Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ваколбингер, В. А. Ватутин, К. Фляйшманн,
Ветвящиеся системы с долго живущими частица-
ми в критической размерности, *Теория вероятн.
и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 3, 417–451

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3675>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:16:53

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 47
Выпуск 3, 2002 год
июль, август, сентябрь

© 2002 г. ВАКОЛБИНГЕР А.*, ВАТУТИН В. А.**,
ФЛЯЙШМАНН К.***

ВЕТВЯЩИЕСЯ СИСТЕМЫ С ДОЛГО ЖИВУЩИМИ ЧАСТИЦАМИ В КРИТИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ¹⁾

Рассматривается ветвящийся процесс с движением частиц в пространстве в предположении, что хвост распределения продолжительности жизни частиц убывает степенным образом с показателем меньшим единицы. Выяснено, что в пространствах критической размерности такой процесс, в отличие от классических систем частиц, не является локально вырождающимся в случае, когда начальное распределение частиц — пространственно однородная пуассоновская популяция. Установлено, что при неограниченном во времени развитии популяции ее распределение сходится к распределению сложно пуассоновской системы частиц. Случайная интенсивность предельного процесса совпадает по распределению (в соответствующей точке пространства и в фиксированный момент времени) со случайной интенсивностью суперпроцесса с превращениями, зависящими от «возраста» суперчастиц. Доказательство использует тонкие свойства систем частиц, порожденных асимптотически большими, но конечными популяциями частиц.

Ключевые слова и фразы: ветвящиеся системы частиц, критическая размерность, предельные теоремы, долго живущие частицы, абсолютная непрерывность, случайная плотность, суперпроцесс, стационарность, сложно пуассоновская система частиц, остаточное время жизни процесса, устойчивый субординатор.

*Fachbereich Mathematik (12), Johann Wolfgang Goethe-Universität, D-60054 Frankfurt am Main, Germany; e-mail: wakolbin@math.uni-frankfurt.de

**Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

***Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr. 39, D-10117 Berlin, Germany; e-mail: fleischmann@wias-berlin.de; URL: <http://www.wias-berlin.de/~fleischm>

¹⁾ Работа выполнена при поддержке DFG; второй автор поддержан также РФФИ (гранты № 00-15-96136, 99-01-00012) и INTAS (грант № 99-01317).

1. Введение и формулировка результатов.

1.1. Цель работы. Исследование пространственно однородных (критических) систем ветвящихся частиц $Z = \{Z_t: t \geq 0\}$ в $\mathbf{R}^d$ с долго живущими частицами было начато в работах [24] и [26] (см. также [20]). Здесь термин «долго живущие» означает, что хвост распределения продолжительности жизни частиц убывает на бесконечности обратно пропорционально некоторой степени $\gamma \in (0, 1)$, что влечет бесконечность средней продолжительности жизни частиц. В упомянутых работах было обнаружено новое явление: процесс, порожденный однородной пуассоновской системой частиц в пространстве *надкритической* размерности, сходится по распределению к предельному невырожденному процессу, который снова является однородным *пуассоновским*, в отличие от обычных непуассоновских пределов для систем частиц с конечным средним продолжительности жизни (см. также ниже предложение 1(б)). Это явление имеет следующее интуитивное объяснение: в силу того, что продолжительность жизни частиц велика, все сестры любой частицы предельной популяции родились столь давно, что они вышли за пределы окна наблюдения конечного размера. Следовательно, в пределе будут наблюдаться лишь «полностью перемешанные» популяции.

Подтвердим это наблюдение следующими *эвристическими* *вычислениями*, основанными на анализе деревьев, описывающих предисторию семейства выделенной частицы. Пусть движение частиц в пространстве происходит в соответствии с симметричным устойчивым законом порядка $\alpha \in (0, 2]$, а ветвление — в соответствии с устойчивым законом порядка $1 + \beta$ с $\beta \in (0, 1]$ (см. ниже комплекс условий 1.2). Согласно теории восстановления [9, §11.5 и §11.3], число точек ветвления вдоль линии предков частицы, называемой далее «Эго», выбранной «случайно» в момент времени t , имеет (по распределению) при $t \uparrow \infty$ вид κt^γ , где $\kappa > 0$ — некоторая случайная величина, причем время между моментом t и *любым* из более ранних моментов ветвления имеет порядок t (в отличие от случая экспоненциально распределенных моментов точек ветвления). Рассмотрим какую-либо из этих точек ветвления. Число $\mathbb{J}$ (дополнительных, т.е. не являющихся прямыми предками «Эго») частиц, родившихся в данный момент ветвления, имеет производящую функцию²⁾ $\Phi(s) = 1 - c(1 - s)^\beta$. (Чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать производящую функцию f числа непосредственных потомков частицы критического процесса в приводимой ниже формуле (3), что и приведет к указанной выше пальмовской производящей функции Φ .) Рассмотрим *любую* из этих $\mathbb{J}$ частиц. Обозначим через q вероятность того, что какой-либо из ее потомков ока-

²⁾ Далее символ c всегда используется для обозначения положительных констант, которые могут меняться от формулы к формуле.

жется в момент t в (фиксированном) шаре B вокруг «Эго». Рассуждения, приведенные в [26, леммы 2 и 3], показывают, что q убывает не медленнее, чем $t^{-\theta}$, где $\theta := (d/\alpha + \gamma)/(1 + \beta)$. Следовательно, вероятность того, что ни одна из $\mathcal{I}$ частиц не будет иметь потомков, находящихся в шаре B в момент t , допускает асимптотическую оценку $\Phi(1 - q) = 1 - cq^\beta \geq 1 - ct^{-(d/\alpha + \gamma)\beta/(1 + \beta)}$. Таким образом, вероятность того, что ни один из родственников «Эго» не окажется в шаре конечного объема вокруг «Эго», асимптотически равна

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(1 - ct^{-(d/\alpha + \gamma)\beta/(1 + \beta)})^{\kappa t^\gamma} &\approx \mathbf{E} \exp[-c\kappa t^{\gamma - (d/\alpha + \gamma)\beta/(1 + \beta)}] \\ &= \mathbf{E} \exp[-c\kappa t^{(\gamma - d\beta/\alpha)/(1 + \beta)}]. \end{aligned} \quad (1)$$

Это соотношение показывает, что число $d_c := \alpha\gamma/\beta$ должно определять критичность размерности d пространства. Действительно, при $d > d_c$ правая часть (1) стремится к 1, указывая на то, что в пространствах, имеющих надкритическую размерность, в относительной близости вокруг «Эго» в пределе нет родственников. Таким образом, родственные связи между частицами в нашем окне наблюдения исчезают при $t \uparrow \infty$, что соответствует сходимости первоначальной популяции к пуассоновской системе (с неслучайной интенсивностью).

Если же $d < d_c$, то выражение в (1) стремится к 0. Другими словами, если $t^{-\theta}$ является правильным порядком убывания для q , то при $d < d_c$ в шаре сколь угодно малого радиуса вокруг «Эго» с вероятностью единица будет находиться хотя бы один родственник «Эго». Этот факт указывает на наличие скоплений в первоначальной системе частиц в пространствах, имеющих докритическую размерность, и согласуется со свойством локального вырождения ветвящихся систем частиц, установленным для $d < d_c$ в [26] (см. также предложение 1(а) ниже).

Однако для пространства, имеющего критическую размерность d_c , соотношение (1) свидетельствует в пользу того, что при больших значениях t вероятность присутствия родственников «Эго» в шаре B может лежать строго между 0 и 1. Поскольку временное расстояние до ближайшего общего предка этих родственников имеет порядок t , пространственная корреляция между родственниками должна исчезнуть при $t \uparrow \infty$. В действительности популяция должна в пределе перейти в однородную сложно пуассоновскую систему, в которой случайность интенсивности порождена случайностью ветвления в далеком прошлом.

В данной статье мы покажем, что описанная выше картина действительно имеет место, и, тем самым, существенно усилим результат работы [26], где было установлено, что в пространствах критической размерности существуют нетривиальные распределения популяций при $t \uparrow \infty$. При этом в [26] остался открытым вопрос идентификации этих распределений. Главным импульсом при написании этой статьи было желание решить упомянутую задачу. В настоящей работе мы дока-

жем единственность предельного распределения и опишем его. Согласно *основному результату* статьи, справедливо следующее утверждение о сходимости рассматриваемого процесса $Z = \{Z_t: t \geq 0\}$. В случае критической размерности Z_t сходится по распределению при $t \uparrow \infty$ к пределу Z_∞ , являющемуся *однородной сложно пуассоновской* системой частиц, случайная интенсивность которой i_∞ невырождена и не приводит к потере меры (*persistence*). В частности, этот предел *не является (пространственно) эргодическим* (см. теорему 1).

Для того чтобы получить желаемую информацию о случайной интенсивности i_∞ , необходимо связать систему ветвящихся частиц Z с некоторым суперпроцессом. Для этого прежде всего нужно перейти к ее описанию в виде марковского процесса. С этой целью мы примем во внимание *остаточные времена жизни* частиц. Вместо считающих мер на $\mathbf{R}^d$, являющихся пространством состояний исходного процесса, пространством состояний результирующего процесса $\hat{Z}$ будет множество считающих мер на $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$. Соответствующим образом подобранная перенормировка $\hat{Z}^{(n)}$ процесса $\hat{Z}$ приведет нас в пределе к некоторому *суперпроцессу* $\hat{X}$ на $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$. Интересующая нас нормировка выглядит так: скорость течения времени увеличивается в $n^{\beta/\gamma}$ раз, в то время как совокупная масса частиц умножается на $1/n$. Последнее, в свою очередь, требует умножения на n числа начальных частиц (нормировка, обеспечивающая высокую плотность). Теперь мы действительно имеем сходимость по распределению $\hat{Z}^{(n)} \rightarrow \hat{X}$ при $n \uparrow \infty$ (см. ниже предложение 2). При переходе к маргинальным мерам на $\mathbf{R}^d$, суперпроцесс $\hat{X}$ превратится в мерозначный процесс X . В работе [20] этому процессу было дано имя «спроектированный суперпроцесс». Следует, однако, заметить, что процесс X не является марковским и, таким образом, не является суперпроцессом в общепринятом смысле этого слова. Применяя критерий Кленке [19] в нашей ситуации, мы покажем, что процесс X имеет *абсолютно непрерывные состояния* $X_t(da) = X_t(a) da$ во всех размерностях $d < \alpha/\beta$, включая, в частности, критическую размерность d_c (см. предложение 3). Это соответствует интуитивно понятному соображению о том, что длительные времена жизни бесконечно малых частиц в сочетании с их разбеганием в пространстве приводят к дополнительному сглаживающему эффекту распределения массы в пространстве (ср. со случаем продолжительности жизни с конечным средним). В то же время, в пространстве критической размерности d_c процесс $\hat{X}$, стартующий с распределения массы, задаваемого с точностью до множителя мерой Лебега, имеет свойство *самоподобия* (см. предложение 4(б)). Для $d = d_c$ это сводит вопрос об абсолютной непрерывности состояний процесса X к вопросу существования предела по времени X_∞ , который равен мере Лебега, умноженной на случайный множитель: $X_\infty = i_\infty \ell$, и где, в силу самоподобия, i_∞ совпадает по распределению с $X_1(0)$ — слу-

чайной плотностью меры X_1 в начале координат (следствие 2(б)). Наконец, хорошо известно, что если время жизни частиц имеет экспоненциальное распределение, то ветвящиеся системы частиц, стартующие с пуассоновских начальных состояний, могут быть получены из соответствующих суперпроцессов путем пуассонизации (см., например, [14, с. 277]): состояние системы ветвящихся частиц в момент t совпадает по распределению со сложно пуассоновской системой, в которой «случайная интенсивность пуассоновской меры» определяется состоянием суперпроцесса в момент t . В рассматриваемом немарковском случае долго живущих частиц утверждение об *асимптотической локальной пуассонизации* по-прежнему имеет место для популяций, стартующих с большой группы частиц, находящихся далеко от начала координат (следствие 3 ниже): предел является сложно пуассоновским со случайной мерой интенсивностей $X_\infty = i_\infty \ell$. Необходимы определенные усилия, для того чтобы эта ключевая идея сработала.

Оказывается, что в пространстве критической размерности ветвящиеся системы Z с долго живущими частицами и их непрерывные версии X имеют ряд свойств, сходных со свойствами некоторых ветвящихся моделей в *каталитических* средах (см. [13] и [11]). (Обзоры последних результатов по каталитическим моделям можно найти в [5], [6], [18].) Такими свойствами являются абсолютная непрерывность состояний и самоподобие непрерывных версий, обеспечивающие равномерность пределов $X_\infty = i_\infty \ell$ с невырожденной случайной интенсивностью $i_\infty = X_1(0)$. Результаты такого рода, полученные для непрерывных моделей, используются при изучении более сложных моделей размножения частиц и позволяют показать, что *редкое ветвление* при $t \uparrow \infty$ (объясняемое в первом случае асимптотической редкостью встреч с каталитическими состояниями, а во втором — продолжительной жизнью частиц без ветвления) ведет к асимптотической локальной пуассонизации, т.е. к сложно пуассоновским пределам со случайной мерой интенсивности $X_\infty = i_\infty \ell$.

Дадим теперь более детальное описание упомянутой (расширенной) ветвящейся системы частиц $\hat{Z}$.

