilde{S}_{n,k} < x, \tilde{S}_{N-m+1,l} < x \right. \\ &\quad \left. \text{при } l = 1, \dots, k-1, \tilde{S}_{N-m+1,k} \geq x \right\}, \quad k = 2, \dots, K, \\ E_m &= \{\bar{S}_{N-m+1} \geq 0\}. \end{aligned}$$

Мы считаем, что неравенства выполнены, если максимум берется по пустому множеству индексов, а E_{N+1} — достоверное событие.

По построению события D_{mk} и E_m независимы для любого k , и $\mathbf{P}\{M_{NK} \geq x\} = \sum_{m,k} \mathbf{P}(D_{mk})$. По определению квантили и событий E_m неравенства $\mathbf{P}(E_m) \geq q$ выполнены для всех m . Возьмем в определении E_m квантиль $\kappa_{1-q}(S_{N-m+1})$ равной $-\kappa_q(-S_{N-m+1})$. Тогда $\bigcup_{m,k} (D_{mk} E_m) \subset \{\max_{1 \leq k \leq N+K} S_k \geq x\}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq N+K} S_k \geq x\right\} \geq \sum_{m,k} \mathbf{P}(D_{mk} E_m) = \sum_{m,k} \mathbf{P}(D_{mk}) \mathbf{P}(E_m) \geq q \sum_{m,k} \mathbf{P}(D_{mk}),$$

и лемма 3 доказана.

Лемма 4. Если существуют $C \geq 0$ и такой набор квантилей $\kappa_q(-S_1), \kappa_q(-S_2), \dots, \kappa_q(-S_N)$ порядка $q \in (0, 1)$, что $\kappa_q(-S_n) \leq C$ для $n = 1, 2, \dots, N$, то для любого вещественного x выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq n \leq N} \max_{1 \leq k \leq K} (S_{n+k} - S_n) \geq x\right\} \leq q^{-1} \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq N+K} S_k \geq x - C\right\}.$$

Доказательство. Имеем $\{\max_{0 \leq n \leq N} \max_{1 \leq k \leq K} (S_{n+k} - S_n) \geq x + C\} \subset \{M_{NK} \geq x\}$, где M_{NK} определено в доказательстве леммы 3. Осталось заменить $x + C$ на x и применить лемму 3.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для любого вещественного x и любого $q \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq n \leq N} \max_{1 \leq k \leq K} (S_{n+k} - S_n) \geq x\right\} \leq q^{-1} \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq N+K} S_k \geq x - \left(\frac{B_N}{1-q}\right)^{1/2}\right\}.$$

Доказательство. По неравенству Чебышева $\mathbf{P}\{|S_n| \geq (B_N/(1-q))^{1/2}\} \leq 1-q$, $n = 1, 2, \dots, N$. Поэтому $\mathbf{P}\{-S_n \leq (B_N/(1-q))^{1/2}\} \geq q$, $n = 1, 2, \dots, N$. Применяя лемму 4, получаем требуемое неравенство.

Доказательство леммы 2. Лемма 2 следует из леммы 5 и теоремы 14 главы 3 книги Петрова [14].

Доказательство теоремы 1. Возьмем $\varepsilon > 0$. Положим $n_0 = 0$, $n_m = \min\{k: B_k \geq 2\varepsilon m B_n^*\}$ для $m = 1, 2, \dots, M-1$, где $M = \min\{m: n_m \geq n\}$.

В силу условия 3) $B_{n_m} = B_{n_m-1} + \sigma_{n_m}^2 < 2\varepsilon(m+1) B_n^* \leq B_{n_m+1}$. Поэтому $n_{m+1} > n_m$, если n достаточно велико. Следовательно, M хорошо определено.

Используя условие 3) и определение n_m , имеем

$$\mathbf{D}(S_{n_m} - S_{n_{m-1}}) = B_{n_m} - B_{n_{m-1}-1} - \sigma_{n_{m-1}}^2 \geq \varepsilon B_n^* \quad (14)$$

и, аналогично,

$$\mathbf{D}(S_{n_m} - S_{n_{m-1}}) \leq 3\varepsilon B_n^* \quad (15)$$

при больших n . Учитывая неравенства $M\varepsilon B_n^* \leq \sum_{m=1}^M \mathbf{D}(S_{n_m} - S_{n_{m-1}}) = \mathbf{D}S_{n_M-1} + \mathbf{D}(S_{n_M} - S_{n_{M-1}}) \leq B_n + 3\varepsilon B_n^*$, получим

$$M \leq \frac{B_n}{\varepsilon B_n^*} + 3 \quad (16)$$

при больших n .

