Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Калинин, Вероятность остановки на границе случайного блуждания в четверти плоскости и ветвящийся процесс с взаимодействием частиц, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 3, 452–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3676>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:26:34

© 2002 г.

КАЛИНКИН А. В.*

ВЕРОЯТНОСТЬ ОСТАНОВКИ НА ГРАНИЦЕ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ И ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ

Получены простые интегральные представления для вероятности остановки в точке границы случайного блуждания на целочисленной решетке четверти плоскости при различных предположениях о распределении скачка блуждания. Применяется предложенный в работах [18], [19] метод экспоненциальной производящей функции для решения стационарной первой (обратной) системы дифференциальных уравнений Колмогорова.

Ключевые слова и фразы: вероятность остановки случайного блуждания, ветвящийся процесс, экспоненциальная производящая функция, уравнение в частных производных гиперболического типа, задача Дарбу–Пикара, точные решения, многочлены Чебышева.

1. Случайное блуждание S_n в четверти плоскости. На множестве состояний $\mathbf{N}^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots\}$ рассматривается однородное случайное блуждание S_n , $n = 0, 1, \dots$. Переходные вероятности за n шагов обозначим $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(n)$. Пусть переходные вероятности за один шаг равны:

$$P\{S_{n+1} = (\beta_1, \beta_2) \mid S_n = (\alpha_1, \alpha_2)\} = p_{\beta_1 - \alpha_1 + 1, \beta_2 - \alpha_2 + 1},$$

если $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 - \alpha_1 + 1 \geq 0, \beta_2 - \alpha_2 + 1 \geq 0$;

$$P\{S_{n+1} = (\alpha_1, \alpha_2) \mid S_n = (\alpha_1, \alpha_2)\} = 1,$$

если $\alpha_1 = 0$ или $\alpha_2 = 0$. Здесь задано распределение вероятностей

$$\left\{ p_{\gamma_1 \gamma_2} \geq 0, (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbf{N}^2; \sum_{\gamma_1, \gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1 \gamma_2} = 1, p_{11} = 0 \right\}.$$

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, кафедра высшей математики, 2-я Бауманская ул., 5, 107005 Москва, Россия; <http://www.bmstu.ru/facult/fn/kalin/kalinkin.htm>

На рис. 1, случай а), изображены возможные скачки случайного блуждания S_n из состояния (α_1, α_2) . Введем производящую функцию

$$h(s_1, s_2) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1 \gamma_2} s_1^{\gamma_1} s_2^{\gamma_2}.$$

Рис. 1

Рис. 2

1.1. Задача о вероятности остановки. Для блуждания S_n состояния $\{(\gamma_1, 0), (0, \gamma_2): \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{N}\}$ являются поглощающими. Вероятность остановки — вероятность попадания в поглощающее состояние — равна:

$$q_{(\gamma_1, 0)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{(\gamma_1, 0)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(n), \quad q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(n), \quad (1)$$

$(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N}^2$ (из соображений симметрии достаточно иметь выражения для вероятностей $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$). Задача о нахождении вероятности остановки в точке $(0, \gamma_2)$ рассматривалась многими авторами. В [1] выявлены и исследованы алгебраические группы, связанные со случайными блужданиями в четверти плоскости, разработаны аналитические методы уравнений Винера–Хопфа для решения задач о многомерных случайных блужданиях. В докладе [5] дано интегральное представление для $q_{(0, \gamma_2)}^{(1, \alpha_2)}$ в симметричном случае $h(s_1, s_2) = p_{01}s_1^2s_2 + p_{10}s_1s_2^2 + p_{10}s_1 + p_{01}s_2$. При $h(s_1, s_2) = p_{22}s_1^2s_2^2 + p_{21}s_1^2s_2 + p_{12}s_1s_2^2 + p_{20}s_1^2 + p_{02}s_2^2 + p_{10}s_1 + p_{01}s_2 + p_{00}$ (рис. 1, случай б)) искомое выражение для вероятностей (1) содержит эллиптические функции (см. [1]). В обзоре [3] задача о нахождении вероятности остановки на границе для случайного блуждания S_n отнесена к типу 3б). В. А. Малышев указывает, что разработанная им «техника может быть использована для решения уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в квадранте $\mathbf{R}_+^2$ » [3, с. 21].

Для задачи типа 3б) дифференциальное уравнение такого вида получено в п. 2 настоящей работы — это уравнение в частных производных (4) с условиями (5) на границах квадранта $\mathbf{R}_+^2$. Уравнение (4) определяет вид интегрального представления (9) для вероятностей $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$. В теоремах 2–4 даны выражения вида (9) для вероятностей (1) при частных предположениях о функции $h(s_1, s_2)$, исходя из полученной в п. 3 системы функциональных уравнений (16), (17). Аналогичным путем из (16), (17) могут быть получены интегральные представления для вероятностей $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ в случаях $h(s_1, s_2) = \sum_{k=0}^{\infty} s_1^k h_k(s_1 s_2)$, $h(s_1, s_2) = \sum_{k=0}^{\infty} s_2^k h_k(s_1 s_2)$, где $h_k(s)$, $k = 0, 1, \dots$, — положительные производящие функции. Данная в теореме 5 формула вида (9) для случая $h(s_1, s_2) = p_{20}s_1^2 + p_{02}s_2^2 + p_{00}$ получена прямым решением уравнения (4). Ограниченный объем статьи не позволяет привести такой же вывод (см. замечание 3) выражений для вероятностей $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ в случаях $h(s_1, s_2) = p_{20}s_1^2 + p_{02}s_2^2 + p_{10}s_1 + p_{01}s_2 + p_{00}$ и $h(s_1, s_2) = p_{22}s_1^2s_2^2 + p_{21}s_1^2s_2 + p_{12}s_1s_2^2 + p_{20}s_1^2 + p_{02}s_2^2$. Автору работы не удалось получить выражение для вероятностей (1) при произвольной производящей функции $h(s_1, s_2)$; совокупность рассмотренных частных случаев позволяет сделать предположение, что такое аналитическое выражение вида (9) существует.

А. А. Могульский и Б. А. Рогозин в недавней работе [6] применили метод факторизации к общему случайному блужданию в квадранте $\mathbf{R}_+^2$. Найдены, в частности, асимптотические формулы для вероятности выхода случайного блуждания из положительного квадранта, когда стремится к бесконечности время выхода или положение точки выхода. Из результатов [6, ч. I] следуют экспоненциальные представления для рассматриваемых в настоящей работе функций $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ (см. в [6, ч. I] выражения для функций $V_{z+}(\lambda)$, $V_{z-}(\lambda)$, $v(z, \lambda)$).

2. Ветвящийся процесс с двумя типами частиц и одним комплексом взаимодействия ([4]). Рассмотрим однородный во времени марковский процесс $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t))$ на фазовом пространстве $\mathbf{N}^2$ с непрерывным временем t , $t \in [0, \infty)$, и переходными вероятностями

$$P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\mu(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \mu(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}.$$

Пусть при $\Delta t \rightarrow 0$ переходные вероятности имеют вид ($\lambda > 0$)

$$\begin{aligned} P_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\Delta t) &= 1 - \alpha_1 \alpha_2 \lambda \Delta t + o(\Delta t), \\ P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\Delta t) &= p_{\beta_1 - \alpha_1 + 1, \beta_2 - \alpha_2 + 1} \alpha_1 \alpha_2 \lambda \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

если $\alpha_1 \neq \beta_1$ или $\alpha_2 \neq \beta_2$. Введем производящие функции переходных вероятностей ($|s_1| \leq 1$, $|s_2| \leq 1$)

$$F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N}^2,$$

$$G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t), \quad (\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{N}^2,$$

и дифференциальный оператор

$$h\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1 \gamma_2} \frac{\partial^{\gamma_1 + \gamma_2}}{\partial z_1^{\gamma_1} \partial z_2^{\gamma_2}}.$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса $\mu(t)$ равносильна линейному уравнению в частных производных второго порядка (см. [4])

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial t} = \lambda(h(s_1, s_2) - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2}$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$. Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса $\mu(t)$ равносильна линейному уравнению (см. [4]; ср. [18, теорема 1])

$$\frac{\partial G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2)}{\partial t} = \lambda z_1 z_2 \left(h\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2)$$

с начальным условием $G_{(\beta_1, \beta_2)}(0; z_1, z_2) = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} / (\beta_1! \beta_2!)$.

В таком ветвящемся процессе событие $\{\mu(t) = (\beta_1, \beta_2)\}$ интерпретируется как наличие совокупности из β_1 частиц типа T_1 и β_2 частиц типа T_2 в момент времени t (особи мужского рода и особи женского рода [4], [8]). Пусть процесс находится в начальном состоянии, соответствующем вектору (α_1, α_2) . Можно полагать, что через случайное время $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}$, $\mathbf{P}\{\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)} < t\} = 1 - e^{-\alpha_1 \alpha_2 \lambda t}$ происходит взаимодействие частицы типа T_1 с частицей типа T_2 . Эта пара частиц независимо от других частиц превращается в новую группу из γ_1 частиц типа T_1 и γ_2 частиц типа T_2 : $T_1 + T_2 \rightarrow \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$, с распределением вероятностей $\{p_{\gamma_1 \gamma_2}\}$; процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 + \gamma_1 - 1, \alpha_2 + \gamma_2 - 1)$. Далее аналогичная эволюция случайного процесса. Для ветвящегося процесса $\mu(t)$ возможно вырождение в одном из поглощающих состояний из множества $\{(\gamma_1, 0), (0, \gamma_2): \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{N}\}$ (остались частицы одного типа, взаимодействия $T_1 + T_2$ невозможны).