1.2. $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящаяся система частиц $\hat{Z}$. Мы будем исследовать модель (критического) ветвления частиц в $\mathbf{R}^d$, которая является пространственным обобщением так называемого (критического) ветвящегося процесса с превращениями, зависящими от возраста частиц, или, более точно, (критического) ветвящегося процесса Беллмана–Харриса. Эта модель включает в себя следующие компоненты, которые для удобства мы сформулируем в виде комплекса условий.

Комплекс условий 1 (ингредиенты ветвящейся системы частиц).

(а) (Процесс ξ движения частиц.) Для фиксированного числа

$\alpha \in (0, 2]$ рассмотрим симметричный устойчивый случайный процесс с параметром α : $(\xi, P_a, a \in \mathbf{R}^d)$ в $\mathbf{R}^d$ (см., например, [2, с. 317] или [1, гл. VIII]), т.е. (пространственно однородный) марковский процесс с производящим оператором $\Delta_\alpha := -(-\Delta)^{\alpha/2}$ (дробным оператором Лапласа) [27, с. 260] и càdlàg-траекториями (т.е. траекториями, непрерывными справа и имеющими конечные пределы слева). Через $p = \{p_t(b): t > 0, b \in \mathbf{R}^d\}$ будем обозначать непрерывные плотности вероятностей перехода *процесса движения частиц* ξ .

(б) (Продолжительность жизни частиц τ .) Введем нерешетчатую функцию распределения G случайной величины $\tau > 0$ с хвостом распределения

$$P\{\tau > u\} = 1 - G(u) \sim c_G u^{-\gamma} \quad \text{при } u \uparrow \infty \quad (2)$$

для некоторого $\gamma \in (0, 1)$ и константы $c_G > 0$. Таким образом, *распределение G продолжительности жизни частиц* принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона с параметром γ . В частности, случайная величина τ имеет бесконечное математическое ожидание: $E\tau = \infty$.

(в) (Критический механизм ветвления.) Будем предполагать, что *производящая функция случайного числа ζ непосредственных потомков частиц* имеет вид

$$f(s) := Es^\zeta = s + c_f(1-s)^{1+\beta}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (3)$$

где $\beta \in (0, 1]$ и $c_f \in (0, 1/(1+\beta)]$. Таким образом,

$$P\{\zeta = k\} = \delta_{1,k} + c_f(-1)^k \binom{1+\beta}{k}, \quad k \geq 0,$$

где $\delta_{1,k}$ — символ Кронекера. Следовательно, $E\zeta = 1$ (*условие критичности*), и мы рассматриваем закон размножения частиц, принадлежащий области нормального притяжения устойчивого закона с параметром $1 + \beta$. Заметим, что $E\zeta^2 < \infty$ тогда и только тогда, когда $\beta = 1$.

(г) (Фазовое пространство E .) Точка $e = (u, a) \in E := \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$ описывает *остаточное время жизни u и положение a частицы*. Вводя метрику

$$d_E(e_1, e_2) := 1 \wedge |u_1 - u_2| + |a_1 - a_2|,$$

$e_i = (u_i, a_i) \in E$, $i = 1, 2$, мы получим банахово пространство (E, d_E) .

(д) (Пробные функции.) Зафиксируем константу $p \in (d, d + \alpha]$ (напомним, что α является показателем устойчивого закона распределения движения частиц) и введем базовую функцию

$$\phi_p(a) := (1 + |a|^2)^{-p/2}, \quad a \in \mathbf{R}^d.$$

Пусть $\widehat{\mathcal{C}}_p = \widehat{\mathcal{C}}_p(E)$ обозначает множество всех непрерывных функций $\psi: E \rightarrow \mathbf{R}$, для которых $\|\psi\| := \sup_{(u,a) \in E} |\psi(u,a)/\phi_p(a)| < \infty$, и таких, что отображение $(u,a) \mapsto \psi(u,a)/\phi_p(a)$ на E имеет непрерывное

продолжение на $\dot{\mathbf{R}}_+ \times \dot{\mathbf{R}}^d$, где $\dot{\mathbf{R}}_+$ и $\dot{\mathbf{R}}^d$ — естественные пополнения до компактов множеств $\mathbf{R}_+$ и $\mathbf{R}^d$ соответственно. Таким образом, $(\hat{\mathcal{C}}_p, \|\cdot\|)$ является сепарабельным банаховым пространством.

(е) (Пространство состояний $\mathcal{N}_p^\circ$.) Пусть $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbf{E})$ — множество всех ϕ_p — смешиваемых мер на $\mathbf{E} = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$, т.е. мер μ на $\mathbf{E}$ таких, что интеграл $\langle \mu, \phi_p \rangle := \int_{\mathbf{E}} \mu(d(u, a)) \phi_p(a)$ конечен. Введем в $\mathcal{M}_p$ слабую топологию такую, что для каждой функции $\psi \in \hat{\mathcal{C}}_p$ отображение

$$\mu \mapsto \langle \mu, \psi \rangle := \int_{\mathbf{E}} \mu(de) \psi(e)$$

непрерывно. Заметим, что прямое произведение $\nu \times \ell$ принадлежит $\mathcal{M}_p$ для любой конечной меры ν на $\mathbf{R}_+$ (поскольку $\langle \ell, \phi_p \rangle < \infty$). Обозначим через $\mathcal{N}_p = \mathcal{N}_p(\mathbf{E})$ подмножество всех тех мер μ в $\mathcal{M}_p$, значения которых лежат в $\{0, 1, \dots, \infty\}$ (считающие меры), а через $\mathcal{N}_p^\circ = \mathcal{N}_p^\circ(\mathbf{E})$ — подмножество этих мер, каждая из которых удовлетворяет дополнительному условию $\mu(\{0\} \times \mathbf{R}^d) = 0$. Будем считать, что множества $\mathcal{N}_p$ и $\mathcal{N}_p^\circ$ наследуют топологию $\mathcal{M}_p$. Множество $\mathcal{N}_p^\circ$ будет служить *пространством состояний* нашей ветвящейся системы частиц. В частности, дельта-мера Дирака $\delta_{(u,a)} \in \mathcal{N}_p^\circ$ описывает одну частицу, имеющую остаточное время жизни $u > 0$ и находящуюся в точке $a \in \mathbf{R}^d$.

О п р е д е л е н и е 1 (ветвящаяся система частиц $\hat{Z}$ и процесс Z). Воздерживаясь от более детального определения, мы можем теперь описать интересующий нас процесс $\hat{Z} = \{\hat{Z}_t: t \geq 0\}$ при помощи следующих свойств.

(i) Дальнейшее движение частицы $\delta_{(u,a)} \in \mathcal{N}_p^\circ$, существующей в момент $r \geq 0$, по пространству $(0, \infty) \times \mathbf{R}^d$ описывается соотношением $t \mapsto (u - (t - r), \xi_{t-r})$, $r \leq t < r + u$, где траектории случайного процесса ξ меняются в соответствии с распределением P_a .

(ii) Как только остаточное время жизни частицы станет равным $0+$, она погибает, производя в момент гибели и в точке гибели потомство, случайный размер которого является вероятностной копией случайной величины ζ .

(iii) Новорожденные частицы получают независимые остаточные времена жизни, распределенные так же, как и *случайная величина* $\tau > 0$, и в дальнейшем эволюционируют независимо.

(iv) В момент $t = 0$ процесс начинается с системы частиц, задаваемой мерой $\mu \in \mathcal{N}_p^\circ$.

(v) Обозначим через $\mathbf{P}_\mu$ закон распределения системы частиц $\hat{Z}$. Этот закон является мерой на множестве $\mathcal{D}(\mathbf{R}_+, \mathcal{N}_p)$ всех $\mathcal{N}_p$ -значных càdlàg-траекторий ω , удовлетворяющих дополнительному условию $\omega_t \in \mathcal{N}_p^\circ$, $t \geq 0$.

Для удобства процесс $(\hat{Z}, \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{N}_p^\circ)$ будем называть $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящейся системой частиц.

Отметим, что $\hat{Z}$ является *однородным по времени* марковским процессом.

Заметим также, что при описании модели мы наложили максимальные условия независимости. Единственное существенное условие зависимости состоит в том, что новорожденные частицы начинают свою эволюцию из точки гибели частицы-родителя.

Интегрирование относительно остаточных времен жизни частиц приводит нас к немарковскому процессу

$$Z_t = \hat{Z}_t(\mathbf{R}_+ \times (\cdot)), \quad t \geq 0,$$

уже упоминавшемуся в п. 1.1.

Нас будет интересовать асимптотическое поведение маргинального процесса Z обсуждаемой $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящейся системы частиц $\hat{Z}$. Для простоты в качестве начальных состояний будем рассматривать пуассоновские системы частиц с мерой интенсивности³⁾ $i_0 G(du) \ell(da)$, где $i_0 > 0$ — фиксированная константа. Заметим, что в этом случае все начальные остаточные времена жизни частиц являются независимыми копиями случайной величины τ и, таким образом, все первоначальные частицы можно рассматривать как только что родившиеся (однако других детей у их родителей нет).

Напомним, что случайная считающая мера π на $\mathbf{E}$ называется *пуассоновской системой* частиц с мерой интенсивности $\mu \in \mathcal{M}_p$, если логарифм ее преобразования Лапласа имеет вид

$$-\ln \mathbf{E} \exp\langle \pi, -\psi \rangle = \langle \mu, 1 - e^{-\psi} \rangle, \quad \psi \in \hat{\mathcal{C}}_p^+$$

(здесь и далее индекс $+$ у множества выделяет из него множество всех его неотрицательных членов; это соглашение мы уже использовали для $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$). Будем писать π_μ для обозначения пуассоновских систем частиц с мерой интенсивности μ . Если $\mu = i_0 \nu \times \ell$ для некоторой константы $i_0 \geq 0$ и вероятностного закона ν на $(0, \infty)$ (здесь ℓ — мера Лебега на $\mathbf{R}^d$), то $\pi_{i_0 \nu \times \ell}$ — *однородная* пуассоновская система частиц с интенсивностью i_0 и остаточными временами жизни частиц, имеющими распределение ν . Если же величина i_0 случайна, то $\pi_{i_0 \nu \times \ell}$ называется *однородной сложно пуассоновской системой* частиц со случайной интенсивностью i_0 . Другими словами, если σ обозначает закон распределения i_0 , то

$$\mathbf{P} \{ \pi_{i_0 \nu \times \ell} \in (\cdot) \} = \int_0^\infty \sigma(di) \mathbf{P} \{ \pi_{i \nu \times \ell} \in (\cdot) \}. \quad (4)$$

Аналогичная терминология будет использоваться для пуассоновских систем частиц в $\mathbf{R}^d$.

³⁾ Мы не делаем различия в обозначениях между функцией распределения G и соответствующей ей вероятностной мерой $G(dt)$ на $(0, \infty)$.

1.3. Продолжительность жизни с конечным средним и дихотомия: сохранение массы (persistence) или вырождение. Пусть $\hat{Z}_0$ — однородная пуассоновская система частиц $\pi_{i_0 G \times \ell}$ с (неслучайной) интенсивностью $i_0 > 0$ и остаточными временами жизни частиц, имеющими распределение G (напомним, что в этом случае в начальный момент времени все частицы рассматриваются как новорожденные и единственные дети своих частиц-родителей).

Сравним сначала маргинальный процесс Z , порожденный нашей $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящейся системой частиц $\hat{Z}$, со случаем, где условие (2) убывания хвоста распределения продолжительности жизни частиц с показателем γ заменено на нерешетчатость распределения G продолжительности жизни и *конечность* ее математического ожидания. В этом случае имеется дихотомия между сходимостью к предельному процессу с сохранением массы (английский термин — persistence) и локальным вырождением в зависимости от того, выполняется или не выполняется неравенство $d > \alpha/\beta$ (см., например, [26]). Конечно, такого рода явления известны и для других вариантов пространственно однородных (критических) ветвящихся процессов. Достаточно упомянуть, например, работы [21], [3], [16], [4], [12] и [15]. На интуитивном уровне явление дихотомии можно объяснить следующим образом. В силу критичности ветвления потомство любой подпопуляции конечного размера в конце концов должно выродиться. Ввиду малой мобильности частиц в пространствах низких размерностей этот эффект приводит в результате к локальному вырождению бесконечной популяции. Однако в пространствах высоких размерностей большая мобильность частиц позволяет некоторым частицам (прибывшим издалека) достичь интересующего нас конечного окна наблюдения и, таким образом, проявить себя в предельной популяции. Следовательно, в пространствах низких размерностей преобладают локальные флуктуации (проистекающие от критичности процесса ветвления), в то время как в пространствах высоких размерностей скорость движения частиц является определяющим фактором. Таким образом, от размерности пространства и показателей устойчивых законов размножения и движения зависит, какая из конкурирующих тенденций (локальная флуктуация массы или пространственный разброс) победит в пределе.

Такого же рода утверждение справедливо и для $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящихся систем частиц: в пространствах, имеющих размерность меньшую, чем критическая размерность $d_c = \alpha\gamma/\beta$, происходит локальное вырождение, в то время как в надкритических размерностях имеет место сходимость к невырожденным пределам с сохранением массы (см. ниже п. 1.4). Однако для критической размерности асимптотическое поведение рассматриваемых систем существенно отличается от поведения систем с конечным средним длительности жизни частиц (см. п. 1.9).

1.4. О долго живущих частицах в некритических размерностях. Вернемся теперь к $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящейся системе частиц $\hat{Z}$, описываемой определением 1. Прежде чем переходить к анализу наиболее интересного случая — критической размерности, напомним кратко картину, возникающую в некритических размерностях. Формулируемое ниже предложение было установлено в работах [24] и [26] для пространственного маргинального процесса X . Здесь мы приводим его обобщение, включающее остаточные времена жизней. Доказательство этого обобщения можно легко получить, следуя аргументам упомянутых работ, и мы его опускаем.

