Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Бойков, Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 3, 549–553

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3693>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:59:43

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2002 г.

БОЙКОВ А. В.*

МОДЕЛЬ КРАМЕРА–ЛУНДБЕРГА
СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПРЕМИЯМИ

В работе исследуется проблематика платежеспособности страховой компании. На основе классической модели Крамера–Лундберга, где процесс премий — линейная функция времени, рассматривается стохастический процесс премий, независимый от процесса риска. В качестве меры платежеспособности выбирается вероятность неразорения. По аналогии с классической моделью Крамера–Лундберга, для вероятностей неразорения получены интегральные уравнения и экспоненциальные оценки. При наличии дисконтирующего процесса предлагаемая модель исследовалась в работе [4].

Ключевые слова и фразы: модель Крамера–Лундберга, характеристический коэффициент, вероятность неразорения.

1. Введение. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, удовлетворяющем обычным условиям, заданы следующие объекты: пуассоновский процесс $N(t)$ с интенсивностью λ ($\mathbf{E}N(t) = \lambda t$, $N(0) = 0$) и независимая от $N(t)$ последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(u)$, $F(0) = 0$.

Пуассоновский процесс $N(t)$ интерпретируется как число исков, поданных клиентами страховой компании за временной промежуток $(0, t]$. Последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ описывает размеры выплат страховой компании клиентам (y_i — выплаты по иску с номером i в момент i -го скачка процесса $N(t)$). Суммарные выплаты по искам к моменту времени t составляют $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} y_i$.

Имея начальный капитал x , компания получает страховые взносы от клиентов с интенсивностью c (c — некоторая положительная постоянная), тогда к моменту времени t величина собранных премий составит $\Pi(t) = ct$. При таком описании капитал компании имеет вид

$$X(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} y_i, \quad (1.1)$$

и под моделью Крамера–Лундберга понимают эволюцию капитала страховой компании согласно данному уравнению. Согласно актуарной традиции, в качестве меры платежеспособности выбирается вероятность неразорения, $\varphi(x) = \mathbf{P}\{X(t) \geq 0 \text{ для всех } t \in \mathbf{R}_+\}$.

Стремление страховой компании к увеличению своего капитала накладывает условие положительности дохода $\mathbf{E}\Pi(t) > \mathbf{E}R(t)$, или $c > \lambda \mathbf{E}y_i$. В этом случае существует константа $\theta > 0$, называемая *коэффициентом нагрузки*, такая, что

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: boikov@mi.ras.ru

$c = (1 + \theta) \lambda \mathbf{E} y_i$. Подобный принцип формирования премий в актуарной литературе носит название *принципа математического ожидания* (см. [3], [5]).

Оценивание вероятности неразорения в модели Крамера–Лундберга проводится следующим образом: если $R > 0$ — решение *характеристического уравнения*

$$- Rc + \lambda \left[\int_0^\infty e^{Ry} dF(y) - 1 \right] = 0, \tag{1.2}$$

то справедлива экспоненциальная оценка $\varphi(x) \geq 1 - e^{-Rx}$. Положительное решение характеристического уравнения R также называется *характеристическим коэффициентом* (см. [1], [3]).

Пусть на данном вероятностном пространстве заданы также пуассоновский процесс $N_1(t)$ с интенсивностью λ_1 ($\mathbf{E} N_1(t) = \lambda_1 t$, $N_1(0) = 0$) и независимая от $N_1(t)$ последовательность $\{c_i\}_{i=1}^\infty$ независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $G(v)$, $G(0) = 0$.

Определим новый процесс премий $\Pi_1(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} c_i$, полагая его независимым от $R(t)$. Под моделью Крамера–Лундберга со стохастическими премиями естественно тогда понимать эволюцию капитала согласно уравнению

$$X(t) = x + \sum_{i=1}^{N_1(t)} c_i - \sum_{i=1}^{N(t)} y_i \tag{1.3}$$

и исследование вероятностей неразорения на бесконечном и конечном промежутках

$$\varphi(x) = \mathbf{P}\{X(t) \geq 0 \text{ для всех } t \in \mathbf{R}_+\}, \quad \varphi(x, t) = \mathbf{P}\{X(s) \geq 0, s \in [0, t]\}.$$

Здесь условие $\mathbf{E} \Pi(t) > \mathbf{E} R(t)$ имеет вид $\lambda_1 \mathbf{E} c_i > \lambda \mathbf{E} y_i$.