2.1. Стационарное первое уравнение для экспоненциальной производящей функции. Из описания процесса $\mu(t)$ следует, что если рассматривать $\mu(t)$ только в моменты изменения состояния, т.е. «вложенную цепь Маркова», то она совпадает с определенным в п. 1 случайным блужданием S_n . Вероятность вырождения процесса $\mu(t)$ совпадает с вероятностью остановки блуждания S_n при одинаковом начальном условии (ср. [2, гл. 2, § 1, теорема 1]):

$$q_{(\gamma_1, 0)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{(\gamma_1, 0)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t), \quad q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N}^2.$$

Для вероятностей $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ введем экспоненциальную производящую функцию

$$g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}. \quad (2)$$

Функция $g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2)$ — аналитическая по переменным z_1, z_2 , так как

$$|g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2)| \leq \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{|z_1|^{\alpha_1} |z_2|^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} |q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}| \leq e^{|z_1| + |z_2|}. \quad (3)$$

Аналогично теореме 2 работы [18] показывается, что $g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} G_{(0, \gamma_2)}(t; z_1, z_2)$ и $g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\left[h \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right] g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2) = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим поглощающие состояния $(0, \gamma_2)$, $\gamma_2 = 1, 2, \dots$. Из очевидных равенств для вероятностей остановки: $q_{(0, \gamma_2)}^{(0, \gamma_2)} = 1$, $q_{(0, \gamma_2)}^{(0, \alpha_2)} = 0$, если $\alpha_2 \neq \gamma_2$; $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, 0)} = 0$, если $\alpha_1 = 0, 1, \dots$, получаем условия на границах $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ квадранта $\mathbf{R}_+^2$:

$$g_{(0, \gamma_2)}(0, z_2) = \frac{z_2^{\gamma_2}}{\gamma_2!}, \quad g_{(0, \gamma_2)}(z_1, 0) = 0. \quad (5)$$

Для поглощающего состояния $(0, 0)$ получаем граничные условия $g_{(0, 0)}(0, z_2) = 1$, $g_{(0, 0)}(z_1, 0) = 1$, рассмотрение которых аналогично случаю (5).

2.2. Об интегральном представлении для вероятностей $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$. Ссылки на ряд работ по граничной задаче типа (4), (5) приведены в обзоре [3]. При рассмотрении задачи (4), (5) — нахождении

явного выражения для функции $g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2)$ — можно использовать некоторые подходы общей теории линейных дифференциальных операторов в частных производных с постоянными коэффициентами [11]. Для уравнения (4) характеристическим является уравнение

$$h(s_1, s_2) - s_1 s_2 = 0 \quad (6)$$

(ср. [2, гл. 2, § 1, уравнение (9)]). Вводим функции $\varphi_1(s_2)$, $\varphi_2(s_1)$, определяемые характеристическим уравнением $h(\varphi_1(s_2), s_2) - \varphi_1(s_2) s_2 = 0$; $h(s_1, \varphi_2(s_1)) - s_1 \varphi_2(s_1) = 0$. «Общее решение» уравнения (4) имеет вид (см. об экспоненциальном представлении решений уравнений в частных производных [11, § 2])

$$\int_Q e^{z_1 \varphi_1(s_2) + z_2 s_2} \mu^1(ds_2) = \int_Q e^{z_1 s_1 + z_2 \varphi_2(s_1)} \mu^2(ds_1), \quad (7)$$

где $\mu^1(ds_2)$, $\mu^2(ds_1)$ — меры, сосредоточенные на множестве $Q = \{(s_1, s_2): h(s_1, s_2) - s_1 s_2 = 0\}$. Действительно, подставим, например, первое из выражений (7) в уравнение (4), тогда получаем после формальных вычислений:

$$\begin{aligned} & \left[h\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right] \int_Q e^{z_1 \varphi_1(s_2) + z_2 s_2} \mu^1(ds_2) \\ &= \int_Q \left[h\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right] e^{z_1 \varphi_1(s_2) + z_2 s_2} \mu^1(ds_2) \\ &= \int_Q e^{z_1 \varphi_1(s_2) + z_2 s_2} (h(\varphi_1(s_2), s_2) - \varphi_1(s_2) s_2) \mu^1(ds_2) = 0. \end{aligned}$$

Из (7), разложения экспоненты

$$e^{z_1 s_1 + z_2 s_2} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \quad (8)$$

и определения (2) производящей функции $g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2)$, учитывая, что меры в (7) зависят от граничных условий (5), получаем, что искомое выражение для вероятности останова в точке $(0, \gamma_2)$ имеет вид

$$q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \int_Q \varphi_1^{\alpha_1}(s_2) s_2^{\alpha_2} \mu_{(0,\gamma_2)}^1(ds_2) = \int_Q s_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2}(s_1) \mu_{(0,\gamma_2)}^2(ds_1). \quad (9)$$

3. Система функциональных уравнений для производящих функций вероятностей останова. Введем производящие функции

$$\Phi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \sum_{\gamma_1=0}^{\infty} q_{(\gamma_1, 0)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} s^{\gamma_1}, \quad \Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} s^{\gamma_2},$$

$(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N}^2$ (аналитические в круге $|s| \leq 1$). Для вывода системы уравнений для $\Phi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s)$, $\Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s)$ потребуются вспомогательные определения.

3.1. Случайное блуждание $\hat{S}_n$ в правой полуплоскости. Случайное блуждание $\hat{S}_n$ в верхней полуплоскости. Определим случайное блуждание $\hat{S}_n$, $n = 0, 1, \dots$, на множестве $\mathbf{N} \times \mathbf{Z} = \{(\alpha_1, \alpha_2): \alpha_1 \in \mathbf{N}, \alpha_2 \in \mathbf{Z}\}$, где $\mathbf{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$. Переходные вероятности за n шагов обозначим $\hat{P}_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(n)$. Переходные вероятности за один шаг полагаем равными: $\mathbf{P}\{\hat{S}_{n+1} = (\beta_1, \beta_2) | \hat{S}_n = (\alpha_1, \alpha_2)\} = p_{\beta_1 - \alpha_1 + 1, \beta_2 - \alpha_2 + 1}$, если $\alpha_1 > 0$ и $\beta_1 - \alpha_1 + 1 \geq 0$, $\beta_2 - \alpha_2 + 1 \geq 0$; $\mathbf{P}\{\hat{S}_{n+1} = (\alpha_1, \alpha_2) | \hat{S}_n = (\alpha_1, \alpha_2)\} = 1$, если $\alpha_1 = 0$. Состояния $\{(0, \gamma_2): \gamma_2 \in \mathbf{Z}\}$ являются поглощающими для блуждания $\hat{S}_n$. Существуют пределы $\hat{q}_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(n)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$, $\gamma_2 \in \mathbf{Z}$ (вероятность остановки в точке границы $(0, \gamma_2)$).

Аналогично определим случайное блуждание $\tilde{S}_n$, $n = 0, 1, \dots$, на множестве $\mathbf{Z} \times \mathbf{N} = \{(\alpha_1, \alpha_2): \alpha_1 \in \mathbf{Z}, \alpha_2 \in \mathbf{N}\}$. Переходные вероятности за n шагов обозначим $\tilde{P}_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(n)$. Переходные вероятности за один шаг полагаем равными: $\mathbf{P}\{\tilde{S}_{n+1} = (\beta_1, \beta_2) | \tilde{S}_n = (\alpha_1, \alpha_2)\} = p_{\beta_1 - \alpha_1 + 1, \beta_2 - \alpha_2 + 1}$, если $\alpha_2 > 0$ и $\beta_1 - \alpha_1 + 1 \geq 0$, $\beta_2 - \alpha_2 + 1 \geq 0$; $\mathbf{P}\{\tilde{S}_{n+1} = (\alpha_1, \alpha_2) | \tilde{S}_n = (\alpha_1, \alpha_2)\} = 1$, если $\alpha_2 = 0$. Состояния $\{(\gamma_1, 0): \gamma_1 \in \mathbf{Z}\}$ являются поглощающими для блуждания $\tilde{S}_n$. Существуют пределы $\tilde{q}_{(\gamma_1, 0)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{P}_{(\gamma_1, 0)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(n)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, $\gamma_1 \in \mathbf{Z}$. Введем функции:

$$\varphi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \sum_{\gamma_2 = -\infty}^{\infty} \hat{q}_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} s^{\gamma_2},$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}, \quad \varphi_1(s) = \varphi_1^{(1, 0)}(s); \quad (10)$$

$$\varphi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \sum_{\gamma_1 = -\infty}^{\infty} \tilde{q}_{(\gamma_1, 0)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} s^{\gamma_1},$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}, \quad \varphi_2(s) = \varphi_2^{(0, 1)}(s). \quad (11)$$

Ряды (10), (11) представляют собой ряды Лорана [9]. Ряд $\varphi_1(s)$ сходится в кольце $r_2 < |s| < R_2$, ряд $\varphi_2(s)$ сходится в кольце $r_1 < |s| < R_1$; заметим, что $r_i \leq 1 \leq R_i$, $i = 1, 2$.

3.2. Вывод системы уравнений. Для простоты мы ограничиваемся дальше случаем, когда производящая функция $h(s_1, s_2)$ аналитична по своим аргументам при всех s_1, s_2 .