Предложение 1. *Рассмотрим $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящуюся систему частиц $\hat{Z}$, начинающуюся с однородной пуассоновской системы частиц с интенсивностью $i_0 > 0$ и остаточными временами жизней, имеющими распределение G , т.е. $\hat{Z}_0 = \pi_{i_0 G \times \ell}$. Для константы $K > 0$ введем нормированный по времени процесс $\hat{Z}^{(K)}$:*

$$\hat{Z}_t^{(K)}((\cdot) \times (\cdot)) := \hat{Z}_{Kt}(K(\cdot) \times (\cdot)), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

и фиксируем $t > 0$. Справедливы следующие утверждения.

(а) (Локальное вырождение в докритических размерностях; см. [26].) Если $d < \alpha\gamma/\beta$, то процесс $\hat{Z}_t^{(K)}$ локально вырождается при $K \uparrow \infty$, т.е. $\hat{Z}_t^{(K)} \rightarrow 0$ по вероятности.

(б) (Сходимость с сохранением массы в надкритических размерностях; см. [24], [26].) Если $d > \alpha\gamma/\beta$, то при $K \uparrow \infty$ процесс $\hat{Z}_t^{(K)}$ сходится по распределению к однородной пуассоновской предельной популяции $\hat{Z}_t^{(\infty)} = \pi_{i_0 G_\infty \times \ell}$ с полной интенсивностью i_0 и остаточными временами жизней, имеющими распределение

$$G_\infty^t(du) := \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \frac{t^\gamma du}{u^\gamma (t+u)}, \quad u > 0 \quad (6)$$

(по поводу возникновения распределения G_∞^t см. соответствующую теорему в [9, § 14.3]).

Как уже отмечалось в п. 1.1, существенно новым свойством, по сравнению с распределением продолжительности жизни частиц с конечным средним (п. 1.3), является тот факт, что в надкритических размерностях локальная зависимость между родственниками в пределе исчезает. Это обеспечивается тяжелым хвостом распределения G времени жизни частиц. В результате частицы-сестры оказываются с течением времени слишком далеко друг от друга.

Согласно результату, полученному в [26], в пространстве критической размерности $d_c = \alpha\gamma/\beta$ локального вырождения по распределению процесса Z_t при $t \uparrow \infty$ не происходит (вспомните обсуждение в п. 1.1). Наша цель — прояснить причины такой ситуации. Для получения подробной картины происходящих явлений необходимо ввести «суперпро-

цессную» версию $\hat{X}$ анализируемой $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящейся системы частиц $\hat{Z}$, поскольку детальное описание асимптотического поведения процесса Z опирается на свойства процесса $\hat{X}$.

1.5. $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесс $\hat{X}$. Со времени появления работы Феллера [8] стало привычным искать аппроксимации диффузионного типа для ветвящихся систем частиц. Для нашей $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -модели (стартовой с системы частиц конечного объема) такую аппроксимацию предложили Кай и Сагитов в [20], которые, однако, исключили остаточные времена жизней из описания. Это приводит к потере марковского свойства как для указанной системы частиц, так и для ее пределов, полученных путем перехода к нормированным процессам с высокой плотностью (несмотря на предположения о независимости движения и возраста). Другими словами, в пределе мы никогда не получим марковский суперпроцесс (даже неоднородный по времени, в противоположность утверждению на с. 249 работы [20]). Именно по этой причине мы сохраняем в предельном суперпроцессе остаточные времена жизней.

Для того чтобы ввести предельный $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесс $\hat{X}$, необходимый для дальнейших рассуждений, опишем вначале основной процесс «движения» для этого суперпроцесса.

Напомним, что мы работаем с фазовым пространством $E = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$. При помощи $\mathbf{R}^d$ -компоненты будет описано движение частиц в соответствии с устойчивым процессом $(\xi, P_a, a \in \mathbf{R}^d)$ с параметром α . Кроме того, нам понадобится независимый (предельный) процесс остаточного времени жизни $t \mapsto \vartheta_t$. Чтобы ввести его для значения $0 < \gamma < 1$, задающего скорость убывания хвоста распределения продолжительности жизни частиц, рассмотрим независимый γ -устойчивый субординатор $\eta = \{\eta_t: t \geq 0\}$ в $\mathbf{R}_+$, т.е. однородный по времени марковский процесс с càdlàg-траекториями и независимыми приращениями, логарифм преобразования Лапласа переходной плотности которого имеет вид

$$-\ln E\{\exp[-\theta\eta_t] \mid \eta_0 = u\} = u\theta + c_\eta t\theta^\gamma, \quad \theta, t, u \geq 0.$$

Нам будет удобно выбрать в качестве нормирующей константы $c_\eta > 0$ величину

$$c_\eta := \frac{1}{\Gamma(1 + \gamma)},$$

где Γ обозначает гамма-функцию. При помощи этого процесса определим два других процесса — процесс

$$k_t := \inf\{s > 0: \eta_s > t\}, \quad t \geq 0,$$

обратный к η , и (предельный) процесс $\vartheta := \vartheta_t$, для остаточного времени жизни

$$\vartheta_t := \inf\{\eta_s - t: \eta_s > t, s \geq 0\} = \eta_{k_t} - t, \quad t \geq 0.$$

Отметим, что ϑ — однородный по времени строго марковский процесс с càdlàg-траекториями, причем такой, что dk_t является непрерывным и однородным по времени аддитивным функционалом от траекторий ϑ (см. [1, с. 123], где обоснован данный факт). В частности, процесс ϑ может стартовать со значения $\vartheta_0 = 0$. Напомним также, что при $\gamma = \frac{1}{2}$ процесс $t \mapsto k_{\eta_0+t}$ является локальным временем в 0 броуновского движения, стартующего из 0, а ϑ описывает остаточные времена жизни броуновских экскурсий, выходящих из 0.

В результате мы получим пару $\hat{\xi} := (\vartheta, \xi)$ независимых процессов, совместное распределение которых обозначим через $\hat{P}_e$, $e \in E$. Этим завершается построение желаемого однородного по времени марковского процесса $(\hat{\xi}, \hat{P}_e, e \in E)$ с càdlàg-траекториями в $E = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$. Именно процесс $\hat{\xi}$ будет служить нам в качестве процесса «движения» воображаемой частицы в суперпроцессе $\hat{X}$, который мы сейчас введем. Однородный по времени непрерывный аддитивный функционал dk_t от $\hat{\xi}$ будет взят в качестве функционала ветвления для $\hat{X}$.

Напомним, что через $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{R}_+, \mathcal{M}_p)$ обозначается множество всех мерозначных càdlàg-траекторий $\omega: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(E)$, оснащенное топологией Скорохода. Через $\mathcal{P}$ будем обозначать множество всех вероятностных законов на $\mathcal{D}$, оснащенное топологией слабой сходимости.

Лемма 1 (существование единственного $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесса $\hat{X}$). *Зафиксируем константы*

$$0 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad 0 < \gamma < 1 \quad \text{и} \quad \varrho > 0.$$

Для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}_p$ существует единственный закон распределения $\mathbb{P}_\mu \in \mathcal{P}$, задающий однородный по времени марковский процесс $\hat{X}$, логарифм преобразования Лапласа переходного функционала которого имеет вид

$$-\ln \mathbb{E}_\mu \exp \langle \hat{X}_t, -\psi \rangle = \langle \mu, \hat{V}_t \psi \rangle, \quad t \geq 0, \quad \psi \in \hat{\mathcal{C}}_p^+, \quad (7)$$

где функция $\hat{v} = \hat{V}\psi = \{\hat{V}_t \psi(e): t \geq 0, e \in E\} \geq 0$ — единственное решение интегрального уравнения

$$\hat{v}_t(e) = \hat{E}_e \left[\psi(\hat{\xi}_t) - \varrho \int_0^t dk_s \hat{v}_{t-s}^{1+\beta}(\hat{\xi}_s) \right], \quad t \geq 0, \quad e \in E. \quad (8)$$

В частности, справедлива следующая формула для математических ожиданий:

$$\mathbb{E}_\mu \langle \hat{X}_t, \psi \rangle = \int_E \mu(de) \hat{E}_e \psi(\hat{\xi}_t), \quad \mu \in \mathcal{M}_p, \quad t \geq 0, \quad \psi \in \hat{\mathcal{C}}_p^+ \quad (9)$$

(критичность).

Набор $(\hat{X}, \mathbb{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_p)$ будем называть $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцессом с интенсивностью ветвления ϱ . Построение такого рода процесса является

в настоящее время стандартной процедурой, и мы не будем на этом останавливаться (см. [23]). Одна из возможных интерпретаций мерозначного процесса $\hat{X}$ в терминах его аппроксимации некоторой системой частиц будет дана в следующем пункте.

З а м е ч а н и е 1 (расщепление). Отметим, что интеграл в (8) может быть записан в виде

$$\int_0^t dk_s \hat{v}_{t-s}^{1+\beta}(0, \xi_s),$$

поскольку

$$\int_0^\infty dk_s 1\{\vartheta_s > 0\} = 0, \quad \hat{P}_e\text{-п.н.}, \quad e \in E,$$

что следует из определений процессов k и ϑ . Но так как процессы k и ξ независимы, то ввиду равенства

$$\hat{E}_e k_s = E_u k_s = 1_{[u, \infty)}(s) (s - u)^\gamma, \quad e = (u, a), \quad s \geq 0, \quad (10)$$

уравнение (8) может быть переписано следующим образом:

$$\hat{v}_t(e) = [\hat{E}_e \psi(\xi_t)] - \varrho \int_{u \wedge t}^t d_s (s - u)^\gamma E_a \hat{v}_{t-s}^{1+\beta}(0, \xi_s),$$

$t \geq 0$, $e = (u, a) \in E$; здесь символ d_s означает, что интеграл Стильтеса берется относительно переменной s (в монотонной функции $s \mapsto (s - u)^\gamma$).

1.6. Аппроксимация суперпроцесса $\hat{X}$ системами частиц.

Как уже отмечалось, суперпроцесс $\hat{X}$ может быть получен из $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящейся системы частиц $\hat{Z}$ при помощи аппроксимации диффузионного типа, которую мы хотим сейчас строго описать. Доказательство следующего предложения может быть получено на основе аргументов, изложенных в работе [20, § 4] (см., в частности, следствие 1 упомянутой работы).

Предложение 2 (аппроксимация $\hat{X}$ системами частиц). Пусть $\hat{Z}^{(n)}$, $n \geq 1$, — $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящаяся система частиц, в которой функция распределения продолжительности жизни G из условия 1(б) заменена на $G^{(n)}$:

$$G^{(n)}(u) := G(n^{\beta/\gamma} u), \quad u \geq 0.$$

Предположим также, что популяция $\hat{Z}^{(n)}$ порождена (неслучайной) начальной популяцией $\hat{Z}_0^{(n)} \in \mathcal{N}_p^\circ$, удовлетворяющей условию

$$\frac{1}{n} \hat{Z}_0^{(n)} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \mu \quad \text{в } \mathcal{M}_p. \quad (11)$$

Тогда

$$\frac{1}{n} \hat{Z}^{(n)} \xRightarrow[n \uparrow \infty]{} \hat{X} \quad \text{по распределению,}$$

где $\hat{X}$ есть $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесс из леммы 1, начинающийся с меры μ и имеющий интенсивность ветвления

$$\varrho = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \frac{c_f}{c_G}. \quad (12)$$

Здесь константа c_f та же, что и в (3), а константа c_G взята из (2).

Другими словами, если в нашей $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящейся системе $\hat{Z}$ времена τ жизни частиц заменены на нормированные (и меньшие) продолжительности жизни $n^{-\beta/\gamma}\tau$, если их единичные массы заменены меньшими массами $1/n$ и если начальные популяции $\hat{Z}_0^{(n)}$ выбраны таким образом, что перенормированные меры $\hat{Z}_0^{(n)}/n$ сходятся в соответствии с (11), то и последовательность перенормированных ветвящихся систем частиц $\hat{Z}^{(n)}/n$ стремится к $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцессу $\hat{X}$ из леммы 1 со специальной интенсивностью ветвления ϱ , определяемой соотношением (12).

1.7. Маргинальный процесс мер X . Процесс остаточного времени жизни ϑ , стартующий из ненулевого состояния, является *детерминированным* до тех пор, пока он не достигнет состояния 0. Таким образом, процесс «движения» $\hat{\xi}$ не имеет переходных плотностей и, следовательно, суперпроцесс $\hat{X}$ также не будет иметь «гладких» состояний. Однако интегрирование относительно остаточных времен жизни, т.е. переход к пространственному маргинальному процессу

$$X_t(\cdot) := \hat{X}_t(\mathbf{R}_+ \times (\cdot)), \quad t \geq 0,$$

изменяет ситуацию, и этого нам будет достаточно для описания асимптотического поведения системы $\hat{Z}$. В действительности в пространствах размерностей $d < \alpha/\beta$, состояния X_t являются абсолютно непрерывными мерами. Мы сформулируем это свойство в виде предложения, которое будет доказано позднее в п. 2.2 при помощи метода, заимствованного из работы Кленке [19]. С этой целью обозначим через $\chi \geq 0$ ограниченную непрерывную функцию на $\mathbf{R}^d$, для которой $\langle \ell, \chi \rangle = 1$, и рассмотрим регуляризацию

$$\chi_\varepsilon(a) := \varepsilon^{-d} \chi(\varepsilon^{-1}a), \quad a \in \mathbf{R}^d, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \downarrow 0, \quad (13)$$

δ -функции δ_0 на $\mathbf{R}^d$.