Возьмем $\tau > 0$. Положим $P_n = \mathbf{P}\{W_n \geq (1 + 2\tau)b_n\}$. По лемме 2 с $q = \frac{1}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} P_n &\leq \sum_{m=1}^M \mathbf{P}\left\{ \max_{n_{m-1} \leq k \leq n_m} \max_{1 \leq j \leq a_n} (S_{k+j} - S_k) \geq (1 + 2\tau)b_n \right\} \\ &\leq 4 \sum_{m=1}^M \mathbf{P}\left\{ I_m \geq (1 + 2\tau)b_n - (8\mathbf{D}I_m)^{1/2} \right\}, \end{aligned}$$

где $I_m = S_{n_m+a_n} - S_{n_{m-1}}$. В силу (15)

$$\mathbf{D}I_m = \mathbf{D}(S_{n_m+a_n} - S_{n_m}) + \mathbf{D}(S_{n_m} - S_{n_{m-1}}) \leq (1 + 3\varepsilon) B_n^* = o(b_n^2). \quad (17)$$

Поэтому $P_n \leq 4 \sum_{m=1}^M \mathbf{P}\{I_m \geq (1 + \tau)b_n\}$ при больших n .

По лемме 1 для любого $\rho > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}\{I_m \geq y\} \leq \exp\left\{ -\frac{y^2}{2(1 + \rho)\mathbf{D}I_m} \right\} \quad (18)$$

для всех $0 \leq y \leq \delta(1 + \rho)\mathbf{D}I_m$ и всех m . Возьмем

$$y = (1 + \tau) \left\{ 2(1 + 3\varepsilon)^{-1} \mathbf{D}I_m \cdot \left(\ln \frac{B_n}{B_n^*} + \ln \ln B_n \right) \right\}^{1/2}.$$

В силу условия 2) и (14) неравенство $y \leq \delta(1 + \rho)\mathbf{D}I_m$ выполнено при всех больших n .

Из (17) следует, что $(1 + \tau)b_n \geq y$. С учетом (18) получаем

$$P_n \leq 4 \sum_{m=1}^M \mathbf{P}\{I_m \geq y\} \leq 4M \exp\left\{ -\mu \left(\ln \frac{B_n}{B_n^*} + \ln \ln B_n \right) \right\},$$

где $\mu = (1 + \tau)^2(1 + 3\varepsilon)^{-1}(1 + \rho)^{-1}$.

Возьмем теперь $\varepsilon = \tau/3$, $\rho = \tau/2$. Тогда $\mu > 1$. Принимая во внимание (16), мы приходим к оценке $P_n \leq C(\ln B_n)^\mu$ при всех больших n , где C — некоторая положительная постоянная.

Возьмем $\theta > 0$. Положим $n_k = \min\{n: B_n > (1 + \theta)^k\}$. Тогда $n_k \rightarrow \infty$ и $B_{n_k} \sim (1 + \theta)^k$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому ряд $\sum_k P_{n_k}$ сходится. По лемме Бореля–Кантелли

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{W_{n_k}}{b_{n_k}} \leq 1 \quad \text{п.н.} \quad (19)$$

Учитывая неравенство $\ln x / \ln y \leq x/y$ при $x \geq y \geq e$, получим $1 \leq b_{n_{k+1}}/b_{n_k} \leq 1 + \theta$ при достаточно больших k . Но $W_n \leq W_{n_{k+1}}$ при $n \leq n_{k+1}$. Поэтому для $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ выполняется неравенство $W_n/b_n \leq (1 + \theta)W_{n_{k+1}}/b_{n_{k+1}}$. Последнее неравенство, (19) и то обстоятельство, что θ можно выбрать сколь угодно малым, приводят нас к (5). Теорема 1 доказана.

Для доказательства теорем 2–4 нам потребуется следующий результат Розовского [15].