Лемма 1. *Справедливы соотношения для производящих функций:*

$$\varphi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \varphi_1^{\alpha_1}(s) s^{\alpha_2}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}, \quad (12)$$

$$h(\varphi_1(s), s) - \varphi_1(s) s = 0, \quad r_2 < |s| < R_2; \quad (13)$$

$$\varphi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = s^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2}(s), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}, \quad (14)$$

$$h(s, \varphi_2(s)) - s \varphi_2(s) = 0, \quad r_1 < |s| < R_1. \quad (15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Получим соотношения (12) и (13); соотношения (14) и (15) выводятся аналогично. Для случайного блуждания $\hat{S}_n$ очевидно равенство $\hat{q}_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \hat{q}_{(0,\gamma_2-\alpha_2)}^{(\alpha_1,0)}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$, $\gamma_2 \in \mathbf{Z}$. Отсюда и из определения (10) получаем (здесь и далее $r_2 < |s| < R_2$) $\varphi_1^{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) = \varphi_1^{(\alpha_1,0)}(s) s^{\alpha_2}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$. В силу строго марковского свойства процесса $\hat{S}_n$, $n = 0, 1, \dots$, имеем равенство $\hat{q}_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,0)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{q}_{(0,l)}^{(1,0)} \hat{q}_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1-1,l)}$, $\alpha_1 = 1, 2, \dots$, $\gamma_2 \in \mathbf{Z}$. Свертка с помощью функции (10) дает (перестановка знаков суммирования законна) $\varphi_1^{(\alpha_1,0)}(s) = \varphi_1(s) \varphi_1^{(\alpha_1-1,0)}(s)$, $\alpha_1 = 1, 2, \dots$, и, следовательно,

$$\varphi_1^{(\alpha_1,0)}(s) = \varphi_1^{\alpha_1}(s), \quad \alpha_1 \in \mathbf{N}.$$

Соотношение (12) доказано. Соотношение (13) также следует из строго марковского свойства $\hat{S}_n$: $\varphi_1(s) s = \varphi_1^{(1,1)}(s) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} p_{\alpha_1 \alpha_2} \varphi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} p_{\alpha_1 \alpha_2} \varphi_1^{\alpha_1}(s) s^{\alpha_2} = h(\varphi_1(s), s)$. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Справедливы соотношения для производящих функций:*

$$\Phi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = s^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2}(s) - \Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\varphi_2(s)) + \Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(0), \quad (16)$$

$$r_1 < |s| < R_1;$$

$$\Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \varphi_1^{\alpha_1}(s) s^{\alpha_2} - \Phi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\varphi_1(s)) + \Phi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(0), \quad (17)$$

$$r_2 < |s| < R_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Получим соотношение (17); соотношение (16) выводится аналогично. Учитывая строго марковское свойство процессов S_n , $\hat{S}_n$, имеем равенства:

$$q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \hat{q}_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} - \sum_{\gamma_1=1}^{\infty} q_{(\gamma_1,0)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \hat{q}_{(0,\gamma_2)}^{(\gamma_1,0)}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N}^2, \quad \gamma_2 \in \mathbf{N};$$

$$\hat{q}_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \sum_{\gamma_1=1}^{\infty} q_{(\gamma_1,0)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \hat{q}_{(0,\gamma_2)}^{(\gamma_1,0)}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N}^2, \quad \gamma_2 = -1, -2, \dots$$

Свертывая первое равенство, получаем ($|s| < R_2$; рассматриваемые ряды сходятся абсолютно, законна перестановка знаков суммирования)

$$\sum_{\gamma_2=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} s^{\gamma_2} = \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} \hat{q}_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} s^{\gamma_2} - \sum_{\gamma_1=1}^{\infty} q_{(\gamma_1,0)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} \hat{q}_{(0,\gamma_2)}^{(\gamma_1,0)} s^{\gamma_2}. \quad (18)$$

Далее, из второго равенства:

$$0 = \sum_{\gamma_2=-1}^{-\infty} \hat{q}_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} s^{\gamma_2} - \sum_{\gamma_1=1}^{\infty} q_{(\gamma_1,0)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \sum_{\gamma_2=-1}^{-\infty} \hat{q}_{(0,\gamma_2)}^{(\gamma_1,0)} s^{\gamma_2}, \quad |s| > r_2.$$

Складывая полученные выражения и учитывая (12), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} s^{\gamma_2} &= \varphi_1^{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) - \sum_{\gamma_1=1}^{\infty} q_{(\gamma_1,0)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \varphi_1^{(\gamma_1,0)}(s) \\ &= \varphi_1^{\alpha_1}(s) s^{\alpha_2} - \sum_{\gamma_1=0}^{\infty} q_{(\gamma_1,0)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \varphi_1^{\gamma_1}(s) + q_{(0,0)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}, \quad r_2 < |s| < R_2, \end{aligned}$$

что совпадает с соотношением (17). Теорема 1 доказана.

Из равенства (18) следует, что функции $\Phi_i^{(\alpha_1,\alpha_2)}(s)$ являются аналитическими в круге $|s| < R_i$ ($i = 1, 2$; $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$).

4. Анализ характеристического уравнения $h(s_1, s_2) - s_1 s_2 = 0$.

Рассмотрим определенные в (10), (11) функции $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ и множество $Q^+ = \{(s_1, s_2): h(s_1, s_2) - s_1 s_2 = 0, s_1 > 0, s_2 > 0\}$.

Обозначим через S множество всех точек плоскости с целочисленными координатами (γ_1, γ_2) , для которых $p_{\gamma_1+1, \gamma_2+1} > 0$ или $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Обозначим S_L такую решетку целочисленных точек плоскости, которая содержит множество S и не содержит никакой подрешетки, удовлетворяющей этому же свойству. Координаты всех точек решетки S_L можно получить, составляя всевозможные линейные комбинации с целыми коэффициентами из координат точек множества S (см. [2, гл. 5, § 4]). Обозначим S_L^+ множество всех точек, которые можно получить, составляя всевозможные линейные комбинации с целыми неотрицательными коэффициентами из координат точек множества S . Будем говорить, что для распределения вероятностей $\{p_{\gamma_1 \gamma_2}, (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{N}^2\}$ выполняется условие А, если S_L совпадает с S_L^+ и решетка S_L двумерна. При условии А решетка S_L характеризует множество состояний, достижимых для случайного процесса $\mu(t)$ из начального состояния (α_1, α_2) : если $(\beta_1, \beta_2) \in S_L$ и $\alpha_1 + \beta_1 + 1 \geq 0$, $\alpha_2 + \beta_2 + 1 \geq 0$, то $P_{(\alpha_1+\beta_1+1, \alpha_2+\beta_2+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t_0) > 0$ при некотором $t_0 < \infty$; если $(\beta_1, \beta_2) \notin S_L$, то $P_{(\alpha_1+\beta_1+1, \alpha_2+\beta_2+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) \equiv 0$.

Лемма 2. Пусть для распределения вероятностей $\{p_{\gamma_1 \gamma_2}, (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{N}^2\}$ выполнено условие А. Тогда: $0 < r_2 \leq 1 \leq R_2 < \infty$, $0 < \varphi_1(r_2) < \infty$, $0 < \varphi_1(R_2) < \infty$; $0 < r_1 \leq 1 \leq R_1 < \infty$, $0 < \varphi_2(r_1) < \infty$, $0 < \varphi_2(R_1) < \infty$.

Доказательство. Получим утверждение леммы для функции $\varphi_1(s)$; функция $\varphi_2(s)$ рассматривается аналогично. Из условия А следует, что разложение (10) для функции $\varphi_1(s)$ содержит главную и правильную части [9]. Из (10) следует, что $\varphi_1(s) > 0$ при $r_2 < s < R_2$.

Рассмотрим r_2 и $\varphi_1(r_2)$.

А). Пусть $p_{\gamma_1 0} = 0$ при всех $\gamma_1 \geq 1$. По условию А $p_{00} > 0$ и существует точка (β_1, β_2) такая, что $0 < \beta_2 < \beta_1$, $p_{\beta_1 \beta_2} > 0$; из равенства (13) получаем, что $\varphi_1(s) s \geq p_{\beta_1 \beta_2} \varphi_1^{\beta_1}(s) s^{\beta_2}$, или $1 \geq p_{\beta_1 \beta_2} \varphi_1^{\beta_1-1}(s) s^{\beta_2-1}$ (здесь и далее рассматривается интервал $r_2 < s < R_2$). Если $\beta_2 = 1$, то

$\varphi_1(s) \leq p_{\beta_1\beta_2}^{1/(\beta_1-1)}$ ($\beta_1 > 1$) и, полагая в последнем неравенстве $s \downarrow r_2$, получаем, что $\varphi_1(r_2)$ конечна. При предположении $r_2 = 0$ у функции $\varphi_1(s)$ отсутствует главная часть в разложении (10), что противоречит условию А. Если $\beta_2 > 1$, то используем аналогичным образом неравенство $1 \geq p_{\beta_1\beta_2} \varphi_1^{\beta_1-\beta_2}(s) (\varphi_1(s)s)^{\beta_2-1} \geq p_{\beta_1\beta_2} \varphi_1^{\beta_1-\beta_2}(s) p_{00}^{\beta_2-1}$, где $\beta_1 - \beta_2 > 0$.

