Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Чистяков, Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. III, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 3, 475–497

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3677>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:46:49

© 2002 г.

ЧИСТЯКОВ Г. П.*

НОВОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИЕ ПОСТОЯННЫЕ В ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА. III¹⁾

В центральной предельной теореме Ляпунова получено новое асимптотическое разложение для функций распределения центрированных и нормированных сумм независимых случайных величин, необязательно одинаково распределенных. Полученное разложение используется для нахождения асимптотически наилучших постоянных в неравенстве Берри–Эссеена. Тем самым решена задача, поставленная Колмогоровым и Золотаревым.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, теорема Ляпунова, оценки Берри–Эссеена, асимптотическое разложение, характеристические функции.

5. Новое асимптотическое разложение в теореме Ляпунова

В этом параграфе используются обозначения из §§ 1 и 2. Основной задачей является доказательство теоремы 2.1 и ее следствий. Доказательства основаны на известной формуле обращения

$$(F * \Phi_\varepsilon)(x) - (\Phi * \Phi_\varepsilon)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{-it} (f(t) - e^{-t^2/2}) e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt. \quad (5.1)$$

Представим интеграл в (5.1) в виде суммы двух интегралов $I_1(x)$ и $I_2(x)$ по множествам $\Gamma_1 = [-\frac{1}{4}L^{-1}, \frac{1}{4}L^{-1}]$ и $\Gamma_2 = (-\infty, -\frac{1}{4}L^{-1}) \cup (\frac{1}{4}L^{-1}, \infty)$ соответственно и оценим эти интегралы по отдельности.

Для этого нам понадобятся две вспомогательные теоремы 5.1 и 5.2. Ниже $\alpha(x)$ обозначает величину, введенную в § 2.

Chistyakov G.P. A new asymptotic expansion and asymptotically best constants in Lyapunov's theorem. III.

© Перевод на русский язык, Научное издательство «ТВП», 2001.

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, пр. Ленина, 47, Харьков, 61164 Украина; e-mail: chistyakov@ilt.kharkov.ua

¹⁾ Части I и II статьи опубликованы в журнале «Теория вероятностей и ее применения», 2001, т. 46, в. 2, с. 326–344; в. 3, с. 573–579. Работа выполнена при поддержке SFB 343, Билефельд, Германия.

Теорема 5.1. *Справедливо соотношение*

$$I_1(x) = \alpha(x) + c \Theta L^{4/3}.$$

Подобный результат был доказан в [4, с. 298–300], см. также [2]. Тем не менее, приведем доказательство для целостности изложения.

Доказательство. Используем хорошо известное неравенство

$$\left| f_j\left(\frac{t}{s}\right) - 1 \right| \leq \frac{\sigma_j^2}{2s^2} t^2 \leq \frac{\beta_j^{2/3}}{2s^2} t^2 \leq \frac{1}{2} L^{2/3} t^2, \quad t \in \mathbf{R}^1. \quad (5.2)$$

Ввиду (5.2), получаем разложение

$$\ln f_j\left(\frac{t}{s}\right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(1 - f_j\left(\frac{t}{s}\right) \right)^k$$

при $|t| \leq L^{-1/3}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Используя это разложение и оценку (5.2), для $|t| \leq L^{-1/3}$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left| \ln f_j\left(\frac{t}{s}\right) + 1 - f_j\left(\frac{t}{s}\right) \right| &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\sigma_j^2}{2s^2} t^2 \right)^k \leq \frac{1}{4s^4} \sum_{j=1}^n \sigma_j^4 t^4 \\ &\leq \frac{t^4}{4} \frac{\max_m \sigma_m}{s} \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{s^3} \leq \frac{1}{4} L^{4/3} t^4. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для тех же t имеем

$$\begin{aligned} f(t) - e^{-t^2/2} &= e^{-t^2/2} R(t) \prod_{j=1}^n \exp \left\{ f_j\left(\frac{t}{s}\right) - 1 + \frac{\sigma_j^2}{2s^2} t^2 \right\} \\ &\quad + e^{-t^2/2} \left(\prod_{j=1}^n \exp \left\{ f_j\left(\frac{t}{s}\right) - 1 + \frac{\sigma_j^2}{2s^2} t^2 \right\} - 1 \right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$R(t) = f(t) \prod_{j=1}^n e^{-f_j(t/s)+1} - 1.$$

Согласно (5.3),

$$|R(t)| \leq \frac{1}{4} e^{1/4} L^{4/3} t^4, \quad |t| \leq L^{-1/3}. \quad (5.5)$$

Используем также известную оценку

$$\sum_{j=1}^n \left| f_j\left(\frac{t}{s}\right) - 1 + \frac{\sigma_j^2}{2s^2} \right| \leq \frac{|t|^3}{6s^3} \sum_{j=1}^n \beta_j = \frac{1}{6} L |t|^3, \quad t \in \mathbf{R}^1. \quad (5.6)$$

Применяя (5.5) и (5.6) к (5.4), получаем неравенство

$$\left| f(t) - e^{-t^2/2} - e^{-t^2/2} \left(\frac{1}{2} t^2 + \sum_{j=1}^n \left(f_j \left(\frac{t}{s} \right) - 1 \right) \right) \right| \leq c L^{4/3} t^4 \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} L |t|^3 \right\} + c L^2 |t|^6 e^{-t^2/2} \quad (5.7)$$

для $|t| \leq L^{-1/3}$. Используем также следующий хорошо известный результат:

$$|f(t) - e^{-t^2/2}| \leq 16 L |t|^3 e^{-t^2/3}, \quad |t| \leq \frac{1}{4L} \quad (5.8)$$

(см. [13]). Используя (5.8), получаем

$$\left| (e^{-\epsilon^2 t^2/2} - 1) (f(t) - e^{-t^2/2}) \right| \leq c \epsilon^2 L |t|^5 e^{-t^2/3}, \quad |t| \leq \frac{1}{4L}. \quad (5.9)$$

Легко видеть, что

$$\alpha(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{it} e^{-t^2/2} \left(\frac{1}{2} t^2 + \sum_{j=1}^n \left(f_j \left(\frac{t}{s} \right) - 1 \right) \right) dt.$$

Следовательно, из определения интеграла $I_1(x)$ получаем

$$\begin{aligned} & |I_1(x) - \alpha(x)| \\ & \leq c \int_{|t| \leq L^{-1/3}} \frac{1}{|t|} \left| f(t) - e^{-t^2/2} - e^{-t^2/2} \left(\frac{1}{2} t^2 + \sum_{j=1}^n \left(f_j \left(\frac{t}{s} \right) - 1 \right) \right) \right| dt \\ & \quad + c \int_{L^{-1/3} < |t| \leq 1/4L} \frac{1}{|t|} |f(t) - e^{-t^2/2}| dt \\ & \quad + c \int_{|t| > L^{-1/3}} \frac{1}{|t|} e^{-t^2/2} \left(\frac{1}{2} t^2 + \sum_{j=1}^n \left| f_j \left(\frac{t}{s} \right) - 1 \right| \right) dt \\ & \quad + c \int_{|t| \leq 1/4L} \frac{1}{|t|} |e^{-\epsilon^2 t^2/2} - 1| |f(t) - e^{-t^2/2}| dt. \end{aligned}$$

Первый, второй, третий и четвертый интегралы в правой части этого неравенства оцениваются, соответственно, с помощью (5.7), (5.8), (5.2) и (5.9). Каждый из них не превосходит $c L^{4/3}$, что и требовалось доказать.

Теорема 5.2. Пусть $M_f > L^2$ и τ — такая точка интервала Γ , что

$$|f(\tau)| \geq L^2. \quad (5.10)$$

Тогда найдется положительное целое число d , удовлетворяющее неравенству $d \leq 80 \tau L$, такое, что оценка

$$|f(t)| < L^2 \quad (5.11)$$

справедлива для всех $t \in \Gamma$, лежащих вне объединения κ_q -окрестностей точек $q\tau/d$, $q = 1, \dots, [L^{-1-c_1}d/\tau] + 1$, где

$$\kappa_q = 3 \cdot 10^5 \frac{\tau}{d} \left(\frac{q+1}{d} + \tau L \right) L |\ln L|^{1/2}.$$

Доказательство. Введем случайные величины $Z_j = TX_j$, $j = 1, \dots, n$, где, как и в доказательстве теоремы 2.2, $T = s^2/B$. Случайные величины Z_j имеют функции распределения $H_j(x) = F_j(x/T)$ и характеристические функции $\varphi_j(t) = f_j(Tt)$. Рассмотрим функции $\varphi_j(t)$, удовлетворяющие неравенству

$$|\varphi_j(\tau^*)| \geq \exp \left\{ 4 \frac{\sigma_j^2}{s^2} \ln L \right\}, \quad (5.12)$$

где $\tau^* = \tau L$. Обозначим через $J^{(1)}$ множество индексов j , соответствующих этим характеристическим функциям. Используя (5.10), получим, что $m(J^{(1)}) \geq \frac{1}{2}$.