Лемма 6. Пусть $\{X_k\}$ — последовательность независимых случайных величин с $\mathbf{E}X_k = 0$, $\mathbf{D}X_k = \sigma_k^2$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $B_0 = 0$, $B_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Существуют абсолютные положительные постоянные C_1, C_2 такие, что для любого $x \geq 1$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\{S_n > x\sqrt{B_n}\} \geq \Phi(-x)e^{-C_1 x^2 \Lambda(x)}(1 - C_2 \Lambda(x))^+,$$

где $\Lambda(x) = \Lambda(0, n, xB_n^{-1/2})$, $(\cdot)^+ = \max\{0, \cdot\}$, $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения, $\Lambda(i, j, y)$ определено в (5).

Доказательство теоремы 2. Возьмем $\varepsilon > 0$. Обозначим $A_n = \{S_n - S_{n-a_n} \geq (1-\varepsilon)\tilde{b}_n\}$.

Предположим сначала, что $B_n/\tilde{B}_n \leq \rho < 1$ при $n \geq N$.

В силу леммы 6, условия (6) и известного соотношения

$$\Phi(-x) \sim (x\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-x^2/2}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (20)$$

для любого $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$Q_n = \mathbf{P}(A_n) \geq \exp \left\{ -(1-\varepsilon)^2(1+\delta)\tilde{b}_n^2(2\tilde{B}_n)^{-1} \right\}$$

при всех больших n . Взяв $\delta = (1-\varepsilon)^{-1} - 1$, получим $Q_n \leq ((B_n/\tilde{B}_n) \ln B_n)^{-(1-\varepsilon)}$ при всех больших n .

Положим $n_1 = N$, $n_k = \min\{m: B_{m-a_m+1} > B_{n_{k-1}}\}$ при $k \geq 2$. Имеем $B_{n_k-a_{n_k}+1} > B_{n_{k-1}}$ и $n_k - a_{n_k} \geq n_{k-1}$.

Применяя неравенство $-\ln(1-x) \leq xK$ при $0 \leq x \leq \rho$, $K = K(\rho)$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^m Q_{n_k} &\geq (\ln B_{n_m})^{-(1-\varepsilon)} \sum_{k=2}^m \frac{\tilde{B}_{n_k}}{B_{n_k}} \geq -K(\ln B_{n_m})^{-(1-\varepsilon)} \sum_{k=2}^m \ln \left(1 - \frac{\tilde{B}_{n_k}}{B_{n_k}} \right) \\ &= -K(\ln B_{n_m})^{-(1-\varepsilon)} \sum_{k=2}^m \ln \frac{B_{n_k-a_{n_k}}}{B_{n_k}} \geq -K(\ln B_{n_m})^{-(1-\varepsilon)} \sum_{k=2}^m \ln \frac{B_{n_{k-1}}}{B_{n_k}} \\ &= K(\ln B_{n_m})^{-1+\varepsilon} \ln \frac{B_{n_m}}{B_{n_1}} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$. Так как события A_{n_k} независимы, лемма Бореля–Кантелли влечет (7).

Пусть теперь $B_n/\tilde{B}_n \rightarrow 1$.

Возьмем $\theta > 0$. Положим $n_k = \min\{n: B_n > (1+\theta)^k\}$. Тогда $n_k \rightarrow \infty$, $B_{n_k} \sim (1+\theta)^k$ и $B_{n_k} - B_{n_{k-1}} \sim B_{n_k} \theta / (1+\theta)$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, при всех больших k выполняются неравенства $\tilde{B}_{n_k} > B_{n_k} - B_{n_{k-1}}$ и $n_k - a_{n_k} < n_{k-1}$.

Предположим, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n_k} - S_{n_k-a_{n_k}}}{\tilde{b}_{n_k}} \leq a < 1 \quad \text{п.н.}, \quad (21)$$

где $a > 0$.

Обозначим $A_k = \{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1+2\varepsilon)a\tilde{b}_{n_k}\}$, $D_k = \{S_{n_{k-1}} - S_{n_k-a_{n_k}} > -\varepsilon a\tilde{b}_{n_k}\}$.

По неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}(D_k) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}(S_{n_{k-1}} - S_{n_k-a_{n_k}})}{\varepsilon^2 a^2 \tilde{b}_{n_k}^2} \geq \frac{1}{2}$$

при всех больших k . Для любого k независимы следующие пары событий: A_k и D_k , A_k и $D_k A_{k-1} D_{k-1}$, A_k и $D_k A_{k-1} D_{k-1} A_{k-2} D_{k-2}, \dots$. В силу (21) имеем $\mathbf{P}(A_k D_k \text{ б.ч.}) = 0$. По лемме 5 главы 7 монографии Петрова [14] ряд $\sum_k \mathbf{P}(A_k)$ сходится.

С другой стороны, используя лемму 6, соотношение (20), условие (6) и неравенства $\Lambda(n_{k-1}, n_k, y) \leq \Lambda(n_k - a_{n_k}, n_k, y)$, получим

$$\mathbf{P}(A_k) \geq \exp \left\{ -(1+\delta)(1+2\varepsilon)^2 a^2 (1+\theta) \theta^{-1} \ln \ln B_{n_k} \right\}$$

для любого $\delta > 0$ при всех больших k . Выбирая ε и δ малыми, а θ большим, приходим к оценке $\mathbf{P}(A_k) \geq (\ln B_{n_k})^{-(1-\tau)}$, где $\tau > 0$. Следовательно, ряд $\sum_k \mathbf{P}(A_k)$ расходится.

Полученное противоречие доказывает, что (21) не выполняется. Поэтому выполнено (7), и теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 проводится по тому же образцу, что и доказательство теоремы 2. Здесь мы его опускаем.

Доказательство теоремы 4. Возьмем $\varepsilon > 0$. Обозначим $A_n = \{U_n \leq (1 - \varepsilon)b_n\}$. Имеем

$$\begin{aligned} P(A_n) &\leq P\left(\bigcap_{m=0}^{n/a_n-1} \{S_{(m+1)a_n} - S_{ma_n} \leq (1 - \varepsilon)b_n\}\right) \\ &= \prod_{m=0}^{n/a_n-1} \left(1 - P\{S_{(m+1)a_n} - S_{ma_n} \geq (1 - \varepsilon)b_n\}\right). \end{aligned}$$

В силу леммы 6, условия (11) и соотношения $B'_n/B_n^* \rightarrow 1$ неравенство

$$P\{S_{(m+1)a_n} - S_{ma_n} \geq (1 - \varepsilon)b_n\} \geq \exp\left\{-(1 + \delta)(1 - \varepsilon)^2\left(\ln \frac{B_n}{B_n^*} + \ln \ln B_n\right)\right\}$$

выполняется для любого $\delta > 0$ при всех больших n . При получении этой оценки мы также использовали (20).

Выбирая $\delta = (1 - \varepsilon)^{-1} - 1$ и используя неравенство $1 - x \leq e^{-x}$, получим

$$P(A_n) \leq \exp\left\{-\left(\frac{n}{a_n} - 1\right)\left(\frac{B_n}{B_n^*}\right)^{-1+\varepsilon}(\ln B_n)^{-1+\varepsilon}\right\}$$

при всех больших n . Ясно, что $B_n \leq B_n^*n/a_n$. В силу условия (10) при всех больших n выполняются неравенства $(B_n/B_n^*)^{\varepsilon/2} \geq (\ln B_n)^{1-\varepsilon}$ и $(B_n/B_n^*)^{\varepsilon/2} \geq 2 \ln n$. Учитывая последние три неравенства, заключаем, что $P(A_n) \leq n^{-2}$ при всех больших n . Ряд $\sum_n P(A_n)$ сходится. Применяя лемму Бореля–Кантелли, приходим к (12). Теорема 4 доказана.