Б). Пусть найдется точка $(\gamma_1, 0)$ такая, что $\gamma_1 \geq 1$ и $p_{\gamma_1 0} > 0$; из (13) получаем, что $s \geq p_{\gamma_1 0} \varphi_1^{\gamma_1-1}(s)$. Если $\gamma_1 > 1$, то из последнего неравенства следует, что $\varphi_1(r_2) < \infty$, а отсюда и $r_2 > 0$. Если $\gamma_1 = 1$, то $s \geq p_{\gamma_1 0}$ и $r_2 > 0$. По условию А существует точка (β_1, β_2) такая, что $\beta_1 > 1$, $p_{\beta_1\beta_2} > 0$; из (13) получаем, что $s \geq p_{\beta_1\beta_2} \varphi_1^{\beta_1-1}(s) s^{\beta_2}$, и, полагая $s \downarrow r_2$, делаем вывод, что $\varphi_1(r_2)$ конечна.

Рассмотрим R_2 и $\varphi_1(R_2)$.

А). Пусть найдется точка (γ_1, γ_2) такая, что $\gamma_1 \geq 1$, $\gamma_2 \geq 1$ и $p_{\gamma_1\gamma_2} > 0$ (причем либо $\gamma_1 > 1$, либо $\gamma_2 > 1$, так как $p_{11} = 0$); из (13) получаем $1 \geq p_{\gamma_1\gamma_2} \varphi_1^{\gamma_1-1}(s) s^{\gamma_2-1}$. Если $\gamma_1 > 1$, $\gamma_2 = 1$, то $1 \geq p_{\gamma_1\gamma_2} \varphi_1^{\gamma_1-1}(s)$. При предположении $R_2 = \infty$ получаем $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_1(s) < \infty$, т.е. у функции $\varphi_1(s)$ отсутствует правильная часть в разложении (10), что противоречит условию А. Если $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 > 1$, то $1 \geq p_{\gamma_1\gamma_2} s^{\gamma_2-1}$, отсюда $R_2 < \infty$. Из условия А следует существование точки (β_1, β_2) такой, что $\beta_1 > 1$, $p_{\beta_1\beta_2} > 0$; из неравенства $s \geq p_{\beta_1\beta_2} \varphi_1^{\beta_1-1}(s) s^{\beta_2}$, полагая $s \uparrow R_2$, получаем, что $\varphi_1(R_2)$ конечна. Если $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 > 1$, то далее аналогичные рассуждения.

Б). Пусть $p_{\gamma_1\gamma_2} = 0$ при всех $\gamma_1 \geq 1$, $\gamma_2 \geq 1$. По условию А существуют точки $(\gamma_1, 0)$, $(0, \gamma_2)$ такие, что $\gamma_1 \geq 2$, $p_{\gamma_1 0} > 0$ и $\gamma_2 \geq 2$, $p_{0\gamma_2} > 0$, причем либо $\gamma_1 > 2$, либо $\gamma_2 > 2$; из (13) получаем $s \geq p_{\gamma_1 0} \varphi_1^{\gamma_1-1}(s)$, и, соответственно, $\varphi_1(s) \geq p_{0\gamma_2} s^{\gamma_2-1}$. Если $\gamma_1 > 2$, то $s \geq p_{\gamma_1 0} (p_{0\gamma_2} s^{\gamma_2-1})^{\gamma_1-1}$, и так как $(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) > 1$, то $R_2 < \infty$, а отсюда и $\varphi_1(R_2) < \infty$. Если $\gamma_2 > 2$, то $\varphi_1(s) \geq p_{0\gamma_2} (p_{\gamma_1 0} \varphi_1^{\gamma_1-1}(s))^{\gamma_2-1}$ и далее аналогичные рассуждения. Лемма 2 доказана.

Поскольку ряд (10) для $\varphi_1(s)$ имеет неотрицательные коэффициенты, функция $\varphi_1(s)$ выпукла вниз на интервале (r_2, R_2) , а точки $s = r_2$, $s = R_2$ — особые для функции $\varphi_1(s)$. Так же, как в [2, гл. 5, § 4], показывается, что эти точки при выполнении условия А являются точками ветвления второго порядка. Если $h(s_1, s_2)$ — многочлен, то из теоремы Пелла [18] следует, что множество Q^+ и прямая $s_1 = C$ (или прямая $s_2 = C$) при любом C имеют не более двух общих точек. Тогда $r_1 < \varphi_1(r_2) < R_1$, $r_1 < \varphi_1(R_2) < R_1$; $r_2 < \varphi_2(r_1) < R_2$, $r_2 < \varphi_2(R_1) < R_2$. На рис. 2 (см. с. 453) изображено множество Q^+ при выполнении сформулированных выше условий. Дальнейшее исследование множества Q^+ связано с рассмотрением параметров критичности [2]

$$a_1 = \frac{\partial h(s_1, s_2)}{\partial s_1} \bigg|_{s_1=1, s_2=1} - 1, \quad a_2 = \frac{\partial h(s_1, s_2)}{\partial s_2} \bigg|_{s_1=1, s_2=1} - 1.$$

5. Интегральное представление для вероятностей $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ в случае $h(s_1, s_2) = s_2 h_1(s_1, s_2)$. Положим $h(s_1, s_2) = s_2 h_1(s_1, s_2)$, где $h_1(s_1, s_2)$ — вероятностная производящая функция.

Лемма 3 (см. [2]). Пусть $h(s_1, s_2) = s_2 h_1(s_1, s_2)$, причем для распределения $\{p_{\gamma_1 \gamma_2}, (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbf{N}^2\}$ имеются вероятности $p_{0\gamma_2} > 0$, $p_{\gamma_1 \gamma_2} > 0$ с $\gamma_1 \geq 2$ и $p_{\gamma_1 \gamma_2} > 0$ с $\gamma_2 > 1$. Тогда функция $\varphi_1(s)$ является аналитической в круге $|s| < R_2$, $1 \leq R_2 < \infty$, и $0 < \varphi_1(R_2) < \infty$.

При условиях леммы 3 решетка S_L двумерна.

Теорема 2 (см. [2]). Пусть $h(s_1, s_2) = s_2 h_1(s_1, s_2)$ и выполнены условия леммы 3. Вероятность остановки равна ($\alpha_1 \in \mathbf{N}$, $\alpha_2 = 1, 2, \dots$)

$$q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} \varphi_1^{\alpha_1}(s) s^{\alpha_2} \frac{ds}{s^{\gamma_2+1}}, \quad \gamma_2 \in \mathbf{N}. \quad (19)$$

Доказательство. Из определения функции $\Phi_2^{(\alpha_1,\alpha_2)}(s)$ следует, что вероятность остановки выражается через интеграл

$$q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta_p^+} \Phi_2^{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) \frac{ds}{s^{\gamma_2+1}}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N}^2, \quad \gamma_2 \in \mathbf{N}, \quad (20)$$

где контур интегрирования — окружность $\theta_p: |s| = \rho$, $0 < \rho < R_2$. При условии $h(s_1, s_2) = s_2 h_1(s_1, s_2)$ на скачки случайного блуждания S_n имеем $q_{(\gamma_1,0)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = 0$, следовательно, $\Phi_1^{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) \equiv 0$ ($\alpha_2 = 1, 2, \dots$), и из соотношения (17) получаем, что $\Phi_2^{(\alpha_1,\alpha_2)}(s) = \varphi_1^{\alpha_1}(s) s^{\alpha_2}$. Подставляя последнее выражение в (20) и учитывая аналитичность функции $\varphi_1(s)$ в круге $|s| < R_2$, получаем (19). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Уравнение (4) имеет вид

$$\left[h_1 \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right) - \frac{\partial}{\partial z_1} \right] g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2) = 0. \quad (21)$$

Характеристическое уравнение $h_1(s_1, s_2) - s_1 = 0$ и функция $\varphi_1(s)$ исследованы в [2, гл. 5, § 4]. Уравнение (21) совпадает со стационарным первым уравнением Колмогорова для ветвящегося процесса (с независимыми частицами) с одним финальным типом T_2 и одним нефинальным типом T_1 частиц ([2]). Прямое решение уравнения (21) содержится в работе [19] (случай $k = 1$).

6. Интегральное представление для вероятностей $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ в случае $h(s_1, s_2) = h_0(s_1) + s_2 h_1(s_1)$. Положим $h(s_1, s_2) = h_0(s_1) + s_2 h_1(s_1)$, где $h_0(s_1)$, $h_1(s_1)$ — положительные производящие функции. На рис. 1, случай в) (см. с. 453) изображены возможные скачки случайного блуждания S_n .

Лемма 4. Пусть $h(s_1, s_2) = h_0(s_1) + s_2 h_1(s_1)$, причем для распределения $\{p_{\gamma_1 \gamma_2}, (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbf{N}^2\}$ имеются вероятности $p_{0\gamma_2} > 0$, $p_{\gamma_1 \gamma_2} > 0$ с $\gamma_1 \geq 2$ и $p_{\gamma_1 0} > 0$. Тогда функция $\varphi_1(s)$ является аналитической в области $|s| > r_2$, $0 < r_2 \leq 1$, и значение $\varphi_1(r_2)$ лежит в интервале (r_1, R_1) , $0 \leq r_1 < 1 < R_1 \leq \infty$.

При условиях леммы 4 решетка S_L двумерна. Доказательство леммы 4 аналогично доказательству лемм 2 и 3, при этом используется явное выражение $\varphi_2(s) = h_0(s)/(s - h_1(s))$, которое следует из уравнения $h_0(s_1) + s_2 h_1(s_1) - s_1 s_2 = 0$.