Предложение 3 (маргинальный процесс мер X). Пусть $d < \alpha/\beta$, а $t > 0$ фиксировано. Для $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесса $\hat{X}$ с законом распределения $\mathbb{P}_\mu$, $\mu \in \mathcal{M}_p(\mathbf{E})$, рассмотрим маргинальный процесс $X = \hat{X}(\mathbf{R}_+ \times (\cdot))$.

(а) (Случайная интенсивность в точке.) Для всех $a \in \mathbf{R}^d$ существует предел по распределению

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \langle X_t, \delta_a * \chi_\varepsilon \rangle =: X_t(a) = \langle X_t, \delta_a \rangle. \quad (14)$$

Кроме того, логарифм преобразования Лапласа (случайной) плотности $X_t(a)$ меры X_t в точке a имеет вид

$$-\ln \mathbb{E}_\mu \exp[-\theta X_t(a)] = \langle \mu, \hat{v}_t^{\theta, a} \rangle, \quad \theta \geq 0, \quad (15)$$

где (для фиксированных $\theta \geq 0$ и $a \in \mathbf{R}^d$) функция

$$\hat{v}^{\theta, a} := \hat{v} := \{\hat{v}_t(e') : t > 0, e' = (u', a') \in E\} \geq 0 \quad (16)$$

— единственное решение уравнения

$$\hat{v}_t(e') = \theta p_t(a - a') - \varrho \hat{E}_{e'} \int_0^t dk_s \hat{v}_{t-s}^{1+\beta}(0, \xi_s), \quad (17)$$

$t > 0, e' = (u', a') \in E$. В частности, справедлива следующая формула для математических ожиданий:

$$\mathbb{E}_\mu X_t(a) = \int_E \mu(d(u', a')) p_t(a - a'). \quad (18)$$

(б) (Абсолютная непрерывность состояний меры.) Мера X_t абсолютно непрерывна $\mathbb{P}_\mu$ -почти наверное.

Появление первого из членов в правой части уравнения (17) не удивительно. В самом деле, действуя формально, имеем

$$X_t(a) = \langle X_t, \delta_a \rangle = \langle \hat{X}_t, 1 \otimes \delta_a \rangle,$$

где δ_a — дельта-функция в точке a и

$$1 \otimes \delta_a =: \overline{\delta_a}, \quad a \in \mathbf{R}^d, \quad (19)$$

— ее продолжение в виде постоянной на E . Далее, заменяя в уравнении для логарифма преобразования Лапласа (8) функцию ψ на обобщенную функцию $\overline{\delta_a}$ на E , получаем для $e' = (u', a') \in E$

$$\hat{E}_{e'} \psi(\hat{\xi}_t) = \hat{E}_{(u', a')} 1(\vartheta_t) \delta_a(\xi_t) = E_{a'} \delta_a(\xi_t) = p_t(a - a'), \quad (20)$$

поскольку процесс ξ имеет непрерывную переходную плотность p . Таким образом, уравнение (17) можно рассматривать как частный случай уравнения (8), причем

$$\hat{v}^{\theta, a} = \hat{V}(\theta \overline{\delta_a}).$$

Конечно, частью п. (а) является утверждение о том, что уравнение (17) корректно. Отметим также, что функция $\overline{\delta_a}$ является обобщенной плотностью меры $\ell_+ \times \delta_a$ на E , где ℓ_+ — ограничение на множество $\mathbf{R}_+$ меры Лебега на $\mathbf{R}$. Мы не будем делать различия в обозначениях между этой мерой и ее обобщенной плотностью, т.е. будем писать $\overline{\delta_a}$ в обоих случаях.

Заметим, что в сформулированном предложении показатель γ не входит в ограничение на размерность $d < \alpha/\beta$. Грубо говоря, увеличение времени жизни «воображаемой частицы» суперпроцесса не оказывает влияния на локальные свойства гладкости маргинальных состояний (мер) X_t . В частности, что касается абсолютной непрерывности

состояний, то различия между «классическим» случаем, соответствующим $\gamma = 1$, и нашими случаями $\gamma < 1$ нет. (Конечно, следует ожидать сингулярности маргинальных состояний меры, если $d \geq \alpha/\beta$.)

Перед возвращением к системам частиц опишем некоторые полезные свойства суперпроцесса $\hat{X}$.

1.8. Свойства процесса $\hat{X}$ в критической размерности при шкалировании. Следующее свойство вытекает при помощи стандартных рассуждений из представления логарифма преобразования Лапласа, полученного в лемме 1. Мы опускаем детали.

Предложение 4 (свойства $\hat{X}$ при шкалировании). Пусть $d = \alpha\gamma/\beta$. Тогда $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесс имеет следующие свойства.

(а) (Нормировка для ограниченных начальных масс.) Для любого $a \in \mathbf{R}^d$ и положительных K и i_0 процесс

$$\left\{ (K^{-d/\alpha} \hat{X}_{Kt}(K(\cdot) \times K^{1/\alpha}(\cdot)))_{t \geq 0} \mid \hat{X}_0 = i_0 \delta_{(0,a)} \right\}$$

совпадает по распределению с процессом

$$\{\hat{X} \mid \hat{X}_0 = K^{-d/\alpha} i_0 \delta_{(0, K^{-1/\alpha} a)}\}.$$

(б) (Самоподобие.) Если $\hat{X}_0 = i_0 \delta_0 \times \ell$, то $\hat{X}$ обладает свойством самоподобия:

$$\left\{ K^{-d/\alpha} \hat{X}_{Kt}(K(\cdot) \times K^{1/\alpha}(\cdot)): t \geq 0 \right\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \hat{X}, \quad K > 0.$$

Шкалирование весьма часто оказывается полезным инструментом. В нашем случае мы скомбинируем его с предложением 3, для того чтобы немедленно получить следующий результат. Определим $\hat{X}^{(K)}$ аналогично тому, как мы ввели $\hat{Z}^{(K)}$ в (5). Напомним также, что предельное распределение остаточного времени жизни G_∞^t было описано в (6).

Следствие 1 (предельное поведение процесса $\hat{X}$ при шкалировании). Пусть $d = \alpha\gamma/\beta$ и величины $t, i_0 > 0$ фиксированы. Тогда $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесс $\hat{X}$ имеет следующие асимптотические свойства при шкалировании.

(а) (Асимптотика $\hat{X}^{(K)}$ для ограниченной начальной массы.) Пусть $a \in \mathbf{R}^d$ фиксировано и $\hat{X}_0 = K^{d/\alpha} i_0 \delta_{(0, K^{1/\alpha} a)}$. Тогда

$$\hat{X}_t^{(K)} \xRightarrow{K \uparrow \infty} X'_t(0) G_\infty^t \times \ell \quad \text{по распределению,}$$

где $\hat{X}'$ — $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесс с начальным состоянием $\hat{X}'_0 = i_0 \delta_{(0,a)}$, а $X'_t(0)$ — случайная плотность в момент t в начале координат у маргинального процесса $X' := \hat{X}'(\mathbf{R}_+ \times (\cdot))$, описанная в предложении 3(а).

(б) (Сходимость $\hat{X}^{(K)}$ с сохранением массы.) Если $\hat{X}_0 = i_0 \delta_0 \times \ell$, то

$$\hat{X}_t^{(K)} \xRightarrow{K \uparrow \infty} X_t(0) G_\infty^t \times \ell \quad \text{по распределению,}$$

где $X_t(0)$ — случайная плотность в момент t в состоянии 0 у маргинального процесса $X = \hat{X}(\mathbf{R}_+ \times (\cdot))$, имеющего математическое ожидание i_0 .

Полагая в предыдущем следствии сначала $t = 1$, а затем $K = t$ и ограничиваясь лишь пространственными маргинальными мерами, мы получаем следующий результат.

Следствие 2 (асимптотическое поведение X). Пусть $d = \alpha\gamma/\beta$. Для $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесса $\hat{X}$ асимптотическое поведение маргинального процесса X описывается следующим образом. Зафиксируем $i_0 > 0$.

(а) (Асимптотика X_t для конечных и зависящих от t начальных мер.) Пусть $\{^u\hat{X}: u \geq 0\}$ — семейство $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцессов, стартовых из состояний $^u\hat{X}_0 = u^{d/\alpha} i_0 \delta_{(0, u^{1/\alpha} a)}$, $a \in \mathbf{R}^d$. Тогда пространственные маргинальные процессы $^tX_t := ^t\hat{X}_t(\mathbf{R}_+ \times (\cdot))$ сходятся по распределению

$$^tX_t \xRightarrow[t \uparrow \infty]{} X'_1(0),$$

где $X'_1(0)$ — случайная плотность в момент времени $t = 1$ в начале координат у маргинального процесса $X' := \hat{X}'(\mathbf{R}_+ \times (\cdot))$ (см. предложение 3(а)) $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесса $\hat{X}'$, начинающегося с $\hat{X}'_0 = i_0 \delta_{(0, a)}$.

(б) (Сходимость процесса X_t с сохранением массы.) Если $\hat{X}_0 = i_0 \delta_0 \times \ell$, то

$$X_t := \hat{X}_t(\mathbf{R}_+ \times (\cdot)) \xRightarrow[t \uparrow \infty]{} X'_1(0) \ell \quad \text{по распределению,}$$

где $X'_1(0)$ то же, что и в п. (а), но с $\hat{X}'_0 = i_0 \delta_0 \times \ell$; таким образом, математическое ожидание предельного состояния равно i_0 и, следовательно, потери массы не происходит.

Заметим, что если начальное состояние суперпроцесса имеет вид $\hat{X}_0 = i_0 \delta_0 \times \ell$ (как в п. (б)), то причину того, почему в критической размерности возникают смеси мер Лебега в пространственной компоненте при $K \uparrow \infty$, вместо нулевой меры, как это имеет место для «классического» (d, α, β) -суперпроцесса, легко объяснить. Это явление происходит в силу сочетания хороших свойств шкалированных процессов и существования абсолютно непрерывных состояний. В отличие от (d, α, β) -суперпроцессов, имеющих сингулярные состояния в пространстве размерности $d_c = \alpha/\beta$ (являющемся для них критическим), пространственные проекции $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцессов имеют абсолютно непрерывные состояния в пространстве (критической) размерности $d_c = \alpha\gamma/\beta$ ($< \alpha/\beta$).

Отметим также, что утверждение, содержащееся в следствии 2(б), вполне аналогично соответствующему результату о суперброуновском реагенте с суперброуновским каталитическим процессом в пространстве критической размерности $d = 2$ (см. [11]). В последнем случае можно доказать также аналог п. (а) следствия 2.

1.9. Сходимость Z с сохранением массы в критической размерности. Теперь мы возвратимся к нашей маргинальной системе частиц $Z = \hat{Z}(\mathbf{R}_+ \times (\cdot))$. Прежде всего, сформулируем аналог следствия 2(б). Следующая теорема уточняет утверждение работы [26] о существовании нетривиальных предельных точек.

Теорема 1 (сохранение массы в сложно пуассоновской системе). Рассмотрим $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящуюся систему частиц $\hat{Z}$ с $\hat{Z}_0 = \pi_{i_0 G \times \ell}$. Предположим, что $d = \alpha\gamma/\beta$. Тогда

$$Z_t \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \pi_{X_1(0)\ell} \quad \text{по распределению,}$$

где $X_1(0)$ — случайная плотность в момент времени 1 в состоянии 0 у маргинального процесса $X = \hat{X}(\mathbf{R}_+ \times (\cdot))$ анализируемого $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесса $\hat{X}$ с $\hat{X}_0 = i_0 \delta_0 \times \ell$. В частности, предельное состояние имеет математическое ожидание $i_0 \ell$ (отсутствует потеря массы) и не является (пространственно) эргодическим.

Другими словами, предельная популяция является однородной сложно пуассоновской, а ее случайная интенсивность равна величине $X_1(0)$ — случайной плотности в момент времени 1 в начале координат маргинального процесса X для $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесса $\hat{X}$, стартового из состояния $i_0 \delta_0 \times \ell$.

Теорема 1 будет вытекать из теоремы, формулируемой в следующем пункте, при помощи аргументов, которые читатель найдет в конце того же пункта.

1.10. Точная асимптотика. Прогресс по сравнению с работой [26], достигнутый в теореме 1, стал возможен благодаря уточнению асимптотического поведения при $K \uparrow \infty$ маргинального процесса $Z^{(K)} := \hat{Z}^{(K)}(\mathbf{R}_+ \times (\cdot))$ перенормированной $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящейся системы частиц $\hat{Z}^{(K)}$, определенной в (5) и стартовой с конечной, но асимптотически большой начальной популяцией (аналог следствия 1(а) для систем частиц). К выводу этого уточненного соотношения мы и переходим. Доказываемое ниже соотношение можно рассматривать как пространственное обобщение соответствующего утверждения, установленного в [25] для ветвящихся процессов Беллмана–Харриса.

Введем необходимые для дальнейших рассуждений обозначения. Пусть $\mathcal{C}_p = \mathcal{C}_p(\mathbf{R}^d)$ — множество всех непрерывных функций $\varphi: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ таких, что $|\varphi| \leq c_\varphi \phi_p$ для некоторой константы c_φ , и таких, что отношение φ/ϕ_p может быть продолжено непрерывным образом на одноточечную компактификацию $\mathbf{R}^d$. Заметим, что продолжение в виде константы $\bar{\varphi} := 1 \otimes \varphi$, функции, $\varphi \in \mathcal{C}_p$ принадлежит $\hat{\mathcal{C}}_p$.