Для доказательства теоремы 6 нужно доказать для R_n аналог теоремы 1. Соответствующие рассуждения повторяют рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1, и поэтому здесь опущены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erdős P., Rényi A. On a new law of large numbers. — J. Anal. Math., 1970, v. 23, p. 103–111.
2. Shepp L. A. A limit law concerning moving averages. — Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, p. 424–428.
3. Csörgő M., Révész P. Strong Approximations in Probability and Statistics. New York/Budapest: Academic Press/Akad. Kiadó, 1981, 284 p.
4. Csörgő M., Steinebach J. Improved Erdős–Rényi and strong approximation laws for increments of partial sums. — Ann. Probab., 1981, v. 9, p. 988–996.
5. Deheuvels P., Devroye L. Limit laws of Erdős–Rényi–Shepp type. — Ann. Probab., 1987, v. 15, № 4, p. 1363–1386.
6. Deheuvels P., Devroye L., Lynch J. Exact convergence rate in the limit theorems of Erdős–Rényi and Shepp. — Ann. Probab., 1986, v. 14, p. 209–223.
7. Deheuvels P., Steinebach J. Exact convergence rate in strong approximation laws for large increments of partial sums. — Probab. Theory Relat. Fields, 1987, v. 76, p. 369–393.
8. Frolov A. N. On one-sided strong laws for large increments of sums. — Statist. Probab. Lett., 1998, v. 37, p. 155–165.
9. Book S. A. A version of the Erdős–Rényi law of large numbers for independent random variables. — Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 1975, v. 3, № 2, p. 199–211.
10. Cai Z. Strong approximation and improved Erdős–Rényi laws for sums of independent nonidentically distributed random variables. — J. Hangzhou Univ. Natur. Sci. Ed., 1992, v. 19, № 3, p. 240–246.
11. Hanson D. L., Russo R. P. Some limit results for lag sums of independent, non i.i.d., random variables. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1985, v. 68, p. 425–445.

12. Фролов А. Н. О законе больших чисел Эрдеша–Реньи для неодинаково распределенных случайных величин при нарушении условия Крамера. — Вестник ЛГУ, 1991, в. 2 (№ 8), с. 57–61.
13. Фролов А. Н. Об асимптотическом поведении приращений сумм независимых случайных величин. — Вестник СПбГУ, 1993, в. 4 (№ 22), с. 45–48.
14. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
15. Rozovsky L. V. On a lower bound for large deviation probabilities of sum of independent random variables with finite variances. — International Conference «Asymptotic Methods in Probability and Statistics»: Abstracts of communications. St. Petersburg, 1998, p. 236–237.

Поступила в редакцию
4.XI.1999

© 2002 г.

BLOZNELIS M.*, PUTTER H.**

SECOND ORDER AND BOOTSTRAP APPROXIMATION TO STUDENT'S t STATISTIC¹⁾

Справедливость для t -статистики Стьюдента разложения Эджворта до первого члена доказана при минимальных условиях: распределение наблюдений нерешетчато и имеет конечный третий момент. В качестве следствия получена корректность второго порядка метода бутстреп для t -статистики Стьюдента при этих оптимальных условиях, таким образом классический результат [19] распространяется на стьюдентизированное среднее.

Ключевые слова и фразы: критерий Стьюдента, разложение Эджворта, бутстреп, асимптотическое разложение, автонормированные суммы.

1. Introduction and results. Let $X_1, \dots, X_N, \dots$ be independent identically distributed random variables with the common distribution function F , expectation $\mathbf{E}X_1 = \mu$, and finite nonvanishing variance $\sigma^2 = \mathbf{E}(X_1 - \mu)^2$. Let

$$t_N = \frac{\bar{X}_N - \mu}{\hat{\sigma}_N}$$

denote Student's t statistic, where $\hat{\sigma}_N^2 = N^{-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}_N)^2$ and $\bar{X}_N = N^{-1}(X_1 + \dots + X_N)$. It is well known that the statistic $T_N = \sqrt{N}t_N$ is asymptotically standard normal, i.e., as $N \rightarrow \infty$

$$\sup_x |G_N(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0, \quad \text{where } G_N(x) = \mathbf{P}\{T_N \leq x\} \quad (1.1)$$

denotes the distribution function of T_N and where $\Phi(x)$ denotes the standard normal distribution function.

The accuracy of (1.1) was studied by a number of authors, Helmers and van Zwet [16], Helmers [15], Slavova [20], Hall [13], Prašková [17], Friedrich [11], Bentkus and Götze [3], Bentkus, Bloznelis and Götze [2], etc.

* Vilnius University and the Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius, Lithuania; e-mail: mindaugas.bloznelis@maf.vu.lt

** University of Leiden, The Netherlands; e-mail: H.Putter@amc.uva.nl

¹⁾ The first author supported by Lithuanian Science and Studies Foundation and A. von Humboldt Foundation; the second author supported by the SFB 343 in Bielefeld.