Теорема 3. Пусть $h(s_1, s_2) = h_0(s_1) + s_2 h_1(s_1)$ и выполнены условия леммы 4. Вероятность остановки равна $(\alpha_1 \in \mathbf{N}, \alpha_2 = 1, 2, \dots)$

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta_\rho^+} \varphi_1^{\alpha_1}(s) s^{\alpha_2} \frac{ds}{s^{\gamma_2+1}}, \quad \gamma_2 = 1, 2, \dots,$$

где контур интегрирования — окружность $\theta_\rho: |s| = \rho$, $\rho > r_2$.

Доказательство. Исходим из интегрального представления (20). Вместо $\Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s)$ подставляем (17), получаем $(\gamma_2 = 1, 2, \dots)$

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta_\rho^+} \varphi_1^{\alpha_1}(s) s^{\alpha_2} \frac{ds}{s^{\gamma_2+1}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta_\rho^+} \Phi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\varphi_1(s)) \frac{ds}{s^{\gamma_2+1}},$$

где $\rho > r_2$. Второй интеграл равен нулю, так как из условия $h(s_1, s_2) = h_0(s_1) + s_2 h_1(s_1)$ на скачки случайного блуждания S_n следует, что разложение функции $\varphi_1(s)$ в ряд Лорана в окрестности $|s| > r_2$ бесконечно удаленной точки не содержит главной части,

$$\varphi_1(s) = \hat{q}_{(0,0)}^{(1,0)} + \frac{\hat{q}_{(0,-1)}^{(1,0)}}{s} + \frac{\hat{q}_{(0,-2)}^{(1,0)}}{s^2} + \dots;$$

а следовательно, (как показывается, исходя из неравенств $\varphi_1(r_2) < R_1$ и $\varphi_1(s) < R_1$ при $|s| > r_2$) и разложение функции $\Phi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\varphi_1(s))$ в ряд Лорана в области $|s| > r_2$ не содержит главной части. Теорема 3 доказана.

7. Интегральное представление для вероятностей $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ в случае $h(s_1, s_2) = h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2)$. Положим $h(s_1, s_2) = h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2)$, где $h_0(s_2)$, $h_1(s_2)$ — положительные производящие функции. На рис. 3, случай а), изображены возможные скачки случайного блуждания S_n .

Лемма 5. Пусть $h(s_1, s_2) = h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2)$, причем для распределения $\{p_{\gamma_1 \gamma_2}, (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbf{N}^2\}$ имеются вероятности $p_{0\gamma_2} > 0$, $p_{\gamma_1 \gamma_2} > 0$ с $\gamma_2 \geq 2$ и $p_{\gamma_1 0} > 0$. Тогда: функция $\varphi_1(s)$ является аналитической в кольце $r_2 < |s| < R_2$, $0 \leq r_2 < 1 < R_2 \leq \infty$, и $\lim_{s \downarrow r_2} \varphi_1(s) = +\infty$, $\lim_{s \uparrow R_2} \varphi_1(s) = +\infty$; функция $\varphi_2(s)$ является аналитической в области $|s| > r_1$, $0 < r_1 \leq 1$, и значение $\tilde{r}_2 = \varphi_2(r_1)$ лежит в интервале (r_2, R_2) .

Рис. 3

Рис. 4

При условиях леммы 5 решетка S_L двумерна. Доказательство леммы 5 аналогично доказательству лемм 2 и 3, при этом используется выражение $\varphi_1(s) = h_0(s)/(s - h_1(s))$, которое следует из характеристического уравнения. Множество Q^+ изображено на рис. 4.

Ниже мы будем использовать следующие обозначения. Характеристическое уравнение $h(s_1, s_2) - s_1 s_2 = 0$ определяет некоторую многозначную функцию комплексного аргумента. Рассмотренную в лемме 5 однозначную ветвь этой функции в области $|s| > r_1$ обозначим $\tilde{\varphi}_2(s)$ (таким образом, $\tilde{\varphi}_2(s) = \varphi_2^{(0,1)}(s)$, см. (11)). Так же, как в [2, гл. 5, § 4], показывается, что точка $s = r_1$ является изолированной точкой ветвления второго порядка; можно показать, учитывая лемму 5, что для области $|s| > r_1$ имеется вторая однозначная ветвь $\bar{\varphi}_2(s)$, выделяемая условием $\lim_{s \downarrow r_1} \bar{\varphi}_2(s) = \tilde{r}_2$. Обозначим $\varphi_2(s)$ двузначную ветвь в области $\{|s| > r_1\} \cup \{0 < |s - r_1| < \varepsilon\}$, составленную из ветвей $\tilde{\varphi}_2(s)$, $\bar{\varphi}_2(s)$ и аналитического продолжения этих ветвей в кольцо $0 < |s - r_1| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ достаточно мало, поэтому круг $|s - r_1| < \varepsilon$ не содержит особых точек, кроме r_1).

Определим при $r_2 < |s| < \tilde{r}_2$ функцию $\bar{\psi}_{21}(s) = \bar{\varphi}_2(\varphi_1(s))$ и при $\tilde{r}_2 < |s| < R_2$ функцию $\tilde{\psi}_{21}(s) = \tilde{\varphi}_2(\varphi_1(s))$ (корректность определения следует из неравенства $|\varphi_1(s)| > r_1$ при $r_2 < |s| < R_2$), для которых $h(\varphi_1(s), \bar{\psi}_{21}(s)) - \varphi_1(s) \bar{\psi}_{21}(s) = 0$ и $h(\varphi_1(s), \tilde{\psi}_{21}(s)) - \varphi_1(s) \tilde{\psi}_{21}(s) = 0$. Уравнение $h(\varphi_1(s), s_2) - \varphi_1(s) s_2 = 0$ после подстановки выражений $h(s_1, s_2) = h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2)$ и $\varphi_1(s) = h_0(s)/(s - h_1(s))$ получает простой вид:

$$\frac{h_0(s)}{s - h_1(s)} = \frac{h_0(s_2)}{s_2 - h_1(s_2)}.$$

Используя применительно к последнему уравнению теорему о неявной функции для нахождения особых точек, устанавливаем, что аналитическим продолжением функции $\bar{\psi}_{21}(s)$ в кольцо $r_2 < |s| < R_2$ является, для области $\tilde{r}_2 < |s| < R_2$, функция $\psi_{21}(s)$; и более того, существует ана-

литическое продолжение на область $|s| > r_2$, которое обозначим $\psi_{21}(s)$ (для $\psi_{21}(s)$ справедливо соотношение $h(\varphi_1(s), \psi_{21}(s)) - \varphi_1(s) \psi_{21}(s) = 0$). Очевидно, $\tilde{\psi}_{21}(\bar{\psi}_{21}(s)) = s$ при $r_2 < |s| < \tilde{r}_2$ и $\bar{\psi}_{21}(\tilde{\psi}_{21}(s)) = s$ при $\tilde{r}_2 < |s| < R_2$; следовательно, по принципу консерватизма функциональных уравнений $\psi_{21}(\psi_{21}(s)) = s$ при $|s| > r_2$, т.е. функция $\psi_{21}(s)$ однолистка на множестве $|s| > r_2$ (по признаку однолистности функции, данному в [10, гл. 5, § 1]). Отсюда следует, что разложение функции $\psi_{21}(s)$ в ряд Лорана в области $|s| > r_2$ не содержит главной части ([10, гл. 5, § 1, следствие 1]; ср. п. 3 доказательства теоремы 5.1 гл. 5 в [10]).

Ниже для производной функции двух переменных $H(s_1, s_2)$ используется обозначение $(H(s_1, s_2))'_{s_1} = \partial H(s_1, s_2) / \partial s_1$.

Теорема 4. Пусть $h(s_1, s_2) = h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2)$ и выполнены условия леммы 5. Вероятность остановки равна $(\alpha_1 \in \mathbf{N}, \alpha_2 = 1, 2, \dots)$

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta_p^+} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Theta} s_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2}(s_1) \frac{(h(s_1, s_2) - s_1 s_2)'_{s_1}}{h(s_1, s_2) - s_1 s_2} ds_1 \right) \frac{ds_2}{s_2^{\gamma_2+1}}, \quad (22)$$

$\gamma_2 = 1, 2, \dots$, где $r_2 < \rho < \tilde{r}_2$; контур интегрирования Θ описан ниже.