Следующее обозначение, кажущееся на первый взгляд несколько вычурным, будет удобно в дальнейших выкладках.

Обозначение 1 (смешанные законы распределения). Обозначим через $\mathbf{P}_{\delta(\tau,a)}$ («усредненный», детерминированный) закон распределения $\int_0^\infty dG(u) \mathbf{P}_{\delta(u,a)}$ процесса $\bar{Z}$, порожденного одной частицей, находящейся в точке a и имеющей остаточное время жизни τ с распределением G . Аналогичные обозначения будут использоваться и в случае других смесей законов распределения. Например, мы будем писать $\hat{P}_{(\tau,a)}$ вместо $\int_0^\infty dG(u) \hat{P}_{(u,a)}$.

Для $\varphi \in \mathcal{C}_p^+$ положим

$$Q_t \varphi(a) := 1 - \mathbf{E}_{\delta(\tau,a)} \exp \langle \hat{Z}_t, -\bar{\varphi} \rangle = 1 - \mathbf{E}_{\delta(\tau,a)} \exp \langle Z_t, -\varphi \rangle, \quad (21)$$

$t \geq 0$, $a \in \mathbf{R}^d$. Заметим, что выражение $Q_t \varphi(a)$ входит в логарифм функционала Лапласа состояния $\hat{Z}_t$ нашей $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -ветвящейся системы частиц, порожденной однородной пуассоновской системой частиц $\hat{Z}_0 = \pi_{i_0 G \times \ell}$: $-\ln \mathbf{E}_{\pi_{i_0 G \times \ell}} \exp \langle \hat{Z}_t, -\bar{\varphi} \rangle = \langle i_0 \ell, Q_t \varphi \rangle$.

Используя эти обозначения для перенормированного процесса $\hat{Z}^{(K)}$, введенного в (5), получаем

$$\begin{aligned} -\ln \mathbf{E}_{\pi_{i_0 G \times \ell}} \exp \langle \hat{Z}_t^{(K)}, -\bar{\varphi} \rangle &= -\ln \mathbf{E}_{\pi_{i_0 G \times \ell}} \exp \langle Z_t^{(K)}, -\varphi \rangle \\ &= i_0 \int_{\mathbf{R}^d} da K^{d/\alpha} Q_{Kt} \varphi(K^{1/\alpha} a). \end{aligned} \quad (22)$$

Нас будет интересовать асимптотическое поведение величины

$$V_t^{(K)} \varphi(a) := K^{d/\alpha} Q_{Kt} \varphi(K^{1/\alpha} a), \quad (23)$$

входящей в подынтегральное выражение в (22). Сформулируем следующий *основной результат*.

Теорема 2 (точная асимптотика). *Предположим, что $d = \alpha\gamma/\beta$. Тогда для любых $\varphi \in \mathcal{C}_p^+$, $t > 0$ и $a \in \mathbf{R}^d$*

$$V_t^{(K)} \varphi(a) \xrightarrow{K \uparrow \infty} v_t^{\theta(\varphi)}(a), \quad (24)$$

где

$$\theta(\varphi) := \int_{\mathbf{R}^d} db [1 - e^{-\varphi(b)}] \quad (25)$$

и

$$v_t^{\theta(\varphi)}(a) := \hat{v}_t^{\theta(\varphi),0}(0, a). \quad (26)$$

Здесь $\hat{v}^{\theta(\varphi),0}$ — единственное решение уравнения (17) при $\theta = \theta(\varphi)$, $a = 0$ и ϱ таком же, что и в (12). В частности, $v^{\theta(\varphi)} = v = \{v_t(a): t > 0, a \in \mathbf{R}^d\} \geq 0$ является решением уравнения

$$v_t(a) = \theta(\varphi) p_t(a) - \varrho \int_0^t ds^\gamma E_a v_{t-s}^{1+\beta}(\xi_s), \quad (27)$$

$t > 0$, $a \in \mathbf{R}^d$.

Доказательство этой теоремы будет дано в п. 2.6 после подготовительной работы в пп. 2.3–2.5. При этом будет существенно использоваться ограничение $\gamma < 1$, содержащееся в комплексе условий 1(б) и необходимое для вывода всех основных утверждений работы. Заметим, что для нахождения точной асимптотики в случаях $\gamma = 1$ или $E\tau < \infty$ нужен иной подход; эти возможности будут исследованы в отдельной работе.

Отметим также, что для суперброуновских движений и ветвящихся суперброуновских движений с экспоненциальными временами жизни аналогичные точные асимптотики (в смысле теоремы 2) в пространствах критической размерности были получены Кленке в [17].

Теперь мы попробуем объяснить, как теорема 2 связана с упомянутыми ранее асимптотическими соотношениями для начальных популяций большого, но конечного размера.

Следствие 3 (популяции, порожденные популяциями конечного объема). Пусть $d = \alpha\gamma/\beta$. Предположим, что⁴⁾ $\hat{X}_0 = [K^{d/\alpha} i_0] \delta_{(\tau, K^{1/\alpha} a)}$ с $i_0 > 0$ и $a \in \mathbf{R}^d$. Тогда для маргинальных нормированных процессов $Z^{(K)} := \hat{Z}^{(K)}(\mathbf{R}_+ \times (\cdot))$ и $t > 0$

$$Z_t^{(K)} \xrightarrow{K \uparrow \infty} \pi_{X_t(0)\ell} \quad \text{по распределению,}$$

где $X_t(0)$ — случайная плотность в момент t в состоянии 0 маргинального процесса X , полученного из $(d, \alpha, \beta, \gamma)$ -суперпроцесса $\hat{X}$ с $\hat{X}_0 = i_0 \delta_{(0, a)}$.

Ясно, что предыдущее утверждение может быть переформулировано в духе следствия 2(а) в асимптотических терминах.

Доказательство следствия 3. Зафиксируем $t, i_0 > 0$, $a \in \mathbf{R}^d$ и $\varphi \in \mathcal{C}_p^+$. В силу свойства ветвления и определения перенормированного процесса (5) при $K > 0$ имеем

$$\ln \mathbf{E}_{[K^{d/\alpha} i_0] \delta_{(\tau, K^{1/\alpha} a)}} e^{-\langle Z_t^{(K)}, \varphi \rangle} = [K^{d/\alpha} i_0] \ln \mathbf{E}_{\delta_{(\tau, K^{1/\alpha} a)}} e^{-\langle Z_{Kt}, \varphi \rangle}.$$

Используя определение (21) величины $Q\varphi$ и переходя к пределу при $K \uparrow \infty$, получаем, что предел правой части последнего уравнения равен

$$\lim_{K \uparrow \infty} [K^{d/\alpha} i_0] \ln(1 - Q_{Kt} \varphi(K^{1/\alpha} a)) = -i_0 \lim_{K \uparrow \infty} V_t^{(K)} \varphi(a) = -i_0 v_t^{\theta(\varphi)}(a),$$

где мы использовали обозначение (23) и теорему 2. В силу определения (26) функции $v_t^{\theta(\varphi)}(a)$ и формулы (15) в предложении 3, находим

$$-i_0 v_t^{\theta(\varphi)}(a) = \ln \mathbf{E}_{i_0 \delta_{(0, a)}} \exp \{ -\theta(\varphi) X_t(0) \}.$$

Согласно соотношению (25), это и есть логарифм преобразования Лапласа однородной сложно пуассоновской системы частиц $\pi_{X_t(0)\ell}$, где процесс $\hat{X}$ начинается с $\hat{X}_0 = i_0 \delta_{(0, a)}$. Таким образом, с точностью до справедливости теоремы 2, интересующее нас следствие доказано.

⁴⁾ $[z]$ обозначает целую часть числа z .

Доказательство теоремы 1. Заметим, прежде всего, что в соответствии с определением (5)

$$Z_t = \widehat{Z}_1^{(t)}(\mathbf{R}_+ \times (\cdot)), \quad t > 0.$$

Нам нужно скомбинировать (22) и (24) (и использовать обозначение (23)), чтобы доказать, что для $\varphi \in \mathcal{C}_p^+$ и $\theta(\varphi)$ из (25)

$$-\ln \mathbf{E}_{\pi_{i_0 G \times t}} \exp \langle Z_t, -\varphi \rangle \xrightarrow{t \uparrow \infty} i_0 \int_{\mathbf{R}^d} da v_1^{\theta(\varphi)}(a), \quad (28)$$

поскольку правая часть в (28) является логарифмом преобразования Лапласа однородной сложно пуассоновской системы частиц $\pi_{X_1(0)\ell}$, в которой суперпроцесс $\widehat{X}$ порожден начальным состоянием $\widehat{X}_0 = i_0 \delta_0 \times \ell$. Для того чтобы убедиться в справедливости этого факта, осталось проверить, что в выражении

$$\int_{\mathbf{R}^d} da t^{d/\alpha} Q_t \varphi(t^{1/\alpha} a) \quad (29)$$

из (22) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $t \uparrow \infty$. С этой целью заметим, что в силу определения (21) величины Q

$$Q_t \varphi(a) \leq \mathbf{E}_{\delta_{(\tau, a)}} \langle Z_t, \varphi \rangle = E_a \varphi(\xi_t),$$

где мы использовали критичность процесса Z (см. ниже равенство (46)). Следовательно,

$$t^{d/\alpha} Q_t \varphi(t^{1/\alpha} a) \leq t^{d/\alpha} \int_{\mathbf{R}^d} db p_t(b - t^{1/\alpha} a) \varphi(b). \quad (30)$$

В силу свойства *самоподобия*

$$K^{d/\alpha} p_{Ks}(K^{1/\alpha} b) = p_s(b), \quad K, s > 0, \quad b \in \mathbf{R}^d, \quad (31)$$

переходных плотностей устойчивых распределений из комплекса условий 1(б), правая часть (30) может быть переписана в виде

$$\int_{\mathbf{R}^d} db p_1(t^{-1/\alpha} b - a) \varphi(b), \quad (32)$$

что сходится при $t \uparrow \infty$ к величине

$$p_1(a) \int_{\mathbf{R}^d} db \varphi(b) =: p_1(a) \|\varphi\|_1 \quad (33)$$

(здесь мы использовали симметрию p_s). Наконец, интегрируя выражения в (32) и (33) относительно da , мы получим в обоих случаях $\|\varphi\|_1$. Таким образом, можно применить обобщенную теорему о мажорируемой сходимости для оправдания возможности предельного перехода по t под знаком интеграла в (29). Это завершает доказательство нашей теоремы (с точностью до справедливости теоремы 2).

2. Оставшиеся доказательства. После некоторой подготовительной работы мы покажем в п. 2.2, что X имеет случайные плотности в каждой точке. Однако нашей главной целью является доказательство точной асимптотики в теореме 2. Это будет сделано в пп. 2.3–2.6.

2.1. Некоторые обозначения. Через c мы будем всегда обозначать положительные константы, которые могут меняться от формулы к формуле. Символ c с дополнительными индексами (например, c_f или c_G) будет использоваться для обозначения конкретных констант. В частности, константа вида $c_{(\#)}$ означает, что она впервые встретилась в формуле, помеченной номером $(\#)$.

Напомним, что символ ρ обозначает переходную плотность устойчивого распределения, введенного комплексом условий 1(a). Используя свойство самоподобия (31), мы немедленно получаем следующую простую оценку:

$$\rho_r(a) \leq c_{(34)} r^{-d/\alpha}, \quad r > 0, \quad a \in \mathbf{R}^d. \quad (34)$$

Кроме того (см., например, [10, формула (A.8)]),

$$\rho_r(a) \leq c_{(35)} r |a|^{-d-\alpha}, \quad r > 0, \quad a \in \mathbf{R}^d. \quad (35)$$

Обозначим через $\hat{S} := \{\hat{S}_t; t \geq 0\}$ полугруппу марковского процесса $\hat{\xi}$.

Напомним также, что полужирной буквой $\mathbf{P}$ обозначается закон распределения, связанный с системой частиц, буквой $\mathbb{P}$ — закон распределения, относящийся к суперпроцессу, а курсивное P используется для обозначения законов распределения «основных» случайных объектов таких, как ξ, τ, η . Соответствующие математические ожидания будут обозначаться символами $\mathbf{E}, \mathbb{E}, E$.

2.2. Абсолютная непрерывность мер, являющихся состояниями процесса X (доказательство предложения 3). Здесь мы докажем предложение 3. Доказательство будет основано на модификации аргументов, предложенных в работе [19]. Основным результатом упомянутой статьи является общий критерий абсолютной непрерывности мер, являющихся состояниями некоторых каталитических суперпроцессов. Для доказательства этого критерия в [19] предполагалось, что процесс движения имеет переходные плотности. К сожалению, процесс движения ξ у анализируемого нами суперпроцесса $\hat{X}$ не обладает таким свойством. Однако этот факт не является препятствием, поскольку здесь мы хотим лишь показать, что спроектированный процесс X имеет абсолютно непрерывные состояния. При этом мы существенно используем методы работы [19] и в этом смысле идем навстречу предложению Кленке в [19] «подумать об интересных новых примерах» применения его главной теоремы.

Напомним, что $d < \alpha/\beta$. Зафиксируем $\mu \in \mathcal{M}_p(\mathbf{E})$ и $t > 0$.