В данной работе для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями приводятся экспоненциальные оценки вероятностей неразорения и в некоторых случаях найдены точные формулы для $\varphi(x)$.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Вероятность неразорения $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению*

$$(\lambda + \lambda_1) \varphi(x) = \lambda \int_0^x \varphi(x - u) dF(u) + \lambda_1 \int_0^\infty \varphi(x + v) dG(v). \tag{2.1}$$

Если R — положительное решение характеристического уравнения

$$\lambda_1 \left[\mathbf{E} e^{-Rc_i} - 1 \right] + \lambda \left[\mathbf{E} e^{Ry_i} - 1 \right] = 0, \tag{2.2}$$

то $e^{-R(\Pi(t) - R(t))}$ — мартингал и $\varphi(x) \geq 1 - e^{-Rx}$.

Доказательство. Справедливость интегрального уравнения (2.1) следует из формулы полной вероятности. В течение малого промежутка времени Δt возможны следующие несовместные события:

отсутствие скачков как у процесса $N(t)$, так и у процесса $N_1(t)$, с вероятностью $(1 - \lambda \Delta t)(1 - \lambda_1 \Delta t) + \tilde{o}(\Delta t)$;

один скачок процесса $N(t)$ и отсутствие скачков $N_1(t)$, с вероятностью $\lambda \Delta t(1 - \lambda_1 \Delta t) + \tilde{o}(\Delta t)$;

один скачок процесса $N_1(t)$ и отсутствие скачков $N(t)$, с вероятностью $\lambda_1 \Delta t(1 - \lambda \Delta t) + \tilde{o}(\Delta t)$;

одновременные скачки $N(t), N_1(t)$ или более одного скачка любого из процессов, с вероятностью $\tilde{o}(\Delta t)$.

Тогда можем записать

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & (1 - \lambda \Delta t)(1 - \lambda_1 \Delta t) \varphi(x) + \lambda \Delta t(1 - \lambda_1 \Delta t) \int_0^x \varphi(x - u) dF(u) \\ & + \lambda_1 \Delta t(1 - \lambda \Delta t) \int_0^\infty \varphi(x + v) dG(v) + \tilde{o}(\Delta t), \end{aligned}$$

что после деления на Δt и предельного перехода $\Delta t \rightarrow 0$ дает первое утверждение теоремы.

Используя независимость премий и суммарных исков, вычислим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-R(\Pi(t)-R(t))} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} \mathbf{E} e^{-R(c_1+\dots+c_k)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathbf{E} e^{R(y_1+\dots+y_k)} \\ &= \exp\{\lambda_1 t [\mathbf{E} e^{-Rc_i} - 1] + \lambda t [\mathbf{E} e^{Ry_i} - 1]\}. \end{aligned}$$

Далее, если R — решение характеристического уравнения (2.2), то из стационарности и независимости приращений $\Pi(t), R(t)$ имеем для $t > s$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(e^{-R(\Pi(t)-R(t))} \mid \mathcal{F}_s \right) &= \mathbf{E} e^{-R(\Pi(s)-R(s))} \mathbf{E} \left(e^{-R(\Pi(t)-\Pi(s)-R(t)+R(s))} \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &= \mathbf{E} e^{-R(\Pi(s)-R(s))} \mathbf{E} e^{-R(\Pi(t-s)-R(t-s))} = \mathbf{E} e^{-R(\Pi(s)-R(s))}. \end{aligned}$$

Момент разорения $\tau = \inf\{t \in \mathbf{R}_+ : X(t) < 0\}$ для согласованного непрерывного справа, имеющего пределы слева процесса $X(t)$ — марковский, поэтому для всякого фиксированного $t \in \mathbf{R}_+$ имеем, что $\tau \wedge t$ — ограниченный марковский момент и для мартингала $e^{-R(\Pi(t)-R(t))}$

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{E} e^{-R(\Pi(\tau \wedge t)-R(\tau \wedge t))} \geq \mathbf{E} e^{-R(\Pi(\tau \wedge t)-R(\tau \wedge t))} I\{\tau \leq t\} \\ &= \mathbf{E} e^{-R(\Pi(\tau)-R(\tau))} I\{\tau \leq t\} > e^{Rx} \mathbf{P}\{\tau \leq t\}, \end{aligned}$$

откуда $\mathbf{P}\{\tau \leq t\} \equiv 1 - \varphi(x, t) \leq e^{-Rx}$.