Доказательство. Ветвь $\bar{\varphi}_2(s)$ получена как аналитическое продолжение ветви $\tilde{\varphi}_2(s)$ при обходе точки ветвления r_1 вдоль кривой $\theta(t) = r_1 + \varepsilon_1 e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, где $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. При достаточно малом ε_1 значения функции $\varphi_2(s)$ на кривой $\theta(t)$ лежат в области аналитичности $|s| < R_2$ функции $\Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s)$; из условия $h(s_1, s_2) = h_0(s_2) + s_1 h_1(s_2)$ на скачки случайного блуждания S_n следует, что $\Phi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s)$ — многочлен, т.е. $\Phi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s)$ аналитична на всей комплексной плоскости, — следовательно, по принципу консерватизма функциональных уравнений, $\bar{\varphi}_2(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению (16):

$$\Phi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = s^{\alpha_1} \bar{\varphi}_2^{\alpha_2}(s) - \Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\bar{\varphi}_2(s)) + \Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(0), \quad |s| > r_1.$$

Подставляя последнее выражение в (17), получаем $(\Phi_1^{(\alpha_1, \alpha_2)}(0) = \Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(0))$

$$\Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \varphi_1^{\alpha_1}(s) s^{\alpha_2} - \varphi_1^{\alpha_1}(s) \bar{\varphi}_2^{\alpha_2}(\varphi_1(s)) + \Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\bar{\varphi}_2(\varphi_1(s))) \quad (23)$$

при $r_2 < |s| < \tilde{r}_2$. Интегральное представление (20) для искомых вероятностей после подстановки (23) получает вид

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta_p^+} \left(\varphi_1^{\alpha_1}(s) s^{\alpha_2} - \varphi_1^{\alpha_1}(s) \bar{\varphi}_2^{\alpha_2}(\varphi_1(s)) \right) \frac{ds}{s^{\gamma_2+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta_p^+} \Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\bar{\varphi}_2(\varphi_1(s))) \frac{ds}{s^{\gamma_2+1}}, \quad \gamma_2 = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где $r_2 < \rho < \tilde{r}_2$. Второй интеграл равен нулю — выше отмечалось, что функция $\bar{\varphi}_2(\varphi_1(s))$ может быть аналитически продолжена в область $|s| > r_2$ и ее разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки не содержит главной части, а, следовательно, и разложение функции $\Phi_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\bar{\varphi}_2(\varphi_1(s)))$ в ряд Лорана в области $|s| > r_2$ не содержит главной части.

Используя интегральную формулу Коши, получаем равенство (здесь $\tilde{\theta}_\rho$ — окружность $|s_1 - \varphi_1(s)| = \rho$, где радиус $\rho > 0$ достаточно мал, чтобы $\tilde{\theta}_\rho$ лежала в области $|s_1| > r_1$)

$$\begin{aligned} \varphi_1^{\alpha_1}(s) s^{\alpha_2} - \varphi_1^{\alpha_1}(s) \bar{\varphi}_2^{\alpha_2}(\varphi_1(s)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\theta}_\rho^+} s_1^{\alpha_1} \tilde{\varphi}_2^{\alpha_2}(s_1) \frac{ds_1}{s_1 - \varphi_1(s)} \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\theta}_\rho^+} s_1^{\alpha_1} \bar{\varphi}_2^{\alpha_2}(s_1) \frac{ds_1}{s_1 - \varphi_1(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Theta} s_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2}(s_1) \frac{ds_1}{s_1 - \varphi_1(s)} \quad (25) \end{aligned}$$

(учитывая результаты леммы 5, нетрудно показать, что $\tilde{\varphi}_2(\varphi_1(s)) \equiv s$ при $r_2 < |s| < \tilde{r}_2$), где Θ обозначает следующий контур Похгаммера. Замкнутый контур начинается в точке вещественной оси $r_0 = r_1 + \rho_1$, $0 < \rho_1 < \varepsilon$, и состоит из лежащей в области $|s_1| > r_1$ простой кривой θ^+ , соединяющей точку r_0 и некоторую точку окружности $\tilde{\theta}_\rho$; окружности $\tilde{\theta}_\rho^+$; кривой θ^- ; окружности $\hat{\theta}_{\rho_1}^+$: $|s_1 - r_1| = \rho_1$ радиуса ρ_1 ; кривой θ^+ ; окружности $\tilde{\theta}_\rho^-$; кривой θ^- ; окружности $\hat{\theta}_{\rho_1}^-$. При обходе контура Θ функция $\varphi_2(s_1)$ получает в точке r_0 свое первоначальное значение. Подставляя выражение (25) в (24), получаем (переменную s в формуле (25) обозначим s_2)

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta^+} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Theta} s_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2}(s_1) \frac{ds_1}{s_1 - \varphi_1(s_2)} \right) \frac{ds_2}{s_2^{\gamma_2+1}},$$

где $r_2 < \rho < \tilde{r}_2$. Подставляя функцию

$$\varphi_1(s_2) = \frac{h_0(s_2)}{s_2 - h_1(s_2)}$$

в дробь в подынтегральном выражении:

$$\frac{1}{s_1 - \varphi_1(s_2)} = \frac{s_2 - h_1(s_2)}{s_1 s_2 - s_1 h_1(s_1) - h_0(s_2)} = \frac{(h(s_1, s_2) - s_1 s_2)'_{s_1}}{h(s_1, s_2) - s_1 s_2},$$

приходим к формуле (22). Теорема 4 доказана.

Пример 1. Пусть $h(s_1, s_2) = p_{02}s_2^2 + p_{00}$ (рис. 3, случай б) с. 464). Тогда вероятность $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ можно интерпретировать как вероятность попадания — для случайного блуждания на множестве $\mathbf{N} = \{0, 1, \dots\}$ с вероятностью p_{00} скачка влево, с вероятностью p_{02} скачка вправо и поглощением на границе 0 — из начального состояния α_2 в состояние γ_2

на α_1 -шаге блуждания. Такое случайное блуждание рассмотрено в [7, гл. 14, задача 20]. Формулы (4.8) ([7, гл. 14]) указывают на переход к рассмотрению ветвей многозначной функции, определяемой уравнением $h(s_1, s_2) - s_1 s_2 = 0$. Приведение результатов [7] для $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ к виду (22) дает следующее представление:

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta^-} s^{\alpha_1} \tilde{\varphi}_2^{\alpha_2}(s) \left(-\frac{2}{\gamma_2} \right) dT_{\gamma_2}(s), \quad (26)$$

где $\rho > r_1$, $\tilde{\varphi}_2(s) = (s - \sqrt{s^2 - 4p_{00}p_{02}})/(2p_{02})$ ($r_1 = 2\sqrt{p_{00}p_{02}}$),

$$T_1(s) = \frac{s}{2p_{00}}, \quad T_2(s) = \frac{s^2 - 2p_{00}p_{02}}{2p_{00}^2}, \quad T_3(s) = \frac{s^3 - 3p_{00}p_{02}s}{2p_{00}^3}, \dots$$

— многочлены Чебышева, определяемые на отрезке $[-2\sqrt{p_{00}p_{02}}, 2\sqrt{p_{00}p_{02}}]$ разложением $(-2\sqrt{p_{00}p_{02}} < s_1 < 2\sqrt{p_{00}p_{02}}, |s_2| < \sqrt{p_{00}/p_{02}})$

$$\ln(h(s_1, s_2) - s_1 s_2) = \ln(p_{02}s_2^2 + p_{00} - s_1 s_2) = \ln p_{00} + \sum_{\gamma_2=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\gamma_2} \right) T_{\gamma_2}(s_1) s_2^{\gamma_2}$$

(см. [16, гл. 10, § 11, (30)]). Вычислим по формуле (26) вероятность $q_{(0,3)}^{(4,1)}$, используя разложение функции $\tilde{\varphi}_2(s)$ в ряд Лорана в окрестности $|s| > r_1$ точки $s = \infty$ (см. [9, гл. IV, § 24, пример 11]):

$$\begin{aligned} q_{(0,3)}^{(4,1)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta^-} s^4 \tilde{\varphi}_2(s) \left(-\frac{2}{3} \right) dT_3(s) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta^-} s^4 \cdot s \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_{00}p_{02}/s^2}}{2p_{02}} \left(-\frac{2}{3} \right) d \left(\frac{s^3 - 3p_{00}p_{02}s}{2p_{00}^3} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta^+} s^4 \left(\frac{p_{00}}{s} + \frac{p_{00}^2 p_{02}}{s^3} + \frac{2p_{00}^3 p_{02}^2}{s^5} + \frac{5p_{00}^4 p_{02}^3}{s^7} + \dots \right) \\ &\quad \times \left(\frac{s^2 - p_{00}p_{02}}{p_{00}^3} \right) ds = \frac{5p_{00}^4 p_{02}^3 - 2p_{00}^4 p_{02}^3}{p_{00}^3} = 3p_{00}p_{02}^3. \end{aligned}$$

То же значение $q_{(0,3)}^{(4,1)}$ можно получить из рассмотрения рис. 3 (с. 464).

8. Интегральное представление для вероятностей $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ в случае $h(s_1, s_2) = p_{20}s_1^2 + p_{02}s_2^2 + p_{00}$. Пусть ω и ω' — положительные числа. Положим $h = \exp\{-\pi\omega'/\omega\}$, $z = \exp\{\pi i u/(2\omega)\}$. Определим двоякопериодическую функцию равенством ($\gamma = 1, 2, \dots$)

$$f_{\gamma}(u) = \left(\frac{\pi i}{\omega} \right)^{\gamma} \left\{ \frac{1}{(z - z^{-1})^{\gamma}} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{h^r z^{-1}}{1 - h^{2r} z^{-2}} \right)^{\gamma} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{-h^r z}{1 - h^{2r} z^2} \right)^{\gamma} \right\}. \quad (27)$$

При нечетных γ периодами являются 4ω , $2i\omega'$, при четных γ периодами являются 2ω , $2i\omega'$. Сходимость ряда вида (27) рассмотрена в [13, гл. 2, § 12]. Из (27) легко получить разложение в ряд Фурье

$$f_\gamma(u) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^\gamma \left\{ \frac{1}{2^\gamma} \operatorname{cosec}^\gamma \left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) + (-1)^{[\gamma/2]} 2 \times \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+\gamma-1}^{\gamma-1} \frac{h^{2n+\gamma}}{1-h^{2n+\gamma}} \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \left(\frac{\pi u}{2\omega} (2n+\gamma)\right) \right\}, \quad (28)$$

где знак $\cos$ берется при четных γ , знак $\sin$ берется при нечетных γ . Разложение (28) годно в полосе $\operatorname{Im} u < 2\omega'$, за исключением полюсов первого слагаемого (см. [12, § 22.61, задача 20.35]). Сравнивая (28) с известными разложениями в ряды Фурье эллиптических функций Якоби (см. [12, § 22.61, задача 22.57]), получаем

$$f_\gamma(u) = \frac{c_\gamma}{(\operatorname{sn} cu)^\gamma} + \frac{c_{\gamma-2}}{(\operatorname{sn} cu)^{\gamma-2}} + \dots + c_0,$$

где c , $c_\gamma, \dots$ — некоторые константы. Функция $f_2(u)$ с точностью до постоянного слагаемого совпадает с эллиптической функцией Вейерштрасса [13].