Введем множество $J^{(2)}$ индексов j , для которых

$$\frac{\beta_j}{B} \leq 4 \frac{\sigma_j^2}{s^2}. \quad (5.13)$$

Легко видеть, что $m(J^{(2)}) \geq \frac{3}{4}$. Заметим, что в случае, когда все X_j являются независимыми и одинаково распределенными, $J^{(1)} = J^{(2)} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Определим множество $J^{(3)} = J^{(1)} \cap J^{(2)}$. Очевидно, что

$$m(J^{(3)}) \geq \frac{1}{4}. \quad (5.14)$$

Обозначим через Z_{js} симметризацию Z_j , т.е. $Z_{js} = Z_j - Z'_j$, где Z'_j — независимая копия Z_j . Пусть $H_{js}(x)$ — функция распределения Z_{js} .

Лемма 5.1. Для всех $j \in J^{(1)}$ справедливо неравенство

$$\int_{|x| \leq \pi/\tau^*} x^2 dH_{js}(x) \leq -2\pi^2 \left(\frac{\sigma_j TL}{\tau^*} \right)^2 \ln L.$$

Доказательство. Предположим, что найдется такой индекс j , что

$$\int_{|x| \leq \pi/\tau^*} x^2 dH_{js}(x) > -2\pi^2 \left(\frac{\sigma_j TL}{\tau^*} \right)^2 \ln L.$$

При помощи неравенства $\sin x \geq 2x/\pi$, $0 \leq x \leq \pi/2$, получаем

$$\begin{aligned} 1 - |\varphi_j(\tau^*)|^2 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\tau^* x}{2} dH_{js}(x) \geq 2 \int_{|x| \leq \pi/\tau^*} \sin^2 \frac{\tau^* x}{2} dH_{js}(x) \\ &\geq 2 \left(\frac{\tau^*}{\pi} \right)^2 \int_{|x| \leq \pi/\tau^*} x^2 dH_{js}(x) \\ &> -2 \left(\frac{\tau^*}{\pi} \right)^2 2\pi^2 \left(\frac{\sigma_j TL}{\tau^*} \right)^2 \ln L = -4 \frac{\sigma_j^2}{s^2} \ln L. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\varphi_j(\tau^*)|^2 < 1 + 4 \frac{\sigma_j^2}{s^2} \ln L \leq \exp \left\{ 4 \frac{\sigma_j^2}{s^2} \ln L \right\}.$$

Это противоречит оценке (5.12). Лемма доказана.

Для фиксированного целого k введем множество

$$V_k = \left\{ x: \left| x - \frac{2\pi k}{\tau^*} \right| < c_3 \frac{L |\ln L|^{1/2}}{\tau^*} \right\},$$

где $c_3 = 400\pi$.

Лемма 5.2. Для любого $j \in J^{(3)}$ найдется целое k_j , удовлетворяющее неравенствам $0 < |k_j| \leq 40\tau^*/\pi$ и

$$\int_{V_{k_j}} dH_{js}(x) \geq c_4 \frac{\sigma_j^2 T^2}{\tau^*}, \quad (5.15)$$

где $c_4 = 250^{-3}$.

Доказательство. Через $\tilde{\beta}_{js}$ обозначим третий абсолютный момент случайной величины Z_{js} . С учетом простой оценки $\tilde{\beta}_{js} \leq 8\beta_j T^3$, для всех $x > 0$ получаем, используя неравенство Чебышева, оценку

$$W_{js}(x) = H_{js}(-x) + 1 - H_{js}(x) \leq \frac{8\beta_j T^3}{x^3}. \quad (5.16)$$

После интегрирования по частям, с учетом (5.13), для любого $N > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{|x|>N} x^2 dH_{js}(x) &\leq N^2 W_{js}(N) + 2 \int_{x>N} x W_{js}(x) dx \\ &\leq \frac{8}{N} \beta_j T^3 + 16 \beta_j T^3 \int_{x>N} \frac{1}{x^2} dx \\ &\leq \frac{24}{N} \beta_j T^3 \leq \frac{96}{N} \sigma_j^2 T^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Заметим, что при $j \in J^{(1)}$ случайная величина $X = \tau^* Z_{js}/2\pi$, в силу (5.12), удовлетворяет условиям леммы 3.4 с $\nu = -8(\sigma_j/s)^2 \ln L$. В силу указанной леммы, для всех $a \in (0, \pi)$ справедливо неравенство

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{\{a/\tau^* \leq |x| \leq \pi/\tau^*\} \setminus \{-\pi/\tau^*\}} dH_{js} \left(x + \frac{2\pi k}{\tau^*} \right) \leq - \left(\frac{2\pi \sigma_j}{as} \right)^2 \ln L. \quad (5.18)$$

При $a = a_0 = 400\pi L |\ln L|^{1/2}$ правая часть неравенства (5.18) равна $(\sigma_j T/200)^2$. Обозначим через V множество

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(\left\{ x: \frac{a_0}{\tau^*} \leq \left| x - \frac{2\pi k}{\tau^*} \right| \leq \frac{\pi}{\tau^*} \right\} \setminus \left\{ -\frac{(2k-1)\pi}{\tau^*} \right\} \right).$$

Применяя лемму 5.1 и неравенство (5.17) с $N = 80$, приходим к оценке

$$\int_{\pi/\tau^* \leq |x| \leq 80} x^2 dH_{js}(x) \geq 2\sigma_j^2 T^2 + 2\pi^2 \left(\frac{\sigma_j T L}{\tau^*} \right)^2 \ln L - \frac{6}{5} \sigma_j^2 T^2 \geq \frac{3}{4} \sigma_j^2 T^2.$$

Таким образом, из (5.18) с $a = a_0$ следует неравенство

$$\int_{\{\pi/\tau^* \leq |x| \leq 80\} \setminus V} x^2 dH_{js}(x) \geq \frac{3}{4} \sigma_j^2 T^2 - \frac{1}{6} \sigma_j^2 T^2 > \frac{1}{2} \sigma_j^2 T^2, \quad (5.19)$$

откуда следует справедливость леммы 5.2. Действительно, в противном случае, если бы утверждение леммы не было верно, то выполнялось бы неравенство, противоположное (5.15), для некоторого $j \in J^{(3)}$ и для всех целых k_j , удовлетворяющих неравенствам $0 < |k_j| \leq 40\tau^*/\pi$, что влечет за собой оценку, противоречащую (5.19). Лемма доказана.

Обозначим через $P_{1s}, \dots, P_{ns}$ вероятностные распределения случайных величин $Z_{1s}, \dots, Z_{ns}$ соответственно. В силу леммы 5.2, для каждой меры P_{js} при $j \in J^{(3)}$ найдется по крайней мере два целых k таких, что

$$P_{js}(V_k) \geq c_4 \frac{\sigma_j^2 T^2}{\tau^*}. \quad (5.20)$$

Обозначим через d_j минимальное расстояние между различными целыми k , удовлетворяющими (5.20).

Лемма 5.3. При любых $j \in J^{(3)}$ параметры d_j допускают оценку

$$d_j \leq 80\tau^*.$$

Доказательство. Для любого $j \in J^{(3)}$ обозначим через A_j объединение окрестностей V_k , удовлетворяющих условию (5.20), и введем вероятностные распределения P_{js}^* следующим образом: $P_{js}^*(S') = P_{js}(S' \cap A_j)/P_{js}(A_j)$ для любого борелевского множества S' . Чтобы применить лемму 3.2 к распределению $P_{js}^*(S')$, нам потребуются несколько вспомогательных неравенств.

В силу (5.17) имеем

$$\int_{|x| > 192} x^2 dP_{js} \leq \frac{1}{2} \sigma_j^2 T^2. \quad (5.21)$$

Кроме того, учитывая (5.18) с $a = a_0$ и определение множества A_j , получаем

$$\int_{\bar{A}_j \cap [-192, 192]} x^2 dP_{js} \leq \frac{192^2}{200^2} \sigma_j^2 T^2 + 192^2 \frac{192\tau^*}{\pi} c_4 \frac{\sigma_j^2 T^2}{\tau^*} \leq \frac{4}{3} \sigma_j^2 T^2, \quad (5.22)$$

где $\bar{A}_j = \mathbf{R}^1 \setminus A_j$. Так как $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dP_{js} = 2\sigma_j^2 T^2$, в силу (5.21) и (5.22) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dP_{js}^* \geq \frac{1}{6} (P_{js}(A_j))^{-1} \sigma_j^2 T^2. \quad (5.23)$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dP_{js}^* \leq (P_{js}(A_j))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dP_{js}. \quad (5.24)$$

Для $j \in J^{(3)}$ введем случайные величины W_j с распределениями P_{js}^* . Функция распределения случайной величины $\tau^* W_j / 2\pi$ принадлежит множеству $\mathfrak{F}_{3,\kappa}$, где $\kappa = (c_3/2\pi) L |\ln L|^{1/2}$. Теперь, применяя лемму 3.2, с учетом оценок (5.23), (5.24) и (5.13), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(d_j - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{\tau^*} \frac{1}{6} \frac{\sigma_j^2 T^2}{P_{js}(A_j)} &\leq \frac{1}{2} \left(d_j - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{\tau^*} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dP_{js}^* \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dP_{js}^* \leq \frac{8\beta_j T^3}{P_{js}(A_j)} \leq \frac{32\sigma_j^2 T^2}{P_{js}(A_j)}, \end{aligned}$$

доказывающим лемму.