1° (*Абсолютная непрерывность математических ожиданий.*) Математическое ожидание $\mathbb{E}_\mu X_t$, рассматриваемое как мера на $\mathbf{R}^d$, абсолютно непрерывно с непрерывной плотностью

$$a \mapsto \int_E \mu(d(u, b)) p_t(b - a) =: \mu * p_t(a)$$

(см. формулу (9) для математического ожидания).

2° (*Абсолютная непрерывность состояний.*) Предположим на время, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(-\ln \mathbb{E}_\mu \exp \langle X_t, -\theta \delta_a * \chi_\varepsilon \rangle \right) =: w(a, \theta) \quad (36)$$

существует для любых $a \in \mathbf{R}^d$ и $\theta > 0$ и что

$$\frac{\partial}{\partial \theta} w(a, \theta) |_{\theta=0+} = \mu * p_t(a), \quad a \in \mathbf{R}^d. \quad (37)$$

Тогда, как указано в (14), для любого $a \in \mathbf{R}^d$ существует случайная плотность $X_t(a) = \langle X_t, \delta_a \rangle$ с логарифмом преобразования Лапласа

$$-\ln \mathbb{E}_\mu \exp [-\theta X_t(a)] = w(a, \theta), \quad \theta > 0,$$

и «полным» (без потери меры) математическим ожиданием $\mathbb{E}_\mu X_t(a) = \mu * p_t(a)$. Отсюда, вспоминая шаг 1°, заключаем, что сингулярная компонента случайной меры X_t исчезает почти наверное. Это убеждает нас в справедливости п. (б) доказываемого утверждения относительно абсолютной непрерывности (более строгие формулировки можно найти, например, в [19, лемма 2.2]).

3° (*Равномерная регулярность.*) Для доказательства (36) и (37) вернемся к маргинальной мере $X_t = \hat{X}_t(\mathbf{R}_+ \times (\cdot))$ суперпроцесса $\hat{X}_t$ и используем представление (7) для логарифма преобразования Лапласа. Таким образом, необходимо исследовать уравнение (8) для логарифма преобразования Лапласа, в котором функция ψ заменена на функцию

$$\theta 1 \otimes \delta_a^\varepsilon =: \theta \bar{\delta}_a^\varepsilon, \quad a \in \mathbf{R}^d, \quad (38)$$

где $\delta_a^\varepsilon(b) := \delta_a * \chi_\varepsilon(b) = \chi_\varepsilon(b - a)$, $b \in \mathbf{R}^d$, а χ_ε взято из (13), а затем перейти к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$. Заметим, что $\bar{\delta}_a^\varepsilon$ сближается с введенной в (19) функцией $\bar{\delta}_a = 1 \otimes \delta_a$ — продолжением δ -функции в виде постоянной на E , которое, конечно, не принадлежит множеству $\mathcal{C}_p^+$ пробных функций, входящих в уравнение (8) для логарифма преобразования Лапласа. Поэтому нам придется оправдать ее использование, для того чтобы установить (17).

В согласии с (20), введем функционал

$$\hat{S}_t \bar{\delta}_a := 1 \otimes (\delta_a * p_t), \quad t > 0, \quad a \in \mathbf{R}^d. \quad (39)$$

Заметим, что функционал $\hat{S}_t \bar{\delta}_a$ можно было бы ввести, используя меру столкновений [7], [22] между мерой $\bar{\delta}_a = \ell_+ \times \delta_a$ и переходной мерой, связанной с $\hat{S}_t$, которая, в силу независимости компонент вектора $(\vartheta, \xi) = \hat{\xi}$,

является продакт-мерой с непрерывной функцией плотности p_t второй компоненты.

Покажем сначала, что семейство $\{\bar{\delta}_a: a \in \mathbf{R}^d\}$ мер на E имеет свойство *равномерной регулярности*: для всех $(u, b) \in E$ и $0 \leq r \leq t$

$$\sup_{a \in \mathbf{R}^d} \widehat{E}_{(u,b)} \int_r^t dk_s [\widehat{S}_{t-s} \bar{\delta}_a(\widehat{\xi}_s)]^{1+\beta} \quad (40)$$

$$\leq c_{(41)} t^{-d/\alpha} \int_{\{u \vee r \leq s \leq t\}} d_s(s-u)^\gamma (t-s)^{-\beta d/\alpha} < \infty. \quad (41)$$

Действительно, используя (39), опираясь на независимость k и ξ и вспоминая (10), можно проверить, что математическое ожидание в (40) ограничено сверху величиной

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{\{u \vee r \leq s \leq t\}} d_s(s-u)^\gamma E_b p_{t-s}^{1+\beta}(\xi_s - a) \\ & \leq c t^{-d/\alpha} \int_{\{u \vee r \leq s \leq t\}} d_s(s-u)^\gamma (t-s)^{-\beta d/\alpha}, \end{aligned} \quad (42)$$

где мы сначала применили простую оценку (34) к p^β , затем уравнение Колмогорова–Чепмена к математическому ожиданию по p и, наконец, снова (34). Поскольку γ и $\beta d/\alpha$ принадлежат интервалу $(0, 1)$, интеграл в (42) конечен. Следовательно, оценки (40)–(41) справедливы.

4° (*Равномерная интегрируемость при регуляризации.*) Проверим теперь, что для $u \geq 0$ и $a, b \in \mathbf{R}^d$

$$\lim_{r \uparrow t} \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \widehat{E}_{(u,b)} \int_r^t dk_s [\widehat{S}_{t-s} \bar{\delta}_a^\varepsilon(\widehat{\xi}_s)]^{1+\beta} = 0 \quad (43)$$

(вспомните обозначение (38)). Действительно, при помощи равенства $\bar{\delta}_a^\varepsilon = 1 \otimes \delta_a^\varepsilon$ получаем

$$\widehat{S}_{t-s} \bar{\delta}_a^\varepsilon(\widehat{\xi}_s) = S_t \delta_a^\varepsilon(\widehat{\xi}_s) = \int_{\mathbf{R}^d} da' \chi_\varepsilon(a') p_t(a + a' - \xi_s)$$

(здесь S обозначает полугруппу, связанную с p). Отсюда, применяя неравенство Йенсена, выводим, что

$$[\widehat{S}_{t-s} \bar{\delta}_a^\varepsilon(\widehat{\xi}_s)]^{1+\beta} \leq \int_{\mathbf{R}^d} da' \chi_\varepsilon(a') [\widehat{S}_{t-s} \overline{\delta_{a+a'}}(\widehat{\xi}_s)]^{1+\beta}$$

(вспомните (39)). Следовательно, математическое ожидание в (43) можно ограничить сверху величиной $\sup_{a \in \mathbf{R}^d} \widehat{E}_{(u,b)} \int_r^t dk_s [\widehat{S}_{t-s} \bar{\delta}_a(\widehat{\xi}_s)]^{1+\beta}$, которая не зависит от ε и, более того, стремится к нулю при $r \uparrow t$ в силу свойства равномерной регулярности (40)–(41). Это приводит нас к (43).

5° (*Заключительный этап доказательства.*) Согласно шагу 3°, для любого фиксированного a из $\mathbf{R}^d$ мера $\bar{\delta}_a$ регулярна на E в смысле определения 1.1 работы [19]. В настоящей работе функция $\widehat{S}_t \bar{\delta}_a$ играет роль плотности процесса движения, примененного в работе Кленке к некоторой мере ν (которая в нашем случае равна $\bar{\delta}_a$). Теперь, согласно

предложению 1.2 в [19] (точнее, проводя шаг за шагом его доказательство с очевидными изменениями, вызванными нашей модификацией упомянутого определения 1.1), уравнение (8), в котором функция ψ заменена на $\theta\bar{\delta}_a$ (при $0 < \theta \leq 1$), т.е. уравнение (17), имеет в точности одно решение $\hat{v} = \hat{v}^{\theta,a} = \hat{V}(\theta\bar{\delta}_a)$ и

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{v}_t^{\theta,a}(e') \big|_{\theta=0+} = p_t(a - a'), \quad e' = (u', a') \in E.$$

Более того, так же как и при доказательстве формулы (2.12) в [19], используя (43), заключаем, что

$$\hat{V}_t(\theta\bar{\delta}_a^\varepsilon)(e') \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \hat{V}_t(\theta\bar{\delta}_a)(e') = \hat{v}_t^{\theta,a}(e'), \quad e' \in E.$$

Отсюда при помощи неравенства $0 \leq \hat{V}_t\psi(e) \leq \hat{E}_e\psi(\hat{\xi}_t)$, $t \geq 0$, $e \in E$, $\psi \in \hat{\mathcal{C}}_p^+$, и теоремы о мажорируемой сходимости получаем

$$\langle \mu, \hat{V}_t(\theta\bar{\delta}_a^\varepsilon) \rangle \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \langle \mu, \hat{V}_t(\theta\bar{\delta}_a) \rangle = \langle \mu, \hat{v}_t^{\theta,a} \rangle.$$

Это приводит нас к желаемым утверждениям (36) и (37) шага 2° с $w(a, \theta) = \langle \mu, \hat{v}_t^{\theta,a} \rangle$ и одновременно устанавливает справедливость (15)–(17). Доказательство предложения 3 завершено.

2.3. Уравнение типа восстановления и его перенормировка.

При доказательстве асимптотических свойств функции $V^{(K)}\varphi$, заявленных в теореме 2, исходной точкой будет интегральное уравнение, которому эта функция удовлетворяет (лемма 3 ниже). Для его вывода нам понадобятся новые обозначения.

Напомним, что случайная величина τ с законом распределения G обозначает время жизни новорожденной частицы ветвящейся системы частиц $\hat{Z}$. Пусть случайные величины $\tau_1, \tau_2, \dots$ являются независимыми вероятностными копиями случайной величины τ , а $\sigma_n := \sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i$, $n \geq 0$. Полагая

$$\begin{aligned} g_t &:= \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\sigma_n \leq t\}}, & t \geq 0, \\ \vartheta_t^\circ &:= \sigma_{g_t+1} - t, & t \geq 0, \end{aligned} \tag{44}$$

мы получим «процесс числа поколений» (см. рис. 1) и процесс остаточного времени жизни, связанный с историей развития одной частицы анализируемой ветвящейся системы частиц (см. рис. 2).

Рис. 1. Процесс g числа поколений

Рис. 2. Процесс v^o остаточного времени жизни

Вспоминая, что ξ обозначает процесс движения частиц, мы получим пару $\hat{\xi}^o := (v^o, \xi)$ независимых процессов. Закон распределения этой пары обозначим символом $\hat{P}_e^o$, $e \in E$. Отметим, что $(\hat{\xi}^o, \hat{P}_e^o, e \in E)$ является марковским процессом с càdlàg-траекториями в $E = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$ и что законы распределения $\hat{P}_e^o$, $e \in E$, описывают как процесс восстановления σ , так и процесс числа поколений g . Напомним, что обозначение $Q\varphi$ было введено в (21).

Лемма 2 (уравнение типа восстановления). *Зафиксируем $\varphi \in \mathcal{C}_p^+$. Тогда*

$$Q_t\varphi(a) = E_a[1 - e^{-\varphi(\xi_t)}] - c_f \hat{E}_{(\tau,a)}^o \int_{(0,t]} dg_s [Q_{t-s}\varphi(\xi_s)]^{1+\beta}, \quad (45)$$

$t \geq 0$, $a \in \mathbf{R}^d$.

Доказательство. Для получения желаемого уравнения необходимо следовать рассуждениям, применявшимся при доказательстве леммы 3 работы [20], с очевидными изменениями, вызванными описанием остаточных времен жизни частиц. В частности, следует отдельно рассмотреть возможности $\tau \geq t$ и $\tau < t$, причем в последнем случае необходимо провести дальнейшее итерирование рассуждений.

Таким образом, несмотря на то, что распределение продолжительности жизни частиц не является экспоненциальным, мы можем использовать восстановления во временных точках гибели частиц и свойства инвариантности, связанные с этими точками.

Легко видеть, что соотношение (45) немедленно приводит к следующей формуле для математических ожиданий:

$$E_{\delta_{(\tau,a)}}\langle \hat{Z}_t, \bar{\varphi} \rangle = E_a \varphi(\xi_t), \quad a \in \mathbf{R}^d, \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{C}_p^+ \quad (46)$$

(для ее получения достаточно, например, заменить φ на $\theta\varphi$ и продифференцировать (45) по $\theta > 0$ при $\theta = 0+$).

Напомним, что мы интересуемся нормированной величиной $V^{(K)}\varphi$ (где $K > 0$ и $\varphi \in \mathcal{C}_p^+$), введенной в (23). Для $t \geq 0$ и $a \in \mathbf{R}^d$ положим

$$W_t^{(K)}\varphi(a) := K^{d/\alpha} E_{K^{1/\alpha}a} (1 - \exp[-\varphi(\xi_{Kt})]) \quad (47)$$

и введем (непрерывную справа) функцию восстановления N , соответствующую функции распределения продолжительности жизни G :

$$N_s := Eg_s = \sum_{k=1}^{\infty} G^{*k}(s), \quad s \geq 0 \quad (48)$$

(вспомните обозначение (44)). Заметим, что в силу предположения (2) в комплексе условий 1(6)

$$N_K \sim DK^\gamma \quad \text{при} \quad K \uparrow \infty, \quad (49)$$

где

$$D := \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \frac{1}{c_G}. \quad (50)$$

Лемма 3 (нормированное уравнение). *Зафиксируем $K > 0$ и $\varphi \in \mathcal{C}_p^+$. Функционал $V^{(K)}\varphi$, определенный в (23), удовлетворяет интегральному уравнению*

$$V_t^{(K)}\varphi(a) = W_t^{(K)}\varphi(a) - c_f \int_{(0,t]} \frac{d_s N_{Ks}}{K^\gamma} E_a [V_{t-s}^{(K)}\varphi(\xi_s)]^{1+\beta}, \quad (51)$$

$t \geq 0, a \in \mathbf{R}^d$.