Теорема 5. Пусть $h(s_1, s_2) = p_{20}s_1^2 + p_{02}s_2^2 + p_{00}$. Положим

$$C = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}{1 + \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}, \quad C_0 = \frac{p_{20}p_{00}}{1 - 4p_{20}p_{02}};$$

$f_{\gamma_2}(u)$ — эллиптическая функция (27) с $\omega = \pi\sqrt{C_0}$, $\omega' = -\sqrt{C_0}\ln C$; $T = \{u = x + iy, 0 \leq x \leq 4\omega, y = -\omega'\}$ — ориентированный по возрастанию x отрезок. Вероятность остановки равна $((\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N}^2)$

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_T s_1^{\alpha_1} (e^{\pi i u / (2\omega)}) s_2^{\alpha_2} (e^{\pi i u / (2\omega)}) \frac{(-1)^{\gamma_2}}{-\gamma_2} df_{\gamma_2}(u), \quad (29)$$

$\gamma_2 = 1, 2, \dots$, где функции

$$s_1(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}{2p_{20}} i\sqrt{C_0} \left(z - \frac{1}{Cz}\right), \quad s_2(z) = i\sqrt{C_0} \left(z - \frac{1}{z}\right) \quad (30)$$

представляют собой униформизацию римановой поверхности (6).

На рис. 3, случай в), изображены возможные скачки случайного блуждания S_n . Пример вычисления вероятности остановки по формуле (29) дан в [20].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (4) для экспоненциальной производящей функции вероятностей $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ получает вид:

$$\left(p_{20} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + p_{02} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + p_{00} - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2) = 0 \quad (31)$$

с граничными условиями (5); соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$p_{20}s_1^2 + p_{02}s_2^2 + p_{00} - s_1s_2 = 0. \quad (32)$$

А). Построение незамкнутого решения задачи Дарбу–Пикара (31), (5). Уравнение второго порядка (31) принадлежит гиперболическому типу ([14], [15]). Находим общие интегралы уравнений характеристик; вводя вместо z_1, z_2 новые независимые переменные x, y :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}{2p_{20}} z_1 + z_2, \\ y &= \frac{p_{00}p_{20}}{1 - 4p_{20}p_{02}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}{2p_{20}} z_1 + z_2 \right), \end{aligned} \quad (33)$$

приводим уравнение (31) к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 g_{(0,\gamma_2)}}{\partial x \partial y} = g_{(0,\gamma_2)} \quad (34)$$

(так называемое «телеграфное уравнение»). При преобразовании (33) прямые $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$ переходят, соответственно, в прямые $y = C_0x$, $y = (C_0/C)x$; граничным условиям (5) соответствуют условия для (34):

$$g_{(0,\gamma_2)}(x, y) \big|_{y=C_0x} = \frac{x^{\gamma_2}}{\gamma_2!}, \quad g_{(0,\gamma_2)}(x, y) \big|_{y=C_0x/C} = 0. \quad (35)$$

Таким образом, для уравнения (34) решаем задачу Дарбу–Пикара: заданы условия (35) на двух монотонных кривых, выходящих из точки $(0, 0)$ и расположенных в характеристическом угле $x = 0, y = 0$ с вершиной в той же точке $(0, 0)$. Из теории уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа известно, что решение рассматриваемой задачи (34), (35) существует и единственно (ср. условие (3) аналитичности искомого решения). Для построения решения задачи (34), (35) воспользуемся общим решением телеграфного уравнения [14, задача 30]:

$$\begin{aligned} g_{(0,\gamma_2)}(x, y) &= \int_0^x \psi_1(t) J_0\left(2i\sqrt{y(x-t)}\right) dt \\ &+ \int_0^y \psi_2(t) J_0\left(2i\sqrt{x(y-t)}\right) dt + g_{(0,\gamma_2)}(0, 0) J_0(2i\sqrt{xy}), \end{aligned} \quad (36)$$

где $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — произвольные функции ($J_0(t)$ — функция Бесселя нулевого порядка). Выражение (36) представляет собой формулу Римана [15] для решения уравнения (34).

При условии $\gamma_2 = 1, 2, \dots$ имеем $g_{(0, \gamma_2)}(0, 0) = 0$. Найдем функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ такие, чтобы выполнялись условия (35). При подстановке в (36) второго из условий (35) получаем

$$\begin{aligned} g_{(0, \gamma_2)}(x, y) \Big|_{y=C_0 x/C} &= \int_0^x \psi_1(t) J_0 \left(2i \sqrt{\frac{C_0}{C}} x(x-t) \right) dt \\ &+ \int_0^{C_0 x/C} \psi_2(t) J_0 \left(2i \sqrt{x \left(\frac{C_0}{C} x - t \right)} \right) dt \\ &= \int_0^x \left(\psi_1(t) + \frac{C_0}{C} \psi_2 \left(\frac{C_0}{C} t \right) \right) J_0 \left(2i \sqrt{\frac{C_0}{C}} x(x-t) \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\psi_2(t) = -(C/C_0) \psi_1((C/C_0)t)$. Заменяя в (36) $\psi_2(t)$ последним выражением и затем подставляя в (36) первое из условий (35), получаем

$$\begin{aligned} g_{(0, \gamma_2)}(x, y) \Big|_{y=C_0 x} &= \int_0^x \psi_1(t) J_0 \left(2i \sqrt{C_0 x(x-t)} \right) dt \\ &- \int_0^{C_0 x} \frac{C}{C_0} \psi_1 \left(\frac{C}{C_0} t \right) J_0 \left(2i \sqrt{x(C_0 x - t)} \right) dt = \frac{x^{\gamma_2}}{\gamma_2!}. \end{aligned}$$

Или, после замены переменной во втором слагаемом,

$$\frac{x^{\gamma_2}}{\gamma_2!} = \int_0^x (\psi_1(t) - C\psi_1(Ct)) J_0 \left(2i \sqrt{C_0 x(x-t)} \right) dt. \quad (37)$$

Функцию $\psi_1(t)$ ищем в виде ряда $\psi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\gamma_2-1+2k} t^{\gamma_2-1+2k}$. Тогда (37) получает вид:

$$\frac{x^{\gamma_2}}{\gamma_2!} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{\gamma_2-1+2k} (1 - C^{\gamma_2+2k}) t^{\gamma_2-1+2k} \right) J_0 \left(2i \sqrt{C_0 x(x-t)} \right) dt.$$

Учитывая значения интегралов (ср. [17, интеграл 6.567.1])

$$\int_0^x t^{\gamma_2-1+2k} J_0 \left(2i \sqrt{C_0 x(x-t)} \right) dt = \frac{(\gamma_2-1+2k)!}{(i\sqrt{C_0})^{\gamma_2+2k}} J_{\gamma_2+2k} \left(2i \sqrt{C_0 x} \right), \quad (38)$$

где $k = 0, 1, \dots$, получаем

$$\frac{x^{\gamma_2}}{\gamma_2!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\gamma_2-1+2k} \frac{(1 - C^{\gamma_2+2k})(\gamma_2-1+2k)!}{(i\sqrt{C_0})^{\gamma_2+2k}} J_{\gamma_2+2k} \left(2i \sqrt{C_0 x} \right).$$

Сравнивая последнее выражение с рядом Неймана [16, § 7.10.1]

$$x^{\gamma_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma_2+2k)(\gamma_2+k-1)!}{k!} J_{\gamma_2+2k}(2x),$$

находим выражения для коэффициентов a_{γ_2-1+2k} :

$$a_{\gamma_2-1+2k} = \frac{(-1)^k C_0^k}{1 - C^{\gamma_2+2k}} \frac{(\gamma_2 + 2k)(\gamma_2 + k - 1)!}{\gamma_2! k! (\gamma_2 - 1 + 2k)!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Подставляя найденные функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ в формулу (36), получаем, после вычисления интегралов вида (38), выражение для функции $g_{(0, \gamma_2)}(x, y)$ в виде ряда по функциям Бесселя целого порядка:

$$g_{(0, \gamma_2)}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_0^k}{1 - C^{\gamma_2+2k}} \frac{(\gamma_2 + 2k)(\gamma_2 + k - 1)!}{i^{\gamma_2} \gamma_2! k!} \times \left(\left(\sqrt{\frac{x}{y}} \right)^{\gamma_2+2k} - \left(\frac{C}{C_0} \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^{\gamma_2+2k} \right) J_{\gamma_2+2k}(2i \sqrt{xy}). \quad (39)$$

Заменим функции Бесселя интегралами

$$J_n(2t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} e^{t(u-1/u)} \frac{du}{u^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогда, после замены переменной $u = \sqrt{C_0 x / y} z$,