Лемма 5.4. Для любого $j \in J^{(3)}$ характеристическая функция $\varphi_j(t)$ допускает оценку

$$|\varphi_j(t)| < \exp \left\{ 640 \tau^* \frac{\sigma_j^2}{s^2} \ln L \right\} \quad (5.25)$$

при $t \in [\frac{1}{4}, L^{-c_1}]$, лежащих вне объединения δ_q -окрестностей точек $q\tau^*/d_j$, $q = 1, \dots, [L^{-c_1} d_j / \tau^*] + 1$, где

$$\delta_q = 3 \cdot 10^5 \frac{\tau^*}{d_j} \left(\frac{q+1}{d_j} + \tau^* \right) L |\ln L|^{1/2}.$$

Доказательство. Предположим, что найдутся такие индекс $j \in J^{(3)}$ и точка $w_j^* \in [\frac{1}{4}, L^{-c_1}]$ вида $w_j^* = q_j \tau^* / d_j + \Delta_j$, где $q_j \in \mathbf{Z}$, $|\Delta_j| \in [\delta_{q_j}, \tau^* / 2d_j]$, что

$$|\varphi_j(w_j^*)| \geq \exp \left\{ 640 \tau^* \frac{\sigma_j^2}{s^2} \ln L \right\}. \quad (5.26)$$

Для упрощения обозначений ниже будем писать q , w , Δ вместо q_j , w_j^* , Δ_j . Из (5.26) следует неравенство

$$\sum_{p=1}^2 \int_{V_{\nu_p}} \sin^2 \frac{wx}{2} dH_{js}(x) \leq -1280 \tau^* \frac{\sigma_j^2}{s^2} \ln L, \quad (5.27)$$

где ν_1 и ν_2 — целые числа такие, что $\nu_2 - \nu_1 = d_j$ и

$$P_{js}(V_{\nu_p}) \geq c_4 \frac{\sigma_j^2 T^2}{\tau^*} \quad (5.28)$$

для $p = 1, 2$.

При $p = 1$ рассмотрим интеграл в левой части (5.27). Каждая точка x из V_{ν_1} может быть представлена в виде $x = w_1 + u$, где $w_1 = 2\pi\nu_1/\tau^*$ и $|u| < c_3 L |\ln L|^{1/2}/\tau^*$. Отсюда получаем

$$\sin \frac{wx}{2} = \sin \left(\frac{ww_1}{2} + \frac{wu}{2} \right) = \sin \frac{ww_1}{2} \cos \frac{wu}{2} + \cos \frac{ww_1}{2} \sin \frac{wu}{2}.$$

Так как $\sin^2(wu/2) \leq (wu)^2/4$, приходим к неравенству

$$\left| \sin^2 \left(\frac{ww_1}{2} + \frac{wu}{2} \right) - \sin^2 \frac{ww_1}{2} - \frac{1}{2} \sin(ww_1) \sin(wu) \right| \leq (wu)^2. \quad (5.29)$$

Рассмотрим два возможных случая:

$$\left| \sin \frac{ww_1}{2} \right| \leq 4w \frac{c_3 L |\ln L|^{1/2}}{\tau^*} \quad (5.30)$$

и

$$\left| \sin \frac{ww_1}{2} \right| > 4w \frac{c_3 L |\ln L|^{1/2}}{\tau^*}.$$

Начнем с рассмотрения второго случая. Ввиду оценки $|\sin(ww_1/2)| > 4|wu| \geq 4|\sin(wu)|$, из (5.29) следует, что

$$\sin^2 \left(\frac{ww_1}{2} + \frac{wu}{2} \right) \geq \frac{3}{4} \sin^2 \frac{ww_1}{2} - (wu)^2 \geq \frac{1}{2} \sin^2 \frac{ww_1}{2}.$$

Тогда, в силу (5.27), справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \sin^2 \frac{ww_1}{2} P_{js}(V_{\nu_1}) \leq -1280 \tau^* \frac{\sigma_j^2}{s^2} \ln L.$$

Отсюда, учитывая (5.28), получаем

$$\sin^2 \frac{ww_1}{2} \leq -\frac{2560}{c_4} (\tau^*)^2 L^2 \ln L.$$

Объединяя это неравенство с (5.30), приходим к соотношению

$$\left| \sin \frac{ww_1}{2} \right| \leq \varepsilon_q = \max \left\{ 4c_3 w \frac{L |\ln L|^{1/2}}{\tau^*}, \frac{51}{\sqrt{c_4}} \tau^* L |\ln L|^{1/2} \right\}.$$

Аналогично получаем, что такое же неравенство выполняется для $|\sin(ww_2/2)|$, где $w_2 = 2\pi\nu_2/\tau^*$. Из последних двух неравенств следует, что найдутся такие целые числа n_1 и n_2 , что

$$\left(\frac{q\tau^*}{d_j} + \Delta \right) \frac{\pi\nu_1}{\tau^*} = n_1\pi + \theta_1, \quad \left(\frac{q\tau^*}{d_j} + \Delta \right) \frac{\pi\nu_2}{\tau^*} = n_2\pi + \theta_2,$$

где $|\theta_p| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon_q$, $p = 1, 2$. Вычитая первое равенство из второго, заключаем, что

$$\Delta \frac{\pi d_j}{\tau^*} = (n_2 - n_1 - q)\pi + \theta_2 - \theta_1.$$

Так как $|\Delta| \leq \tau^*/2d_j$, выполняется $n_2 - n_1 - q = 0$, откуда следует, что $\Delta = \tau^*(\theta_2 - \theta_1)/\pi d_j$. Это соотношение противоречит неравенству $|\Delta| \geq \delta_q$ в силу того, что

$$|\theta_2 - \theta_1| \frac{\tau^*}{\pi d_j} \leq \pi \varepsilon_q \frac{\tau^*}{\pi d_j} < \delta_q.$$

Лемма 5.4 доказана.

Лемма 5.5. *Существует множество индексов $J^{(4)}$, $J^{(4)} \subset J^{(3)}$, такое, что его мера удовлетворяет неравенству $m(J^{(4)}) \geq (320\tau^*)^{-1}$ и d_j принимают только одно значение d при всех $j \in J^{(4)}$.*

Доказательство. Разобьем множество $J^{(3)}$ на непересекающиеся подмножества так, что величина d_j постоянна на каждом из них. Из леммы 5.3 следует, что число таких подмножеств не превосходит $80\tau^*$. Отсюда, с учетом оценки (5.14), следует справедливость леммы.

Справедливость теоремы 5.2 следует из лемм 5.4 и 5.5. Действительно, в силу леммы 5.4, неравенство

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{t}{L}\right) \right| &= \prod_{j=1}^n |\varphi_j(t)| \leq \prod_{j \in J^{(4)}} |\varphi_j(t)| < \prod_{j \in J^{(4)}} \exp \left\{ 640\tau^* \frac{\sigma_j^2}{s^2} \ln L \right\} \\ &= \exp \left\{ 640\tau^* m(J^{(4)}) \ln L \right\} \end{aligned}$$

выполняется для $t \in [\frac{1}{4}, L^{-c_1}]$, лежащих вне объединения δ_q -окрестностей точек $\{q\tau^*/d: q = 1, \dots, [L^{-c_1}d/\tau^*] + 1\}$, и остается применить лемму 5.5.

Доказательство теоремы 2.1. Для того, чтобы получить представление (2.8), вернемся к формуле (5.1) и оценим интегралы I_1 и I_2 . Теорема 5.1 дает необходимое соотношение для интеграла I_1 . Остается оценить лишь интеграл I_2 .

Вначале рассмотрим случай, когда $M_f > L^2$ и $S_* \neq \emptyset$. В § 2 было введено множество точек $t_1, \dots, t_r$ и точка t_* . В силу теоремы 5.2, где мы полагали $\tau = t_*$, найдется такое положительное целое число d , что выполняется неравенство $d \leq 80t_*L$ и оценка (5.11) справедлива для всех $t \in \Gamma$, не принадлежащих объединению $\varkappa_q^*$ -окрестностей точек qt_*/d , $q = 1, \dots, [L^{-1-c_1}d/t_*] + 1$, где

$$\varkappa_q^* = 3 \cdot 10^5 \frac{\tau_*}{d} \left(\frac{q+1}{d} + \tau_* \right) |\ln L|^{1/2}. \quad (5.31)$$

Здесь и далее $\tau_* = t_*L$. Пусть

$$a_{l,k} = \left(l + \frac{k}{d} \right) \tau_*, \quad (5.32)$$

где l и k — целые числа такие, что $0 \leq k < d$. Обозначим через Q множество точек $a_{l,k}$, обладающих следующим свойством: в $\varkappa_{d+k}^*$ -окрестности

точки $a_{l,k}/L$ найдется по крайней мере одна точка t_m . Введем подмножество Q_* множества Q следующим образом. Положим

$$K = \{k: 0 \leq k < d, \exists l: a_{l,k} \in Q\}.$$

Определим

$$Q_* = \left\{ \min_l \{a_{l,k}: a_{l,k} \in Q\}: k \in K \right\}.$$

Очевидно, что точка τ_* принадлежит Q_* .