Доказательство. Преобразуя (45) на основе определения (23), замечаем, что в то время как левая часть (45) превращается в $V_t^{(K)}\varphi(a)$, первый член в правой части (45) становится равным величине $W^{(K)}$ из формулы (51). Для преобразования оставшегося члена

воспользуемся независимостью процесса числа поколений g и процесса движения ξ , а также определением (48) величины N . В результате получим

$$\begin{aligned} & -c_f K^{d/\alpha} E_{K^{1/\alpha}a} \int_{(0,Kt]} dN_s [Q_{Kt-s}\varphi(\xi_s)]^{1+\beta} \\ & = -c_f K^{d/\alpha} \int_{(0,t]} d_s N_{Ks} E_{K^{1/\alpha}a} [Q_{K(t-s)}\varphi(\xi_{Ks})]^{1+\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя *самоподобие* устойчивого процесса ξ , т.е. равенство

$$E_{K^{1/\alpha}a}(K^{-1/\alpha}\xi_{Ks} \in \cdot) = E_a(\xi_s \in \cdot), \quad (52)$$

$a \in \mathbf{R}^d$, $s \geq 0$, $K > 0$, предположение $d\beta/\alpha = \gamma$ и повторно соотношение (23), получаем оставшийся член в (51). Доказательство закончено.

2.4. Сходимость к предельному уравнению. Наша следующая задача — устремить $K \uparrow \infty$ в интегральном уравнении (51), предполагая, что $t > 0$. С этой целью заметим сначала, что в силу свойства самоподобия в форме (52) функционал $W^{(K)}$, введенный в (47), может быть записан в виде

$$W_t^{(K)}\varphi(a) = \int_{\mathbf{R}^d} db \, p_t(K^{-1/\alpha}b - a) [1 - e^{-\varphi(b)}]. \quad (53)$$

Отсюда по теореме о мажорируемой сходимости получаем

$$W_t^{(K)}\varphi(a) \xrightarrow{K \uparrow \infty} \theta(\varphi) p_t(a), \quad t > 0, \quad a \in \mathbf{R}^d, \quad (54)$$

где величина $\theta(\varphi)$ та же, что и в (25). С другой стороны, в силу (49) для фиксированного $T > 0$

$$\frac{N_{Ks}}{K^\gamma} = \frac{N_K}{K^\gamma} \frac{N_{Ks}}{N_K} \xrightarrow{K \uparrow \infty} Ds^\gamma \quad \text{равномерно по } s \in [0, T]. \quad (55)$$

Для доказательства этого факта нужно зафиксировать $\varepsilon \in (0, T)$ и рассмотреть отдельно случаи $s \leq \varepsilon$ и $\varepsilon < s \leq T$. Осталось подставить (54) и (55) в (51) и, используя равенство

$$c_f D = \varrho$$

(вспомните (50) и (12)), убедиться в том, что

$$V_t^{(K)}\varphi(a) \xrightarrow{K \uparrow \infty} v_t(a), \quad (56)$$

где функция v является решением уравнения (27).

Доказательство (56) мы начнем с того, что покажем справедливость этого соотношения в смысле некоторой равномерной сходимости в метрике $L^1 = (L^1(da), \|\cdot\|_1)$. Поскольку в дальнейшем будут использоваться рассуждения, опирающиеся на аналитическое продолжение, мы

введем дополнительный множитель $\lambda \geq 0$ у функции φ и рассмотрим функцию

$$v^{(\lambda)} := v^{\theta(\lambda\varphi)} \quad (57)$$

вместо функции v . Тогда уравнение (27) преобразуется к виду

$$v_t^{(\lambda)}(a) = \theta(\lambda\varphi) p_t(a) - \varrho \int_0^t d(s^\gamma) E_a[v_{t-s}^{(\lambda)}(\xi_s)]^{1+\beta}, \quad (58)$$

$t > 0$, $a \in \mathbf{R}^d$.

Лемма 4 (равномерная сходимость в L^1 для малых значений λ). *Зафиксируем $0 < L < T$ и $\varphi \in \mathcal{C}_p^+$. Найдется константа $\Lambda = \Lambda(T, \varphi) > 0$ такая, что для функции $V^{(K)}(\lambda\varphi)$, определенной в (23), справедливо соотношение*

$$\lim_{K \uparrow \infty} \sup_{L \leq t \leq T} \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \|V_t^{(K)}(\lambda\varphi) - v_t^{(\lambda)}\|_1 = 0, \quad (59)$$

где функция $v^{(\lambda)} \geq 0$ является решением уравнения (58) с $\varrho = c_f D$.

В качестве предварительного шага доказательства леммы оценим, воспользовавшись уравнением (51) (заменив в нем φ на $\lambda\varphi$) и равенством (58), разность по норме L^1 , входящую в (59):

$$\|V_t^{(K)}(\lambda\varphi) - v_t^{(\lambda)}\|_1 \leq A_1 + c_f A_2 + c_f A_3 + c_f A_4 + c_f D A_5. \quad (60)$$

В этой оценке $t > 0$ и $\lambda \geq 0$ фиксированы, а величины, входящие в правую часть, могут быть записаны, при помощи тождества

$$\int_{\mathbf{R}^d} da E_a F(\xi_s) = \|F\|_1, \quad F \geq 0 \text{ — измеримая функция, } s \geq 0, \quad (61)$$

в виде

$$\begin{aligned} A_1 &:= \|W_t^{(K)}(\lambda\varphi) - \theta(\lambda\varphi) p_t\|_1, \\ A_2 &:= \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{K^\gamma} \|[V_{t-s}^{(K)}(\lambda\varphi)]^{1+\beta} - [v_{t-s}^{(\lambda)}]^{1+\beta}\|_1, \\ A_3 &:= \frac{(N_{Kt} - N_{Kt-})}{K^\gamma} \|[V_0^{(K)}(\lambda\varphi)]^{1+\beta}\|_1, \\ A_4 &:= \left| \frac{N_K}{K^\gamma} - D \right| \left\| \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{N_K} [v_{t-s}^{(\lambda)}]^{1+\beta} \right\|_1, \\ A_5 &:= \left\| \int_{(0,t)} \left(\frac{d_s N_{Ks}}{N_K} - d(s^\gamma) \right) [v_{t-s}^{(\lambda)}]^{1+\beta} \right\|_1. \end{aligned}$$

2.5. Равномерная сходимость в L^1 . Здесь мы докажем лемму 4. Наши рассуждения будут разбиты на несколько этапов.

1° (*Остаточный член A_1 .*) Прежде всего, выберем произвольную константу $\Lambda > 0$ и рассмотрим все $\lambda \in [0, \Lambda]$. В силу (53)

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \int_{\mathbf{R}^d} da \int_{\mathbf{R}^d} db \left| p_t(K^{-1/\alpha}b - a) - p_t(a) \right| [1 - e^{-\lambda\varphi(b)}] \\ &\leq c_\varphi \Lambda \int_{\mathbf{R}^d} db \phi_p(b) \int_{\mathbf{R}^d} da \left| p_t(K^{-1/\alpha}b - a) - p_t(a) \right|. \end{aligned} \quad (62)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C = C(\varepsilon)$ такая, что $\int_{|b| \geq C} db \phi_p(b) \leq \varepsilon$, в то время как интеграл в (62) ограничен числом 2, поскольку функции p_s — вероятностные плотности. С другой стороны, в силу равномерной непрерывности переходных плотностей p устойчивых распределений на $[L, T] \times \mathbf{R}^d$ внутренний интеграл в последней строке неравенств (62) при $|b| \leq C$ не превосходит ε для достаточно больших значений K (зависящих от C). Отсюда следует, что

$$\lim_{K \uparrow \infty} \sup_{\substack{L \leq t \leq T \\ \lambda \in [0, \Lambda]}} A_1 = 0. \quad (63)$$

2° (Остаточный член A_3 .) Используя оценку $\| [V_0^{(K)}(\lambda\varphi)]^{1+\beta} \|_1 \leq K^{\beta d/\alpha} \lambda \|\varphi\|_1$, вытекающую из неравенства

$$V_0^{(K)}(\lambda\varphi)(a) \leq \lambda K^{d/\alpha} \varphi(K^{-1/\alpha}a) \quad (64)$$

(в силу (51) и (47)), условие критичности $\beta d/\alpha = \gamma$ и очевидное соотношение

$$\lim_{K \uparrow \infty} \sup_{L \leq t \leq T} (N_{Kt} - N_{Kt-}) = 0 \quad (65)$$

(см., например, [9, формула (9.1.9)]), нетрудно увидеть, что

$$\lim_{K \uparrow \infty} \sup_{\substack{L \leq t \leq T \\ \lambda \in [0, \Lambda]}} A_3 = 0. \quad (66)$$

3° (Остаточный член A_4 .) Из (58) легко следует, что для $s > 0$

$$0 \leq v_s^{(\lambda)}(a) \leq \theta(\lambda\varphi) p_s(a) \leq \Lambda \|\varphi\|_1 p_s(a). \quad (67)$$

Отсюда, используя оценку (34) и тождество $d\beta/\alpha = \gamma$, получаем

$$0 \leq [v_s^{(\lambda)}(a)]^{1+\beta} \leq c (\Lambda \|\varphi\|_1)^{1+\beta} \frac{p_s(a)}{s^\gamma}. \quad (68)$$

Функции p_s являются плотностями вероятностных распределений. Следовательно,

$$A_4 \leq c (\Lambda \|\varphi\|_1)^{1+\beta} \left| \frac{N_K}{K^\gamma} - D \right| \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{N_K} \frac{1}{(t-s)^\gamma}. \quad (69)$$

Очевидная замена переменных показывает, что для $0 \leq r < t$

$$\int_r^t d(s^\gamma) (t-s)^{-\gamma} \leq \gamma t^{1-\gamma} \int_{r/t}^1 \frac{ds}{s^{1-\gamma} (1-s)^\gamma} < \infty.$$

Сочетая эту оценку с (55), легко понять, что

$$\int_{[r,t]} \frac{d_s N_{Ks}}{N_K} \frac{1}{(t-s)^\gamma} \xrightarrow{K \uparrow \infty} \gamma \int_{r/t}^1 \frac{ds}{s^{1-\gamma} (1-s)^\gamma} \leq \gamma B(\gamma, 1-\gamma) \quad (70)$$

равномерно по $0 \leq r < t \leq T$, где B обозначает бета-функцию. Для этого достаточно аппроксимировать интеграл интегральными суммами и использовать монотонность по времени и непрерывность предела в (55). Таким образом, соотношение (55) приводит нас к оценке

$$\lim_{K \uparrow \infty} \sup_{\substack{0 < t \leq T \\ \lambda \in [0, \Lambda]}} A_4 = 0. \quad (71)$$

4° (*Остаточный член A_5 .*) Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$. Разобьем интеграл, входящий в A_5 , на интегралы по промежуткам $(1 - \varepsilon)t \leq s < t$ и $0 \leq s \leq (1 - \varepsilon)t$. В первом случае перейдем сначала от дифференциала к сумме и применим (68), а затем применим неравенство (70) с $r = (1 - \varepsilon)t$. В результате получим оценку, стремящуюся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t, λ и K . Во втором случае воспользуемся тем, что отображение $s \mapsto \| [v_{t-s}^{(\lambda)}]^{1+\beta} \|_1$ на интервале $[0, (1 - \varepsilon)t]$ ограничено и непрерывно, а также слабой сходимостью

$$\frac{d_s N_{Ks}}{N_K} \xrightarrow{K \uparrow \infty} \frac{\gamma ds}{s^{1-\gamma}}$$

на том же интервале, равномерной по t . Объединяя приведенные выше рассуждения, заключаем, что

$$\lim_{K \uparrow \infty} \sup_{\substack{L \leq t \leq T \\ \lambda \in [0, \Lambda]}} A_5 = 0. \quad (72)$$

5° (*Оценка для A_2 .*) Используя элементарное неравенство

$$|x^{1+\beta} - y^{1+\beta}| \leq (1 + \beta) |x - y| (x^\beta + y^\beta), \quad x, y \geq 0,$$

оценку

$$0 \leq V_t^{(K)}(\lambda\varphi)(a) \leq W_t^{(K)}(\lambda\varphi)(a), \quad (73)$$

вытекающую из (51), получаем $0 \leq V_t^{(K)}(\lambda\varphi)(a) \leq c \Lambda \|\varphi\|_1 t^{-d/\alpha}$ (вспомните (53) и (34)). Теперь неравенства (67) и (34) позволяют нам заключить, что L^1 -норма, входящая в A_2 , ограничена при $0 \leq s < t$ величиной

$$c (\Lambda \|\varphi\|_1)^\beta (t - s)^{-\gamma} \|V_{t-s}^{(K)}(\lambda\varphi) - v_{t-s}^{(\lambda)}\|_1.$$

Таким образом,

$$A_2 \leq c (\Lambda \|\varphi\|_1)^\beta \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{K^\gamma} \frac{\|V_{t-s}^{(K)}(\lambda\varphi) - v_{t-s}^{(\lambda)}\|_1}{(t - s)^\gamma}. \quad (74)$$