Здесь использованы положительность $e^{-R(\Pi(t)-R(t))}$ и неравенство $\Pi(\tau) - R(\tau) < -x$ для $\tau < \infty$.

В некоторых случаях, как и в классической модели Крамера–Лундберга, удается найти точные формулы для $\varphi(x)$.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

- (1) Если $\mathbf{P}\{c_i = 1\} = \mathbf{P}\{y_i = 1\} = 1$, то $\varphi(x) = \varphi([x]) = 1 - (\lambda/\lambda_1)^{[x]+1}$.
- (2) Если $G(v) = 1 - e^{-bv}$, $F(u) = 1 - e^{-au}$ ($a, b > 0$), то

$$\varphi(x) = 1 - \frac{(a+b)\lambda}{(\lambda_1 + \lambda)a} e^{(\lambda b - \lambda_1 a)x/(\lambda + \lambda_1)}.$$

Доказательство. (1) Условие положительности дохода $\lambda_1 > \lambda$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda_1 [e^{-R} - 1] + \lambda [e^R - 1] = 0,$$

откуда $e^R = \lambda_1/\lambda$ или 1. По теореме 1 имеем $\varphi(x) \geq 1 - (\lambda/\lambda_1)^x$, $\varphi(\infty) = 1$. Равенство $\varphi(x) = \varphi([x])$ очевидно. Для целых x интегральное уравнение (2.1) переходит в разностное

$$\lambda_1 \varphi(x+1) - (\lambda + \lambda_1) \varphi(x) + \lambda \varphi(x-1) = 0, \quad (2.3)$$

откуда $\varphi(x) = C_1 + C_2(\lambda/\lambda_1)^x$, $C_1 = \varphi(\infty) = 1$. Константу C_2 найдем при подстановке в уравнение (2.3) $x = 0$: $(\lambda + \lambda_1)\varphi(0) = \lambda_1\varphi(1)$, $C_2 = -\lambda/\lambda_1$.

(2) Условие положительности дохода $\lambda_1/b > \lambda/a$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda_1 \left[\frac{b}{b+R} - 1 \right] + \lambda \left[\frac{a}{a-R} - 1 \right] = 0,$$

откуда $R = (\lambda_1 a - \lambda b)/(\lambda + \lambda_1)$ или 0. По теореме 1 имеем $\varphi(x) > 1 - \exp\{(\lambda b - \lambda_1 a)x/(\lambda + \lambda_1)\}$, $\varphi(\infty) = 1$.

Интегральное уравнение для $\varphi(x)$ имеет вид

$$(\lambda + \lambda_1) \varphi(x) = \lambda_1 \int_0^\infty \varphi(x+v) b e^{-bv} dv + \lambda \int_0^x \varphi(x-u) a e^{-au} du. \quad (2.4)$$

Замены переменных $v_1 = v + x$, $u_1 = x - u$ приводят к уравнению

$$(\lambda + \lambda_1) \varphi(x) = \lambda_1 \int_x^\infty \varphi(v_1) b e^{-b(v_1-x)} dv_1 + \lambda \int_0^x \varphi(u_1) a e^{-a(x-u_1)} du_1,$$

откуда следует дифференцируемость $\varphi(x)$. Отметим равенства

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \varphi(x+v) b e^{-bv} dv \right)'_x &= -b\varphi(x) + b \int_0^\infty \varphi(x+v) b e^{-bv} dv, \\ \left(\int_0^x \varphi(x-u) a e^{-au} du \right)'_x &= a\varphi(x) - a \int_0^x \varphi(x-u) a e^{-au} du. \end{aligned}$$

Дифференцируя уравнение (2.4), имеем

$$\begin{aligned} (\lambda + \lambda_1) \varphi'(x) + (\lambda_1 b - \lambda a) \varphi(x) \\ = b\lambda_1 \int_0^\infty \varphi(x+v) b e^{-bv} dv - a\lambda \int_0^x \varphi(x-u) a e^{-au} du, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \lambda_1) \varphi''(x) + (\lambda_1 b - \lambda a) \varphi'(x) + (\lambda_1 b^2 + \lambda a^2) \varphi(x) \\ = b^2 \lambda_1 \int_0^\infty \varphi(x+v) b e^{-bv} dv + a^2 \lambda \int_0^x \varphi(x-u) a e^{-au} du. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Правая часть уравнения (2.4), умноженная на ab , в сумме с правой частью уравнения (2.5), умноженной на $b - a$, дает правую часть уравнения (2.6). Для левых частей получим уравнение

$$\varphi''(x) = \frac{\lambda b - \lambda_1 a}{\lambda + \lambda_1} \varphi'(x), \quad (2.7)$$