Через D обозначим наибольший общий делитель целых чисел из множества $K \cup \{d\}$. Легко видеть, что параметр d_* , введенный в § 2, равен d/D и что число точек множества Q_* не превышает d_* .

Из определения множества $\{t_1, \dots, t_r\}$ и теоремы 5.2, где $\tau = t_*$, следует, что число таких точек r не превосходит $L^{-c_1}d/\tau_* + 1 \leq 80L^{-c_1} + 1$. Следовательно, из оценок (2.3) и (2.5) вытекает нижняя оценка (2.10).

Следующая задача состоит в доказательстве того, что при $j \in J_*$ характеристическая функция $f_j(t)$ допускает оценку (2.11). Для этого удобнее вернуться к случайным величинам $Z_j = TX_j$ с функцией распределения $H_j(x)$ и характеристической функцией $\varphi_j(t)$, введенными в начале доказательства теоремы 5.2.

Лемма 5.6. Для всех индексов $j \in J_*$ справедлива оценка

$$\left| \varphi_j \left(\frac{\tau_*}{d_*} \right) \right| \geq 1 - c\eta_*\sigma_j^2T^2 = 1 - c(\eta_*L^{-2}) \frac{\sigma_j^2}{s^2}, \quad (5.33)$$

где

$$\eta_* = d_*^3 \left(1 + \frac{L^{-2c_1}}{\tau_*^2} \right) L^{2-9c_1} |\ln L|. \quad (5.34)$$

Доказательство. Согласно теореме 5.2, $(L\kappa_{ld+k}^*)$ -окрестность точки $a_{l,k}$ множества Q_* содержит единственную точку множества $\{Lt_1, Lt_2, \dots, Lt_r\}$. Представим ее в виде $a_{l,k} + w_{l,k}$, где, в силу (5.31), числа $w_{l,k}$ удовлетворяют неравенству

$$|w_{l,k}| \leq \delta = \frac{c}{d} (L^{-c_1} + \tau_*^2) L |\ln L|^{1/2} \quad (5.35)$$

для некоторой $c \geq 10^6$. Учитывая (2.2), легко видеть, что оценка (5.33) следует из неравенства

$$\begin{aligned} 1 - \left| \varphi_j \left(\frac{\tau_*}{d_*} \right) \right|^2 &\leq d_*^2 \left(1 + \pi^2 \frac{L^{-2c_1}}{\tau_*^2} \right) \sum_{a_{l,k} \in Q_*} \left(1 - |\varphi_j(a_{l,k} + w_{l,k})|^2 \right) \\ &\quad + c(L^{-c_1} + \tau_*^2)^3 L^{3-8c_1} |\ln L|^{3/2} \sigma_j^2 T^2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

и из очевидной оценки $(L^{-c_1} + \tau_*^2)^3 L^{3-8c_1} |\ln L|^{3/2} \leq L^{2-9c_1}$.

Докажем соотношение (5.36). Из (5.16) и (2.4) следует оценка

$$\begin{aligned} H_{js}\left(-\frac{1}{d_*\delta}\right) + 1 - H_{js}\left(\frac{1}{d_*\delta}\right) &\leq 8d_*^3\delta^3\beta_j T^3 \leq 8d_*^3\delta^3 L^{-8c_1}\sigma_j^2 T^2 \\ &\leq c(L^{-c_1} + \tau_*^2)^3 L^{3-8c_1} |\ln L|^{3/2} \sigma_j^2 T^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 1 - \left| \varphi_j\left(\frac{\tau_*}{d_*}\right) \right|^2 &\leq 2 \int_{-1/d_*\delta}^{1/d_*\delta} \sin^2 \frac{\tau_* x}{2d_*} dH_{js}(x) \\ &\quad + c(L^{-c_1} + \tau_*^2)^3 L^{3-8c_1} |\ln L|^{3/2} \sigma_j^2 T^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства (5.36) достаточно показать, что

$$\sin^2 \frac{\tau_* x}{2d_*} \leq d_*^2 \left(1 + \pi^2 \frac{L^{-2c_1}}{\tau_*^2}\right) \sum_{a_{l,k} \in Q_*} \sin^2 \frac{(a_{l,k} + w_{l,k})x}{2}, \quad (5.37)$$

где $x \in [-1/d_*\delta, 1/d_*\delta]$.

Представим x в виде $x = w + 2\pi p/\tau_*$, где p — некоторое целое число и $|w| \leq \pi/\tau_*$. Предположим, что $|w| \leq L^{c_1}/d_*$. Если $p \neq md_*$, где $m \in \mathbf{Z}$, то $p = m_1 d_* + p_1$, где m_1 и p_1 — целые числа и $0 < |p_1| < d_*$. В этом случае каждое слагаемое суммы в правой части (5.37) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\frac{a_{l,k}x}{2} + \frac{w_{l,k}x}{2} \right) &= \sin^2 \left(\frac{\pi k p}{d} + \frac{\tau_* w}{2} \left(l + \frac{k}{d} \right) + \frac{w_{l,k}x}{2} \right) \\ &= \sin^2 \left(\frac{\pi (k/D) p_1}{d_*} + \frac{\tau_* w}{2} \left(l + \frac{k}{d} \right) + \frac{w_{l,k}x}{2} \right). \end{aligned}$$

Так как целые числа из множества $\{k/D: k \in \mathbf{K} \cup \{d\}\}$ взаимно просты, для любого p_1 найдется такое k из представления (5.32) точек $a_{l,k} \in Q_*$, что $(k/D)p_1 = m_2 d_* + p_2$, где m_2 и p_2 — целые числа и $0 < |p_2| < d_*$. Так как

$$\tau_* |w| \left(l + \frac{k}{d} \right) \leq \frac{t_* L}{d} \frac{L^{c_1}}{d_*} \left(\frac{L^{-1-c_1} d}{t_*} + 1 \right) \leq \frac{1}{d_*} \left(1 + \frac{1}{d} \right) \leq \frac{2}{d_*}$$

и $|w_{l,k}x| \leq 1/d_*$, окончательно получаем, что для этого k

$$\sin^2 \left(\frac{\pi (k/D) p_1}{d_*} + \frac{\tau_* w}{2} \left(l + \frac{k}{d} \right) + \frac{w_{l,k}x}{2} \right) \geq \sin^2 \frac{\pi}{2d_*} \geq \frac{1}{d_*^2}.$$

Из этой оценки следует неравенство (5.37) для рассматриваемых w .

Пусть теперь $|w| > L^{c_1}/d_*$. Тогда неравенство (5.37) следует из оценки

$$\sin^2 \frac{\tau_* x}{2} = \sin^2 \frac{\tau_* w}{2} \geq \left(\frac{\tau_* L^{c_1}}{\pi d_*} \right)^2.$$

Лемма доказана.

Для того, чтобы вывести (2.11) из леммы 5.6, необходимо оценить величину η_* . Принимая во внимание, что $d_* \leq d \leq 80 \tau_* \leq 80 L^{-c_1}$, получаем

$$\eta_* \leq -cL^{2-12c_1} \ln L = cL^2 L^{-12c_1} |\ln L|.$$

Напомним, что $\varphi_j(t) = f_j(Tt)$ и, по определению, $h = 2\pi d_* s / t_*$. Так как

$$\left| f_j \left(\frac{2\pi}{h} \right) \right| = \left| f_j \left(\frac{t_*}{d_* s} \right) \right| = \left| \varphi_j \left(\frac{\tau_*}{d_*} \right) \right|,$$

соотношение (2.11) следует из леммы 5.6 и предыдущей оценки.

Покажем, что соотношение (2.9) также выполняется. Рассмотрим случайные величины Y_j , $j \in J_*$, введенные в доказательстве теоремы 2.2. Как было показано, каждая случайная величина Y_j при $j \in J_*$ удовлетворяет условиям леммы 3.5 с $\eta = L^{2-13c_1}$ и $K = 6c_1$. Заметим, что при доказательстве этого факта вместо соотношения (2.9) теоремы 2.1 использовалась оценка $h \leq 10^3 Ls$. Последнее неравенство следует из соотношения $d_* \leq 80 \tau_* = 80 t_* L$ и определения h (см. (2.7)). В силу леммы 3.5, найдется такая случайная величина Y_j^* с функцией распределения из множества $\mathfrak{F}_{3, L^{2c_1}}$, что

$$\mathbf{D}Y_j^* \geq (1 - L^{6c_1}) \mathbf{D}Y_j, \quad \mathbf{E}|Y_j^* - \mathbf{E}Y_j^*|^3 \leq \mathbf{E}|Y_j|^3 + L^{2c_1} \mathbf{D}Y_j.$$

Кроме того, в силу леммы 3.2, справедлива оценка

$$\left(\frac{1}{2} - 8L^{2c_1} \right) \mathbf{D}Y_j^* \leq \mathbf{E}|Y_j^* - \mathbf{E}Y_j^*|^3,$$

из которой, с учетом двух предыдущих неравенств, следует, что $\frac{1}{2} (1 - 20L^{2c_1}) \mathbf{D}Y_j \leq \mathbf{E}|Y_j|^3$. Для доказательства требуемой оценки (2.9) достаточно показать, что найдется такой индекс j из множества J_* , что

$$\mathbf{E}|Y_j|^3 \leq (1 + L^{2c_1}) \frac{1}{h} Ls \mathbf{D}Y_j.$$

Для этого заметим, что множество $J^{(5)}$ индексов, для которых

$$\frac{\beta_j}{B} \leq (1 + L^{2c_1}) \frac{\sigma_j^2}{s^2},$$

имеет меру $m(J^{(5)}) \geq \frac{1}{2} L^{2c_1}$. С учетом (2.10), отсюда следует справедливость неравенства $m(J^{(5)} \cap J_*) > 0$. Поэтому $J^{(5)} \cap J_* \neq \emptyset$ и, беря индекс j из $J^{(5)} \cap J_*$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|Y_j|^3 &= \frac{\beta_j}{B} \frac{B}{h^3} \leq (1 + L^{2c_1}) \frac{\sigma_j^2}{s^2} \frac{B}{h^3} = (1 + L^{2c_1}) (hT)^{-1} \mathbf{D}Y_j \\ &= (1 + L^{2c_1}) \frac{1}{h} Ls \mathbf{D}Y_j. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (2.9) доказано.