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\frac{x}{y}} \right)^{\gamma_2+2k} J_{\gamma_2+2k}(2i \sqrt{xy}) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{C_0})^{\gamma_2+2k}} \frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} \exp \left\{ i \sqrt{C_0} \left(xz - \frac{y}{C_0 z} \right) \right\} \frac{dz}{z^{\gamma_2+2k+1}}. \end{aligned}$$

Полагая $u = C \sqrt{y / (C_0 x)} z$, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{C}{C_0} \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^{\gamma_2+2k} J_{\gamma_2+2k}(2i \sqrt{xy}) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{C_0})^{\gamma_2+2k}} \frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} \exp \left\{ i \sqrt{C_0} \left(\frac{Cyz}{C_0} - \frac{x}{Cz} \right) \right\} \frac{dz}{z^{\gamma_2+2k+1}}. \end{aligned}$$

Подставляя последние выражения в (39) и заменяя x и y по формулам (33), приходим к незамкнутому решению задачи (31), (5):

$$\begin{aligned} g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i \sqrt{C_0})^{\gamma_2} (1 - C^{\gamma_2+2k})} \frac{(\gamma_2 + 2k)(\gamma_2 + k - 1)!}{\gamma_2! k!} \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} \left[\exp \left\{ z_1 \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}{2p_{20}} i \sqrt{C_0} \left(z - \frac{1}{Cz} \right) \right. \right. \\ &+ z_2 i \sqrt{C_0} \left(z - \frac{1}{z} \right) \Big\} - \exp \left\{ z_1 \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}{2p_{20}} i \sqrt{C_0} \left(z - \frac{1}{Cz} \right) \right. \\ &+ z_2 i \sqrt{C_0} \left(Cz - \frac{1}{Cz} \right) \Big\} \Big] \frac{dz}{z^{\gamma_2+2k+1}}. \quad (40) \end{aligned}$$

Б). Построение замкнутого решения задачи (31), (5). Для ряда (40) можно обосновать законность перестановки знаков суммирования и интегрирования, суммирования и дифференцирования. Справедливы следующие преобразования, при имеющем место условии $C < 1$ и $|z| > 1$ ($\gamma_2 = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-C^{\gamma_2+2k}} \frac{(\gamma_2+k-1)!}{(\gamma_2-1)! k!} \frac{1}{z^{\gamma_2+2k}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma_2+k-1)!}{(\gamma_2-1)! k!} \frac{1}{z^{\gamma_2+2k}} \sum_{r=0}^{\infty} C^{r(\gamma_2+2k)} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{C^r}{z}\right)^{\gamma_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma_2+k-1)!}{(\gamma_2-1)! k!} \left(\frac{C^{2r}}{z^2}\right)^k = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{C^r}{z}\right)^{\gamma_2} \left(1 - \frac{C^{2r}}{z^2}\right)^{-\gamma_2}. \end{aligned}$$

Тогда выражение (40) для $g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2)$ получает вид:

$$\begin{aligned} g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \\ &\times \oint_{\theta^+} \left[\exp \left\{ z_1 \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}{2p_{20}} i\sqrt{C_0} \left(z - \frac{1}{Cz}\right) + z_2 i \sqrt{C_0} \left(z - \frac{1}{z}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \exp \left\{ z_1 \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_{20}p_{02}}}{2p_{20}} i\sqrt{C_0} \left(z - \frac{1}{Cz}\right) + z_2 i \sqrt{C_0} \left(Cz - \frac{1}{Cz}\right) \right\} \right] \\ &\times \frac{1}{-\gamma_2} d \left(\frac{1}{(i\sqrt{C_0})^{\gamma_2}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{C^r z^{-1}}{1 - C^{2r} z^{-2}} \right)^{\gamma_2} \right), \end{aligned}$$

в качестве контура интегрирования θ берем окружность $|z| = 1/\sqrt{C}$. Во втором слагаемом заменим переменную z на $-1/(Cz)$. Получаем

$$\begin{aligned} g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\theta^+} e^{z_1 s_1(z) + z_2 s_2(z)} \\ &\times \frac{(-1)^{\gamma_2}}{-\gamma_2} d \left(\left(\frac{i}{\sqrt{C_0}} \right)^{\gamma_2} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{C^r z^{-1}}{1 - C^{2r} z^{-2}} \right)^{\gamma_2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{-C^r z}{1 - C^{2r} z^2} \right)^{\gamma_2} \right\} \right). \end{aligned}$$

Сравнивая последнее выражение и (27), получаем замкнутое представление для $g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2)$:

$$g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_T e^{z_1 s_1(z) + z_2 s_2(z)} \frac{(-1)^{\gamma_2}}{-\gamma_2} df_{\gamma_2}(u); \tag{41}$$

из сравнения параметров находим значения периодов 4ω , $2i\omega'$ функции $f_{\gamma_2}(u)$ и отрезок интегрирования T — данные в формулировке теоремы.

Некоторые из сделанных выше преобразований нуждаются в детальном обосновании их законности; однако непосредственной подстановкой выражения (41) в уравнение (31) и проверкой условий (5) убеждаемся,

что (41) является решением задачи (31), (5). Из определения экспоненциальной производящей функции (2) и разложения (8) получаем формулу (29) для вероятностей $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$. Теорема 5 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Сравнивая формулу (29) с формулами для $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$, полученными в теоремах 2–4, можно сделать предположение, что $f_{\gamma_2}(u) = (f_1(u) - c_1)^{\gamma_2} + c_{\gamma_2}$, где $c_1, c_2, \dots$ — некоторые константы.

З а м е ч а н и е 3. Показатель первой экспоненты в решении (40) имеет вид $z_1 s_1(z) + z_2 s_2(z)$, где функции $s_1(z)$ и $s_2(z)$ определены формулами (30). Рациональные функции $s_1(z)$ и $s_2(z)$ удовлетворяют характеристическому уравнению (32) — являются униформизацией римановой поверхности (6). Легко проверить, что функции

$$v_n(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0^+} e^{z_1 s_1(z) + z_2 s_2(z)} \frac{dz}{z^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

являются решениями уравнения (31). Ряд (40) записывается после замены переменной во втором слагаемом под знаком интеграла в виде ряда

$$g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n v_n(z_1, z_2). \quad (42)$$

При $h(s_1, s_2) = p_{20}s_1^2 + p_{02}s_2^2 + p_{10}s_1 + p_{01}s_2 + p_{00}$ или $h(s_1, s_2) = p_{22}s_1^2 s_2^2 + p_{21}s_1^2 s_2 + p_{12}s_1 s_2^2 + p_{20}s_1^2 + p_{02}s_2^2$ также можно получить представление решения соответствующего уравнения (4) в незамкнутом виде (42), при простой униформизации двулистной римановой поверхности (6), что определяет вывод методами п. 8 интегрального представления вида (9) для вероятностей $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ в этих случаях.

З а м е ч а н и е 4. В рассматриваемом специальном случае ветвящегося процесса частицы типа T_2 называются финальными [2]. Обозначим $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ число финальных частиц, которые останутся после того, как процесс вырождается, т.е. не останется частиц типа T_1 . Случайная величина $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ имеет распределение $\{q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}, \gamma_2 = 0, 1, \dots; \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} \leq 1\}$. Полученные формулы для $q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ определяют возможность вывода представляющих интерес для приложений предельных теорем для числа финальных частиц, при условиях $\alpha_1 \rightarrow \infty, \alpha_2 \rightarrow \infty$ ([2, гл. 5, § 5], [1], [6]).

Автор благодарен А. Куликовских за ряд ценных указаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малышев В. А. Случайные блуждания. Уравнения Винера–Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970, 201 с.
2. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.

3. *Мальшиев В. А.* Уравнения Винера–Хопфа и их применение в теории вероятностей. — Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн. Матем. статист. Теоретич. киберн., т. 13. М.: ВИНТИ, 1975, с. 5–35.
4. *Севастьянов Б. А., Калинкин А. В.* Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, в. 2, с. 306–308.
5. *Громак Ю. И., Мальшиев В. А.* Вероятность попадания в конечное множество при блуждании в квадранте с поглощением на границе. — Международная конференция по теории вероятностей и математической статистике: Тезисы докладов. Вильнюс, 1973, с. 185–186.
6. *Могумский А. А., Рогозин Б. А.* Случайные блуждания в положительном квадранте. I: Локальные теоремы; II: Интегральные теоремы; III: Константы в интегральной и локальной теоремах. — Матем. труды, 1999, т. 2, № 2, с. 57–97; 2000, т. 3, № 1, с. 48–118; 2001, т. 4, № 1, с. 68–93.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
8. Two-sex problem. Encyclopedia of Statistical Sciences. V. 9. New York: Wiley, 1988, p. 373.
9. *Сидоров Ю. В., Федорук М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989, 480 с.
10. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1965, 424 с.
11. *Паламодов В. П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967, 488 с.
12. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963, 516 с.
13. *Гурвиц А.* Теория аналитических и эллиптических функций. Л.: ГТТИ, 1933, 344 с.
14. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1975, 128 с.
15. *Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985, 312 с.
16. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974, 296 с.
17. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1108 с.
18. *Калинкин А. В.* Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 1, с. 192–197.
19. *Калинкин А. В.* Финальные вероятности для ветвящегося случайного процесса с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1983, т. 269, в. 6, с. 1309–1312.
20. *Калинкин А. В.* Метод экспоненциальной производящей функции для случайных блужданий в четверти плоскости. — Докл. РАН, 2000, т. 275, в. 5, с. 583–587.

Поступила в редакцию
8.IX.2000