6° (*Неравенство типа Гронолла.*) Подставив (63), (66), (71), (72) и оценку (74) в (60) получаем следующее утверждение (напомним, что число $\Lambda > 0$ считается фиксированным, но его конкретное значение пока

не выбрано): для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $K_0 = K_0(\varepsilon, \Lambda) > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} & \|V_t^{(K)}(\lambda\varphi) - v_t^{(\lambda)}\|_1 \\ & \leq \varepsilon + c_{(75)} (\Lambda \|\varphi\|_1)^\beta \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{K^\gamma} \frac{\|V_{t-s}^{(K)}(\lambda\varphi) - v_{t-s}^{(\lambda)}\|_1}{(t-s)^\gamma} \end{aligned} \quad (75)$$

для всех $K \geq K_0$, $t \in [L, T]$ и всех $\lambda \in [0, \Lambda]$. Из оценок (73), (67) и представления (53) для $W^{(K)}$ получаем, что $\|V_{t-s}^{(K)}(\lambda\varphi) - v_{t-s}^{(\lambda)}\|_1 \leq 2\Lambda \|\varphi\|_1$ равномерно по $K > 0$, $s < t$ и $\lambda \in [0, \Lambda]$. Следовательно, величина

$$\check{D}_t^{(K)} := \sup_{\substack{s \in [0, t] \\ \lambda \in [0, \Lambda]}} \|V_{t-s}^{(K)}(\lambda\varphi) - v_{t-s}^{(\lambda)}\|_1$$

ограничена по $K > 0$ и $t > 0$. Отсюда при помощи неравенства типа Гронуолла в (75) находим

$$\check{D}_t^{(K)} \leq \varepsilon + c_{(75)} (\Lambda \|\varphi\|_1)^\beta \check{D}_t^{(K)} \frac{N_K}{K^\gamma} \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{N_K} \frac{1}{(t-s)^\gamma} \quad (76)$$

для всех $K \geq K_0$ и $t \in [L, T]$. В силу сходимости и ограниченности в (70),

$$\limsup_{K \uparrow \infty} \sup_{0 < t \leq T} \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{N_K} \frac{1}{(t-s)^\gamma} := c_{(77)} < \infty. \quad (77)$$

Вводя конечную величину

$$\check{D} := \limsup_{K \uparrow \infty} \sup_{L \leq t \leq T} \check{D}_t^{(K)}$$

и используя (76) и асимптотическое соотношение (49), мы получаем $\check{D} \leq \varepsilon + c_{(75)} (\Lambda \|\varphi\|_1)^\beta \check{D} c_{(77)}$. Эта оценка в силу произвольности $\varepsilon > 0$ дает

$$\check{D} \leq c_{(78)} (\Lambda \|\varphi\|_1)^\beta \check{D}. \quad (78)$$

Выбирая теперь $\Lambda > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство $c_{(78)} (\Lambda \|\varphi\|_1)^\beta < 1$, мы видим, что $\check{D} = 0$. Таким образом, справедливость (59) установлена. Доказательство леммы 4 завершено.

2.6. Поточечная сходимость (доказательство теоремы 2).

Покажем, что установленная нами L^1 -сходимость влечет поточечную сходимость.

Следствие 4 (поточечная сходимость при малых λ). *Зафиксируем $T > 0$, $\varphi \in \mathcal{C}_p^+$ и выберем $\Lambda = \Lambda(T, \varphi) > 0$ таким же, как и в лемме 4. Тогда для каждого $\lambda \in [0, \Lambda]$*

$$V_t^{(K)}(\lambda\varphi)(a) \xrightarrow{K \uparrow \infty} v_t^{(\lambda)}(a), \quad t \in (0, T], \quad a \in \mathbf{R}^d. \quad (79)$$

Доказательство. Поскольку доказательство этого следствия сходно с рассуждениями, использовавшимися при доказательстве леммы 4 в предыдущем пункте, мы опустим некоторые детали. По аналогии с (60), для фиксированных $t \in (0, T]$, $a \in \mathbf{R}^d$ и $\lambda \in [0, \Lambda(T, \varphi)]$ имеем

$$|V_t^{(K)}(\lambda\varphi)(a) - v_t^{(\lambda)}(a)| \leq A'_1 + c_f[A'_2 + A'_3 + A'_4 + D A'_5],$$

где

$$\begin{aligned} A'_1 &:= \left| W_t^{(K)}(\lambda\varphi)(a) - \theta(\lambda\varphi) p_t(a) \right|, \\ A'_2 &:= \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{K^\gamma} \int_{\mathbf{R}^d} db p_s(b-a) \left| [V_{t-s}^{(K)}(\lambda\varphi)(b)]^{1+\beta} - [v_{t-s}^{(\lambda)}(b)]^{1+\beta} \right|, \\ A'_3 &:= \frac{(N_{Kt} - N_{Kt-})}{K^\gamma} \int_{\mathbf{R}^d} db p_t(b-a) [V_0^{(K)}(\lambda\varphi)(b)]^{1+\beta}, \\ A'_4 &:= \left| \frac{N_K}{K^\gamma} - D \right| \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{N_K} \int_{\mathbf{R}^d} db p_s(b-a) [v_{t-s}^{(\lambda)}(b)]^{1+\beta}, \\ A'_5 &:= \left| \int_{(0,t)} \left(\frac{d_s N_{Ks}}{N_K} - d(s^\gamma) \right) \int_{\mathbf{R}^d} db p_s(b-a) [v_{t-s}^{(\lambda)}(b)]^{1+\beta} \right|. \end{aligned}$$

В силу теоремы о мажорируемой сходимости $A'_1 \rightarrow 0$ и $A'_5 \rightarrow 0$ при $K \uparrow \infty$. То же самое верно и для A'_4 . Действительно, воспользовавшись неравенством (68) и уравнением Колмогорова–Чепмена, получим

$$A'_4 \leq c (\Lambda \|\varphi\|_1)^{1+\beta} \left| \frac{N_K}{K^\gamma} - D \right| p_t(a) \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{N_K} \frac{1}{(t-s)^\gamma}, \quad (80)$$

и, следовательно, мы можем применить оценки, приведенные сразу после (69). Аналогично, величина A'_3 также стремится к нулю при $K \uparrow \infty$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться (64), теоремой о мажорируемой сходимости, критичностью и соотношением (65).

Осталось рассмотреть главный член A'_2 . Аналогично выводу оценки (74), имеем

$$A'_2 \leq c (\Lambda \|\varphi\|_1)^\beta \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{K^\gamma (t-s)^\gamma} \int_{\mathbf{R}^d} db p_s(b-a) |V_{t-s}^{(K)}(\lambda\varphi)(b) - v_{t-s}^{(\lambda)}(b)|. \quad (81)$$

При $0 < \varepsilon < 1$ разобьем интеграл по промежутку $(0, t)$ на три части: $0 < s < \varepsilon t$, $\varepsilon t \leq s \leq (1-\varepsilon)t$ и $(1-\varepsilon)t < s < t$. В первом и последнем случаях, переходя от дифференциалов к суммам в подынтегральных выражениях и используя неравенства (73) и (67), соотношение (53), уравнение Колмогорова–Чепмена и оценку (34), мы видим, что внутренний интеграл в (81) ограничен по s и K . Поскольку

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{K \uparrow \infty} \int_{(0,\varepsilon t) \cup ((1-\varepsilon)t, t)} \frac{d_s N_{Ks}}{K^\gamma (t-s)^\gamma} = 0$$

в силу (55), то для доказательства малости интересующего нас выражения осталось исследовать лишь интеграл в (81) по промежутку $[\varepsilon t, (1-\varepsilon)t]$ при фиксированном $0 < \varepsilon < 1$. В этом диапазоне $p_s(b-a) \leq c$, и мы снова можем перейти к оценке в норме L^1 :

$$\|V_{t-s}^{(K)}(\lambda\varphi) - v_{t-s}^{(\lambda)}\|_1 \leq \sup_{u \in [\varepsilon t, (1-\varepsilon)t]} \|V_u^{(K)}(\lambda\varphi) - v_u^{(\lambda)}\|_1,$$

которая по лемме 4 стремится к 0 при $K \uparrow \infty$. С другой стороны, ввиду (55)

$$\limsup_{K \uparrow \infty} \int_{(0,t)} \frac{d_s N_{Ks}}{K^\gamma (t-s)^\gamma} < \infty,$$

что в сочетании с предыдущими рассуждениями убеждает нас в справедливости (79). Доказательство следствия 4 закончено.

Завершение доказательства теоремы 2. Зафиксируем φ, t и a , удовлетворяющие условиям теоремы, и возьмем $\lambda \geq 0$. В силу (57) и (15)

$$v_t^{(\lambda)}(a) = -\ln \mathbb{E}_{\delta_{(0,a)}} \exp[-\theta(\lambda\varphi) X_t(a)], \quad (82)$$

где $\theta(\lambda\varphi)$ то же, что и в (25). Кроме того, в соответствии с (23) и (21)

$$V_t^{(K)}(\lambda\varphi) = K^{d/\alpha} \left[1 - \mathbf{E}_{\delta_{(\tau, K^{1/\alpha} a)}} \exp \langle Z_{Kt}, -\lambda\varphi \rangle \right]. \quad (83)$$

Функции (82) и (83) являются *аналитическими* при $\lambda > 0$ (точнее, при $\operatorname{Re} \lambda > 0$). Отсюда и из сходимости, установленной в следствии 4 для малых λ , вытекает желаемая сходимость при всех $\lambda \geq 0$. Доказательство закончено.

В заключение авторы хотели бы выразить благодарность Ахиму Кленке и Яну Сварту, комментарии которых позволили улучшить изложение представленных здесь результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bertoin J. Lévy Processes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996, 265 p.
2. Breiman L. Probability. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968, 421 p.
3. Dawson D. A. The critical measure diffusion process. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1977, v. 40, p. 125–145.
4. Dawson D. A., Fleischmann K. Critical dimension for a model of branching in a random medium. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1985, v. 70, p. 315–334.
5. Dawson D. A., Fleischmann K. Catalytic and mutually catalytic branching. — Infinite Dimensional Stochastic Analysis. Amsterdam: Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, 2000, p. 145–170.
6. Dawson D. A., Fleischmann K. Catalytic and mutually catalytic super-Brownian motions. — Ascona 1999 Conference. Progress in Probability. Basel, Switzerland: Birkhäuser-Verlag, Vol. 52, 2002, p. 89–110.
7. Evans S. N., Perkins E. Absolute continuity results for superprocesses with some applications. — Trans. Amer. Math. Soc., 1991, v. 325, № 2, p. 661–681.

8. *Feller W.* Diffusion processes in genetics. — Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley: Univ. of California Press, 1951, p. 227–246.
9. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. II. М.: Мир, 1984, 752 с.
10. *Fleischmann K., Gärtner J.* Occupation time processes at a critical point. — Math. Nachr., 1986, v. 125, p. 275–290.
11. *Fleischmann K., Klenke A.* Smooth density field of catalytic super-Brownian motion. — Ann. Appl. Probab., 1999, v. 9, № 2, p. 298–318.
12. *Fleischmann K.* Critical behavior of some measure-valued processes. — Math. Nachr., 1988, v. 135, p. 131–147.
13. *Greven A., Klenke A., Wakolbinger A.* The longtime behavior of branching random walk in a catalytic medium. — Electron. J. Probab., 1999, v. 4, № 12, 80 p. (electronic).
14. *Gorostiza L., Roelly S., Wakolbinger A.* Sur la persistance du processus de Dawson–Watanabe stable. L’interversion de la limite en temps et de la renormalisation. — Lecture Notes in Math., 1990, v. 1426, p. 275–281.
15. *Gorostiza L., Wakolbinger A.* Persistence criteria for a class of critical branching particle systems in continuous time. — Ann. Probab., 1991, v. 19, № 1, p. 266–288.
16. *Kallenberg O.* Stability of critical cluster fields. — Math. Nachr., 1977, v. 77, p. 7–43.
17. *Klenke A.* Clustering and invariant measures for spatial branching models with infinite variance. — Ann. Probab., 1998, v. 26, № 3, p. 1057–1087.
18. *Klenke A.* A review on spatial catalytic branching. — CMS Conf. Proc., 2000, v. 26, p. 245–263.
19. *Klenke A.* Absolute continuity of catalytic measure-valued branching processes. — Stochastic Process. Appl., 2000, v. 89, № 2, p. 227–237.
20. *Kaj I., Sagitov S.* Limit processes for age-dependent branching particle systems. — J. Theoret. Probab., 1998, v. 11, № 1, p. 225–257.
21. *Liemant A.* Invariante zufällige Punktfolgen. — Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, 1969, v. 18, № 2, p. 361–372.
22. *Mytnik L.* Collision measure and collision local time for (α, d, β) superprocesses. — J. Theoret. Probab., 1998, v. 11, № 3, p. 733–763.
23. *Schied A.* Existence and regularity for a class of infinite-measure (ξ, ψ, K) -superprocesses. — J. Theoret. Probab., 1999, v. 12, № 4, p. 1011–1035.
24. *Stöckl A., Wakolbinger A.* Critical branching populations with infinite mean individual lifetime may have Poisson limits. Unpublished manuscript, 1993.
25. *Ватутин В. А.* Критические процессы Беллмана–Харриса, начинающиеся с большого числа частиц. — Матем. заметки, 1986, т. 40, № 4, с. 527–541.
26. *Ваколбингер А., Ватутин В. А.* Ветвящиеся процессы в пространстве с долго живущими частицами. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 4, с. 655–671.
27. *Yosida K.* Functional Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1974, 496 p.

Поступила в редакцию
30.I.2002