Следующая задача состоит в доказательстве справедливости представления (2.8). Легко видеть, что каждая случайная величина Z_j при $j \in J_*$ удовлетворяет условиям леммы 3.6 с $H(x) = H_j(x)$, $\varphi(t) = \varphi_j(t)$, $\sigma^2 = \sigma_j^2 T^2$, $\beta = \beta_j T^3$, $a = \tau_*/d_*$, $\eta = c\eta_*$. Действительно, (3.15) следует из (5.33). Условие $a \geq c_2 = \frac{1}{80}$ выполнено, поскольку $d_* \leq 80\tau_*$. Для доказательства (3.16) достаточно показать, что неравенство (2.4) может быть записано в виде $\beta_j T^3 \leq L^{-8c_1} \sigma_j^2 T^2$. Более того, в силу (2.4),

$$\sigma_j^2 T^2 = \sigma_j^2 \frac{s^4}{B^2} \leq \sigma_j^2 L^{-16c_1} \frac{\sigma_j^4}{\beta_j^2} = L^{-16c_1} \frac{\sigma_j^6}{\beta_j^2} \leq L^{-16c_1},$$

и при достаточно малых L , с учетом (5.34), выполняется соотношение $L^{-16c_1} \leq \eta_*^{-1/3}$.

В силу леммы 3.6, каждая характеристическая функция $\varphi_j(t)$, $j \in J_*$, допускает представление (3.17) в $(1/8\sigma_j T)$ -окрестности каждой точки $q\tau_*/d_*$, $q = 1, \dots, [L^{-c_1} d_*/\tau_*] + 1$. В этом представлении функция $r_q(t)$ имеет вид

$$r_q(t) = r_{qj}(t) = iC_{1qj} \left(t - q \frac{\tau_*}{d_*} \right) + C_{2qj} \left(t - q \frac{\tau_*}{d_*} \right)^2 + C_{3qj} \left(t - q \frac{\tau_*}{d_*} \right)^3, \quad (5.38)$$

где вещественная величина C_{1qj} и комплексные величины C_{2qj} и C_{3qj} удовлетворяют соответственно неравенствам (3.18)–(3.20) с вышеуказанными параметрами. Более того, справедливы оценки (3.21) и (3.22).

Для краткости в дальнейшем будем обозначать $a_q = q\tau_*/d_*$ при $q \in \mathbf{Z}$. Пусть A_* — множество точек $a_q = q\tau_*/d_*$, $q = 1, \dots, [L^{-c_1} d_*/\tau_*] + 1$. Ниже предполагается, что параметр δ определен соотношением (5.35).

Через $\varphi_{J_*}(t)$ и $\varphi_{\bar{J}_*}(t)$ обозначим характеристические функции $\prod_{j \in J_*} \varphi_j(t)$, $\prod_{j \in \bar{J}_*} \varphi_j(t)$, а через $H_{J_*}(x)$ и $H_{\bar{J}_*}(x)$ — соответствующие функции распределения. Поведение этих характеристических функций описывают леммы 5.7 и 5.8 ниже.

Лемма 5.7. Пусть a_q — произвольная точка из множества A_* . Тогда справедлива оценка

$$\delta \sum_{j \in J_*} \left| \operatorname{Re} \frac{\varphi'_j(a_q)}{\varphi_j(a_q)} \right| \leq cL^{c_1} |\ln L|^{7/6}. \quad (5.39)$$

Доказательство. Вначале докажем оценку

$$\left| \sum_{j \in J_*} \operatorname{Re} \frac{\varphi'_j(a_q)}{\varphi_j(a_q)} \right| \leq cq(q^2 + d_*^2) L^{-2} \eta_*^{2/3} + c \frac{q}{d_*} (m(\bar{J}_*))^{1/2} L^{-1-c_1}. \quad (5.40)$$

В силу (3.21),

$$\left| \sum_{j \in J_*} \left(\operatorname{Re} \frac{\varphi'_j(a_q)}{\varphi_j(a_q)} - q \operatorname{Re} \frac{\varphi'_j(a_1)}{\varphi_j(a_1)} \right) \right| \leq c \left(q^3 T^2 \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 + q T^3 \sum_{j=1}^n \beta_j \right) \eta_*^{2/3} \\ = cq(q^2 + 1) L^{-2} \eta_*^{2/3}. \quad (5.41)$$

Точка τ_* выбирается так, что

$$\operatorname{Re} \sum_{j \in J_*} \frac{\varphi'_j(\tau_*)}{\varphi_j(\tau_*)} = -\operatorname{Re} \sum_{j \in \bar{J}_*} \frac{\varphi'_j(\tau_*)}{\varphi_j(\tau_*)} = -\operatorname{Re} \frac{\varphi'_{\bar{J}_*}(\tau_*)}{\varphi_{\bar{J}_*}(\tau_*)}.$$

Заметим, что для всех вещественных t выполняется соотношение

$$|\varphi'_{\bar{J}_*}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| dH_{\bar{J}_*}(x) \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dH_{\bar{J}_*}(x) \right)^{1/2} = (m(\bar{J}_*))^{1/2} \frac{1}{L}. \quad (5.42)$$

Поэтому, с учетом определения τ_* ,

$$\left| \operatorname{Re} \frac{\varphi'_{\bar{J}_*}(\tau_*)}{\varphi_{\bar{J}_*}(\tau_*)} \right| \leq (m(\bar{J}_*))^{1/2} L^{-1-c_1}. \quad (5.43)$$

Последняя оценка позволяет получить из (5.41), где $q = d_*$, неравенство

$$\left| \operatorname{Re} \sum_{j \in J_*} \frac{\varphi'_j(a_1)}{\varphi_j(a_1)} \right| \leq cd_*^2 L^{-2} \eta_*^{2/3} + \frac{1}{d_*} (m(\bar{J}_*))^{1/2} L^{-1-c_1},$$

что вместе с (5.41) доказывает (5.40).

Покажем, что (5.39) следует из (5.40). Действительно, из (5.35), (5.34), (2.10), так как $d_* \leq 80\tau_*$, следует, что для всех точек $a_q \in A_*$ справедливо соотношение

$$\delta \sum_{j \in J_*} \left| \operatorname{Re} \frac{\varphi'_j(a_q)}{\varphi_j(a_q)} \right| \leq c \frac{\tau_*}{d_*} L^{1-c_1} |\ln L|^{1/2} \left(L^{-3c_1} \frac{d_*^3}{\tau_*^3} + L^{-c_1} \frac{d_*^3}{\tau_*} \right) \\ \times L^{-2} d_*^{2/3} L^{2(2-11c_1)/3} |\ln L|^{2/3} \\ + c \frac{\tau_*}{d_*} L^{1-c_1} |\ln L|^{1/2} \frac{L^{-c_1}}{\tau_*} L^{4c_1} L^{-1-c_1} \leq c L^{c_1} |\ln L|^{7/6}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.8. Пусть a_q — произвольная точка из множества A_* . Тогда при любом вещественном t , удовлетворяющем неравенству $|t - a_q| < \delta$, справедлива оценка

$$\sum_{j \in J_*} |r_{qj}(t)| \leq c L^{2c_1} |\ln L|^{7/6}.$$

Доказательство. Из (5.35), (3.18), (5.34) и соотношения $d_* \leq 80 \tau_*$ следует, что

$$\begin{aligned} |t - a_q| \sum_{j \in J_*} |C_{1qj}| &\leq c\delta \left(q^2 T^2 \sum_{j \in J_*} \sigma_j^2 + T^3 \sum_{j \in J_*} \beta_j \right) \eta_*^{2/3} \\ &\leq c \frac{\tau_*}{d_*} L^{1-c_1} |\ln L|^{1/2} L^{-2c_1} \left(\frac{d_*}{\tau_*} \right)^2 \\ &\quad \times L^{-2} d_*^{2/3} L^{2(2-11c_1)/3} |\ln L|^{2/3} \leq c L^{2c_1} |\ln L|^{7/6} \end{aligned}$$

для всех таких t , что $|t - a_q| < \delta$. С помощью соотношения (3.19) получаем оценку

$$\begin{aligned} (t - a_q)^2 \sum_{j \in J_*} |C_{2qj}| &\leq c\delta^2 \left(q^2 T^2 \sum_{j \in J_*} \sigma_j^2 + T^3 \sum_{j \in J_*} \beta_j \right) \eta_*^{1/3} \\ &\leq c \left(\frac{\tau_*}{d_*} \right)^2 L^{2-2c_1} |\ln L| L^{-2c_1} \left(\frac{d_*}{\tau_*} \right)^2 \\ &\quad \times L^{-2} d_*^{1/3} L^{(2-11c_1)/3} |\ln L|^{2/3} \leq c L^{18c_1} |\ln L|^{5/3}, \quad (5.44) \end{aligned}$$

а с помощью (3.20) — оценку

$$\begin{aligned} |t - a_q|^3 \sum_{j \in J_*} |C_{3qj}| &\leq c\delta^3 T^3 \sum_{j \in J_*} \beta_j \leq c \left(\frac{\tau_*}{d_*} \right)^3 L^{3-3c_1} |\ln L|^{3/2} L^{-2} \\ &\leq c L^{1-6c_1} |\ln L|^{3/2}. \quad (5.45) \end{aligned}$$

Для доказательства леммы остается объединить три последних оценки.

Две последние леммы позволяют сформулировать и доказать лемму о поведении характеристической функции $\varphi_{J_*}(t)\varphi_{\bar{J}_*}(t)$.

Лемма 5.9. Пусть a_q — произвольная точка из множества A_* . Тогда при любом вещественном t , удовлетворяющем неравенству $|t - a_q| < \delta$, справедливо представление

$$\prod_{j=1}^n \varphi_j(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_j(a_q) \exp \left\{ -\frac{(t - a_q)^2}{2L^2} \right\} \left(1 + c\Theta L^{c_1} |\ln L|^{7/6} \right). \quad (5.46)$$

Доказательство. Пусть t удовлетворяет условиям леммы. Из (3.16), (5.34), (5.35) и соотношения $\frac{1}{80} \leq \tau_*/d_* \leq L^{-c_1}$ следует, что при $j \in J_*$

$$\frac{1}{\sigma_j T} \geq c\eta_*^{1/3} \geq cL^{2/3-4c_1} |\ln L|^{1/3} > L^{1-9c_1} > c \frac{\tau_*}{d_*} L^{1-c_1} |\ln L|^{1/2} > \delta. \quad (5.47)$$

Тогда, в силу лемм 5.7 и 5.8, из представления (3.17) для характеристической функции $\varphi_j(t)$ при $j \in J_*$ легко получить соотношение

$$\varphi_{J_*}(t) = \varphi_{J_*}(a_q) \exp \left\{ -\frac{m(J_*)(t - a_q)^2}{2L^2} \right\} \left(1 + c\Theta L^{c_1} |\ln L|^{7/6} \right).$$

Заметим, что представление (3.17) применимо к несколько более широкой окрестности точки a_q . Учитывая (2.10), окончательно получаем

$$\varphi_{J_*}(t) = \varphi_{J_*}(a_q) \exp \left\{ -\frac{(t - a_q)^2}{2L^2} \right\} (1 + c\Theta L^{c_1} |\ln L|^{7/6}). \quad (5.48)$$

С другой стороны, используя формулу Тейлора и соотношения (5.42), (2.10) и (5.35), получаем формулу

$$\varphi_{J_*}(t) = \varphi_{J_*}(a_q) + c\Theta L^{2c_1} |\ln L|^{1/2}. \quad (5.49)$$

Справедливость леммы следует из соотношений (5.48) и (5.49).

Обозначим $\tilde{f}(t) = f(t) \exp\{-\varepsilon^2 t^2/2\}$ и введем в рассмотрение интегралы

$$\tilde{I}_q(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a_q - \delta}^{a_q + \delta} \frac{1}{t} \exp \left\{ -\frac{ixt}{L} \right\} \tilde{f}\left(\frac{t}{L}\right) dt, \quad x \in \mathbf{R}^1, \quad (5.50)$$

где $q = \pm 1, \pm 2, \dots$. Заметим, что $\tilde{I}_q(x) = -\overline{\tilde{I}_{-q}(x)}$.

Лемма 5.10. Для всех точек $a_q \in A_*$ справедлива формула

$$\tilde{I}_q(x) = iL\Phi'(x) \frac{1}{a_q} \tilde{f}\left(\frac{a_q}{L}\right) \exp \left\{ -\frac{ia_q x}{L} \right\} (1 + c\Theta L^{c_1} |\ln L|^{7/6}), \quad x \in \mathbf{R}^1.$$

Доказательство. В силу леммы 5.9, как можно убедиться с помощью несложных вычислений, справедлива формула

$$\begin{aligned} \tilde{I}_q(x) &= i\tilde{f}\left(\frac{a_q}{L}\right) \frac{1}{a_q} \exp \left\{ -\frac{ia_q x}{L} \right\} \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{a_q - \delta}^{a_q + \delta} \exp \left\{ -\frac{ix(t - a_q)}{L} - \frac{(t - a_q)^2}{2L^2} \right\} dt + c\Theta L^{1+c_1} |\ln L|^{7/6}. \end{aligned}$$

По определению параметра δ , интеграл в правой части этого равенства имеет вид $\sqrt{2\pi} e^{-x^2/2} L + c\Theta L^{1+c_1}$, что завершает доказательство леммы.

Для интеграла $I_2(x)$, определенного в начале § 5, справедливо следующее необходимое в дальнейшем представление.

Лемма 5.11. Для всех вещественных x справедливо равенство

$$I_2(x) = iL\Phi'(x) \frac{1}{a_1} \sum_q \frac{1}{q} \tilde{f}\left(\frac{a_q}{L}\right) \exp \left\{ -\frac{ia_q x}{L} \right\} + c\Theta L^{1+c_1} |\ln L|^{7/6}, \quad (5.51)$$

где суммирование проводится по всем целым $q \neq 0$.

З а м е ч а н и е. Как и ранее, a_q обозначают точки вида $q\tau_*/d_*$, где $q \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. Введем множества $\Gamma_{2,1}$, $\Gamma_{2,2}$ и $\Gamma_{2,3}$ следующим образом. Обозначим через U объединение δ -окрестностей точек $a_q \in A_*$ и положим

$$\Gamma_{2,1} = (-U \cup U) \cap \Gamma_3, \quad \Gamma_{2,2} = (\Gamma_2 \setminus \Gamma_{2,1}) \cap \Gamma_3, \quad \Gamma_{2,3} = \mathbf{R}^1 \setminus \Gamma_3,$$

где $\Gamma_3 = [-L^{-1-c_1}, L^{-1-c_1}]$. Напомним, что определение Γ_2 было в начале § 5. Теперь перепишем интеграл $I_2(x)$ в виде суммы трех интегралов $I_{2,1}(x)$, $I_{2,2}(x)$ и $I_{2,3}(x)$ по множествам $\Gamma_{2,1}$, $\Gamma_{2,2}$ и $\Gamma_{2,3}$ соответственно. Из теоремы 5.2 видно, что $|I_{2,1}(x)| \leq -cL^2 \ln L$. В силу выбора параметра ε ,

$$|I_{2,1}(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|t| > L^{-1-c_1}} \frac{1}{|t|} e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{|t| > 8|\ln L|^{1/2}} \frac{1}{|t|} e^{-t^2/2} dt \leq cL^2.$$

Остается изучить интеграл $I_{2,2}(x)$. Согласно лемме 5.10, для всех вещественных x

$$I_{2,2}(x) = iL\Phi'(x) \sum \frac{1}{a_q} \tilde{f}\left(\frac{a_q}{L}\right) \exp\left\{-\frac{ia_q x}{L}\right\} + c\Theta L^{1+c_1} |\ln L|^{7/6},$$

где суммирование проводится по всем целым $q \neq 0$ таким, что $|q| \leq L^{-c_1} d_*/\tau_*$. Справедливость леммы следует из последнего соотношения и из оценок интегралов $I_{2,1}(x)$ и $I_{2,3}(x)$.

Вернемся к доказательству теоремы 2.1 в случае, когда $M_f > L^2$ и $S_* \neq \emptyset$. Заметим, что

$$\tilde{f}\left(\frac{a_q}{L}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{iq\tau_* u}{d_* L}\right\} d(F * \Phi_\varepsilon)(u) = \int_{-h/2s}^{h/2s} \exp\left\{\frac{2\pi i q s u}{h}\right\} dH_\varepsilon(u; h),$$

где функция распределения $H_\varepsilon(x; h)$ определена в § 2. Тогда сумма в формуле (5.51) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{q \neq 0} \frac{1}{q} \exp\left\{-\frac{2\pi i q s x}{h}\right\} \int_{-h/2s}^{h/2s} \exp\left\{\frac{2\pi i q s u}{h}\right\} dH_\varepsilon(u; h) \\ &= -i \int_{-h/2s}^{h/2s} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2}{q} \sin\left(\frac{2\pi q s}{h}(x-u)\right) dH_\varepsilon(u; h) \\ &= -2\pi i \int_{-h/2s}^{h/2s} \left(\frac{1}{2} - \text{Fr}\left\{\frac{s}{h}(x-u)\right\}\right) dH_\varepsilon(u; h). \end{aligned}$$

Подставив это выражение в соотношение (5.51), получим представление (2.8) в случае, когда $M_f > L^2$ и $S_* \neq \emptyset$.

Теперь рассмотрим случай, когда $M_f > L^2$ и $S_* = \emptyset$. Нашей задачей является доказательство справедливости оценки $|I_2(x)| \leq cL^{c_1}$ для всех вещественных x . Тогда теорема 2.1 будет доказана.

Вначале предположим, что $M_f > L^2$, $S_* = \emptyset$ и $S \neq \emptyset$. Мы повторяем рассуждения, использованные при доказательстве теоремы для случая, когда $M_f > L^2$ и $S_* \neq \emptyset$, с единственным изменением. Рассмотрим множество точек $\{t_1, \dots, t_r\}$ и множество индексов J_* , введенное в § 2, но предположим теперь, что $t_* = t_1$. Определим d_* так же, как и в § 2. Как и ранее, $\tau_* = t_* L$. Остальные обозначения остаются неизменными.

Ясно, что характеристические функции $\varphi_j(t)$, $j \in J_*$, удовлетворяют условиям леммы 3.6 с $a = \tau_*/d_*$ и $\eta = c\eta_*$. Поэтому они допускают представление, аналогичное (3.17), с остаточным членом $r_q(t) = r_{qj}(t)$ (см. (5.38)), и справедливы соответствующие аналогии оценок (3.18)–(3.22). В силу (5.47), мы можем рассматривать указанное представление в $\tilde{\delta}$ -окрестностях точек $a_q = q\tau_*/d_*$, $q = 1, \dots, [L^{-c_1}d_*/\tau_*] + 1$, где $\tilde{\delta} = L^{1-9c_1}$. Для оценивания абсолютного значения характеристической функции $\varphi_{J_*}(t)$ в этих окрестностях нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.12. Пусть a_q — произвольная точка вида $a_q = q\tau_*/d_*$, где $q = 1, \dots, [L^{-c_1}d_*/\tau_*] + 1$. Тогда

$$\sum_{j \in J_*} \left| \operatorname{Re} \frac{\varphi'_j(a_q)}{\varphi_j(a_q)} \right| \leq cL^{-1-7c_1} |\ln L|^{1/2}. \quad (5.52)$$

Более того, для любого вещественного t , удовлетворяющего неравенству $|t - a_q| < \tilde{\delta}$, справедлива оценка

$$\left| \prod_{j \in J_*} e^{r_{qj}(t)} \right| \leq 1 + cL^{2c_1} |\ln L|^{1/3}. \quad (5.53)$$

Доказательство аналогично доказательству соотношений (5.44) и (5.45). Действительно, из неравенства (3.22) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_*} \left| \operatorname{Re} \frac{\varphi'_j(a_q)}{\varphi_j(a_q)} \right| &\leq cqT^2 \sum_{j \in J_*} \sigma_j^2 \eta_*^{1/2} \\ &\leq cL^{-c_1} L^{-2} L^{1-6c_1} |\ln L|^{1/2} = cL^{-1-7c_1} |\ln L|^{1/2}, \end{aligned}$$

что доказывает (5.52). Учитывая (3.19) и (3.20), получаем, что

$$\begin{aligned} (t - a_q)^2 \sum_{j \in J_*} |C_{2qj}| &\leq c\tilde{\delta}^2 \left(q^2 T^2 \sum_{j \in J_*} \sigma_j^2 + T^3 \sum_{j \in J_*} \beta_j \right) \eta_*^{1/3} \\ &\leq cL^{2(1-9c_1)} L^{-2c_1} L^{-2} L^{(2-12c_1)/3} |\ln L|^{1/3} = cL^{2c_1} |\ln L|^{1/3} \end{aligned}$$

и

$$|t - a_q|^3 \sum_{j \in J_*} |C_{3qj}| \leq c\tilde{\delta}^3 T^3 \sum_{j \in J_*} \beta_j \leq cL^{3(1-9c_1)} L^{-2} = cL^{1-9c_1}$$

при $|t - a_q| < \tilde{\delta}$. Применяя эти оценки к (5.38), получаем (5.53). Лемма доказана.

Докажем необходимую оценку для $|\varphi_{J_*}(t)|$.

Лемма 5.13. Для каждого $q = 1, \dots, [L^{-c_1}d_*/\tau_*] + 1$ найдется вещественная величина b_q , которая не зависит от t и удовлетворяет неравенству

$$|\varphi_{J_*}(t)| \leq c \exp \left\{ -\frac{1}{2L^2} (t - a_q + b_q)^2 \right\}$$

при всех таких вещественных t , что выполнено неравенство $|t - a_q| < \tilde{\delta}$.

Доказательство. Применяя лемму 5.12 и (3.17) к характеристической функции $\varphi_j(t)$, $j \in J_*$, и учитывая (2.10), получаем

$$|\varphi_{J_*}(t + a_q)| = \exp \left\{ B_q + D_q t - \frac{1}{2L^2} t^2 \right\}, \quad -\tilde{\delta} < t < \tilde{\delta}, \quad (5.54)$$

для $q = 1, \dots, [L^{-c_1} d_*/\tau_*] + 1$, где $B_q = \ln |\varphi_{J_*}(a_q)| + c\Theta L^{c_1} |\ln L|^{1/3}$. В этой формуле D_q — вещественная величина, не зависящая от t и удовлетворяющая неравенству $|D_q| \leq cL^{-1-7c_1} |\ln L|^{1/2}$. Так как $|\varphi_{J_*}(t + a_q)| \leq 1$, из (5.54) следует неравенство

$$D_q t - t^2/2L^2 + B_q \leq 0, \quad -\tilde{\delta} < t < \tilde{\delta},$$

из которого, в свою очередь, следует, что

$$-\frac{1}{2} \left(D_q L - \frac{t}{L} \right)^2 + \frac{1}{2} (D_q L)^2 + \ln |\varphi_{J_*}(a_q)| - cL^{c_1} |\ln L|^{1/3} \leq 0.$$

Так как $|D_q| L^2 \leq cL^{1-7c_1} |\ln L|^{1/2} < \tilde{\delta}$, полагая $t = D_q L^2$ в предыдущем неравенстве, заключаем, что

$$\frac{1}{2} (D_q L)^2 + \ln |\varphi_{J_*}(a_q)| \leq cL^{c_1} |\ln L|^{1/3}.$$

Ввиду этой оценки, справедливость леммы следует из формулы (5.54).

Для интегралов $\tilde{I}_q(x)$, $q = 1, 2, \dots$, определенных формулой (5.50), справедлива следующая оценка.

Лемма 5.14. Для всех вещественных x и $q = 1, \dots, [L^{-c_1} d_*/\tau_*] + 1$ справедлива оценка

$$|\tilde{I}_q(x)| \leq \frac{c}{q} L^{1+c_1}.$$

Доказательство. Вначале заметим, что

$$|\tilde{I}_q(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|t + a_q|} |\varphi_{J_*}(t + a_q)| |\varphi_{J_*}(t + a_q)| e^{-(\varepsilon/L)^2 (t + a_q)^2/2} dt.$$

Используя формулу Тейлора и соотношения $S_* = \emptyset$, (5.42) и (2.10), получаем неравенство $|\varphi_{J_*}(t + a_q)| \leq cL^{c_1}$, $t \in (-\delta, \delta)$, для $q = 1, \dots, [L^{-c_1} d_*/\tau_*]$. Более того, так как $a_1 \geq \frac{1}{80}$, заключаем, что

$$|t + a_q| \geq \frac{1}{2} a_q \geq \frac{q}{160}, \quad t \in (-\delta, \delta).$$

Следовательно, справедлива оценка

$$|\tilde{I}_q(x)| \leq c \frac{1}{q} L^{c_1} \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi_{J_*}(t + a_q)| dt, \quad q = 1, \dots, \left[\frac{L^{-c_1} d_*}{\tau_*} \right] + 1.$$

В силу леммы 5.13, получаем

$$\int_{-\delta}^{\delta} |\varphi_{J_*}(t + a_q)| dt \leq c \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2L^2} \right\} dt \leq cL$$

для тех же q . Последние два неравенства доказывают лемму.

Для завершения доказательства теоремы 2.1 в случае, когда $M_f > L^2$, $S_* = \emptyset$ и $S \neq \emptyset$, остается заметить, что

$$|I_2(x)| \leq |I_{2,1}(x)| + |I_{2,2}(x)| + |I_{2,3}(x)|,$$

где интегралы $I_{2,1}(x)$, $I_{2,2}(x)$ и $I_{2,3}(x)$ определены так же, как и в доказательстве леммы 5.11 с той лишь разницей, что точки a_q здесь имеют вид $a_q = qt_1/d_*$. Легко видеть, что предыдущие оценки $|I_{2,2}(x)|$ и $|I_{2,3}(x)|$ остаются в силе. По лемме 5.14 модуль интеграла $I_{2,1}(x)$ не превосходит $cL^{1+c_1} |\ln L|$. Таким образом, $|I_2(x)| \leq cL^{1+c_1} |\ln L|$ для всех вещественных x , что и требовалось доказать.

Остается доказать теорему 2.1 для случая, когда $M_f > L^2$ и $S = \emptyset$. Для оценивания интеграла $I_2(x)$ в этом случае заметим, что функция $|f(t)|$ либо не возрастает, либо не убывает на интервале Γ .

Первый случай невозможен. Действительно, в силу (5.8), в точке $t = \frac{1}{4}L^{-1}$ выполнено неравенство $|f(t)| < L^2$, которое остается справедливым для всех точек Γ , что противоречит условию $M_f > L^2$.

Пусть $|f(t)|$ — неубывающая на Γ функция. Покажем, что в каждой точке $\tau \in \Gamma$, в которой выполняется соотношение (5.10), справедливо неравенство $\tau \geq \frac{1}{2}L^{-1-c_1}$. Предположим, что найдется такая точка τ_1 , что $\tau_1 < \frac{1}{2}L^{-1-c_1}$, но соотношение (5.10) верно. Тогда по теореме 5.2 найдется такая точка $\tau_2 \in [\frac{1}{2}L^{-1-c_1}, L^{-1-c_1}]$, что $|f(\tau_2)| \leq L^2$. Так как $|f(t)|$ — неубывающая функция, приходим к противоречию. Если $|f(t)| \leq L^2$ для всех $t \in [\frac{1}{4}L^{-1}, \frac{1}{2}L^{-1-c_1}]$, то, в силу выбора параметра ε , легко получаем

$$|I_2(x)| \leq cL^2 \ln L. \quad (5.55)$$

Теперь справедливость теоремы 2.1 следует из теоремы 5.1. Итак, теорема 2.1 в случае, когда $M_f > L^2$, доказана полностью.

Остается доказать теорему в случае $M_f \leq L^2$. Легко видеть, что оценка (5.55) остается справедливой, и вновь справедливость теоремы 2.1 следует из теоремы 5.1.

Доказательство следствия 2.1. Предположим, что параметры A , Δ и M удовлетворяют неравенствам $A \geq 1$, $0 < \Delta \leq 1$, $M \geq \Delta$. Введем нормальную функцию распределения $\Phi_\gamma(u) = \Phi(u/\gamma)$, где γ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{\gamma} \geq \frac{8MA}{\Delta} \ln \left(\frac{8MA}{\Delta} \right).$$

Нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 5.15 ([4]). Пусть G — некоторая функция распределения, и пусть V_1 и V_2 — абсолютно непрерывные функции, имеющие ограниченную вариацию, такие, что для всех вещественных u выполняется

$$|V_j(u)| \leq A, \quad |V'_j(u)| \leq A.$$

Обозначим

$$\tilde{G} = G * \Phi_\gamma, \quad \tilde{V}_j = V_j * \Phi_\gamma, \quad j = 1, 2,$$

и предположим, что $|\tilde{V}_2(u) - V_2(u)| \leq \Delta/8M$ для всех вещественных u .

Если в $\Delta/(MA)$ -окрестности некоторой точки ζ выполнено неравенство $|\tilde{G}(u) - \tilde{V}_1(u) - V_2(u)| \leq \Delta$, то справедлива оценка

$$|G(\zeta) - V_1(\zeta) - V_2(\zeta)| \leq \left(1 + \frac{1}{M}\right) \Delta.$$

Ввиду (2.9), для всех вещественных u из представления (2.8) следует, что

$$|(F * \Phi_\varepsilon)(u) - \Phi(u) - \alpha(u)| \leq \Phi'(u) L + cL^{1+c_1} |\ln L|^{7/6}.$$

Применим лемму 5.15 к функциям $G = F$, $V_1 = \Phi$ и $V_2 = \alpha$. Нетрудно проверить, что для всех вещественных u и $\gamma = \varepsilon$ справедливо неравенство $|\alpha(u) - \tilde{\alpha}(u)| \leq cL^2$ и в точке $\zeta = x$ условия леммы 5.15 выполнены с $\gamma = \varepsilon$, $A = 1$, $\Delta = \Phi'(x)L + L^{1+c_1/2} |\ln L|^2$ и $M = L^{-c_1/2}$. В силу леммы 5.15,

$$|F(x) - \Phi(x) - \alpha(x)| \leq \Phi'(x) L + cL^{1+c_1/2} |\ln L|^2.$$

Из этой оценки следует, что

$$\limsup_{l \rightarrow 0} \sup \frac{1}{L} |F(x) - \Phi(x) - \alpha(x)| \leq \Phi'(x),$$

где верхняя грань берется по всем $F_1, \dots, F_n \in \mathfrak{F}_3$ с $L = l$. Соответствующая нижняя оценка

$$\limsup_{l \rightarrow 0} \sup \frac{1}{L} |F(x) - \Phi(x) - \alpha(x)| \geq \Phi'(x)$$

доказана в [4]. Объединяя последние две оценки, получаем формулу (2.12). Следствие 2.1 доказано.

Доказательство следствия 2.2. Предположим, без ограничения общности, что $n > c(F_1)$, где $c(F_1)$ — достаточно большая величина, зависящая только от F_1 .

Для того чтобы вывести представление Эссеена (2.1) из (2.8), вначале рассмотрим случай, где функция распределения F_1 не является решетчатой. Покажем, что в случае, когда $M_f > L^2$ и $S_* \neq \emptyset$, третье

слагаемое в представлении (2.8) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что модуль характеристической функции $f_1(t)$ строго меньше единицы при всех вещественных t , отличных от нуля. Следовательно, для каждого $\lambda > 0$ неравенство

$$|f_1(t)| \leq 1 - \lambda \quad (5.56)$$

справедливо для всех таких вещественных t , что $\sigma_1^2/4\beta_1 \leq |t| \leq K_\lambda$, где $K_\lambda \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$. Кроме того, в силу (2.9), при достаточно больших n верно неравенство $2\pi/h \geq \pi\sigma_1^2/2\beta_1$. В силу (2.11), справедливо соотношение

$$1 - \left| f_1\left(\frac{2\pi}{h}\right) \right| = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда, с учетом (5.56), получаем, что $h \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из того, что $Ls = \beta_1/\sigma_1^2$, следует, что $h/Ls \rightarrow 0$ при $L \rightarrow 0$, откуда следует, что третье слагаемое в правой части (2.8) ведет себя требуемым образом.

Повторяя рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 2.2 при исследовании поведения $\alpha(x)$, легко видеть, что

$$\alpha(x) = \frac{\alpha_1}{6\sigma_1^3\sqrt{2\pi n}} (1 - x^2) e^{-x^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерно относительно $x \in \mathbf{R}^1$. Тогда представление Эссеена следует из (2.8) и леммы 5.15 в случае нерешетчатой функции распределения F_1 .

Остается рассмотреть случай решетчатой функции распределения F_1 . Точки роста F_1 тогда имеют вид $a + kd$, где a и d — постоянные, $d > 0$, $k \in \mathbf{Z}$. Предположим, что d — максимальный шаг функции распределения F_1 . Легко видеть, что в этом случае $M_f = 1$, $S_* \neq \emptyset$ и шаг d совпадает с параметром h в представлении (2.8) при достаточно больших n . Простые вычисления показывают, что

$$|(F * \Phi_\varepsilon)(x) - F(x)| \leq L^{1+c_1/2}$$

и

$$|\psi_n(x) - \Psi(x; h)| \leq L^{1+c_1/2}$$

для x , не принадлежащих $(L^{1+c_1/2})$ -окрестности объединения точек вида $kh/\sigma_1\sqrt{n} + a\sqrt{n}/\sigma_1$, $k \in \mathbf{Z}$. Согласно этим двум оценкам, представление Эссеена (1.2) для указанных x следует из (2.8). Модули приращений функций $F(x)$, $\Phi(x)$ и $\psi_n(x)$ на левых и правых открытых $(L^{1+c_1/2})$ -полуокрестностях каждой из точек $kh/\sigma_1\sqrt{n} + a\sqrt{n}/\sigma_1$ не превосходят $cL^{1+c_1/2}$. Следовательно, для всех вещественных x представление (2.1) вытекает из (2.8). Следствие 2.2 доказано.

Часть настоящих исследований была осуществлена в Университете г. Билефельда. Я благодарен проф. Ф. Гётце за его гостеприимство во время моего пребывания в г. Билефельде. Я также благодарен В. Бенткусу, Ф. Гётце и А. Ю. Зайцеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арак Т. В., Зайцев А. Ю. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1986, т. 174.
2. Bentkus V. On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. — J. Theoret. Probab., 1994, v. 7, № 2, p. 211–224.
3. Berry A. C. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–136.
4. Чистяков Г. П. Об одной задаче Колмогорова. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1990, т. 184, с. 289–319.
5. Esseen C.-G. On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19.
6. Esseen C.-G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. — Acta Math., 1945, v. 77, p. 1–125.
7. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
8. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
9. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестник Моск. ун-та, 1953, № 10, с. 29–38.
10. Le Cam L. A note on the distribution of sums of independent random variables. — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1963, v. 50, p. 601–603.
11. Линник Ю. В. О точности приближения к гауссову распределению сумм независимых случайных величин. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, т. 11, № 2, с. 111–138.
12. Петров В. В. О точных оценках в предельных теоремах. — Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 2, с. 180–182.
13. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
14. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
15. Rogozin B. A. Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме». — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 1, с. 125–128.
16. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.

Поступила в редакцию
30.VI.1998