откуда $\varphi(x) = C_1 + C_2 e^{(\lambda b - \lambda_1 a)x/(\lambda + \lambda_1)}$, $C_1 = \varphi(\infty) = 1$. Константу C_2 найдем при подстановке в уравнение (2.4) $x = 0$: $(\lambda + \lambda_1) \varphi(0) = \lambda_1 \int_0^\infty \varphi(v) b e^{-bv} dv$, $C_2 = -(a + b)\lambda/((\lambda + \lambda_1)a)$.

Для классической модели Крамера–Лундберга вероятность неразорения на конечном промежутке $\varphi(x, t)$ найдена в явном виде в работе [2].

Теорема 3. Вероятность неразорения на конечном промежутке $\varphi(x, t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + (\lambda + \lambda_1) \varphi(x, t) = \lambda_1 \int_0^\infty \varphi(x+v, t) dG(v) + \lambda \int_0^x \varphi(x-u, t) dF(u). \quad (2.8)$$

В случае $G(v) = 1 - e^{-bv}$, $F(u) = 1 - e^{-au}$ ($a, b > 0$) данное уравнение может быть сведено к уравнению в частных производных, причем $\int_0^\infty (1 - \varphi(x, t)) e^{-ts} ds = A(s) e^{\alpha(s)x}$, где

$$\alpha(s) = \frac{\lambda b - \lambda_1 a + s(b - a)}{2(\lambda + \lambda_1 + s)} - \frac{\sqrt{[\lambda b - \lambda_1 a + s(b - a)]^2 + 4ab(\lambda + \lambda_1 + s)s}}{2(\lambda + \lambda_1 + s)}, \quad (2.9)$$

$$A(s) = \frac{\lambda}{s(s + \lambda + \lambda_1 - \lambda_1 b/(b - \alpha(s)))}. \quad (2.10)$$

Доказательство. По аналогии с предыдущими доказательствами для малого промежутка времени Δt имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= (1 - \lambda \Delta t)(1 - \lambda_1 \Delta t) \varphi(x, t - \Delta t) + \lambda_1 \Delta t \int_0^\infty \varphi(x+v, t - \Delta t) dG(v) \\ &\quad + \lambda \Delta t \int_0^x \varphi(x-u, t - \Delta t) dF(u) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

откуда и следует интегро-дифференциальное уравнение. Для экспоненциальных распределений премий и исков $G(v) = 1 - e^{-bv}$, $F(u) = 1 - e^{-au}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + (\lambda + \lambda_1) \varphi(x, t) &= \lambda_1 \int_0^\infty \varphi(x+v, t) b e^{-bv} dv \\ &\quad + \lambda \int_0^x \varphi(x-u, t) a e^{-au} du. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Последовательным дифференцированием получим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + (\lambda + \lambda_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (\lambda_1 a - \lambda b) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (a - b) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - ab \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (2.12)$$

для сокращения записи зависимость от x, t не указывается.

Для решения полученного уравнения введем вспомогательную функцию $W(s, x) = \int_0^\infty (1 - \varphi(x, t)) e^{-ts} dt$ и отметим для нее следующие факты:

$$\begin{aligned} W(s, x) &= \frac{1}{s} - \int_0^\infty \varphi(x, t) e^{-ts} dt = -\frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-ts} dt, \\ \frac{\partial W(s, x)}{\partial x} &= - \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} e^{-ts} dt = -\frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} e^{-ts} dt, \\ \frac{\partial^2 W(s, x)}{\partial x^2} &= - \int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} e^{-ts} dt = -\frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} e^{-ts} dt. \end{aligned}$$

Умножим уравнение (2.12) на e^{-ts} и проинтегрируем затем по t от 0 до ∞ . Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\lambda + \lambda_1 + s) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (\lambda b - \lambda_1 a + s(b - a)) \frac{\partial W}{\partial x} - absW = 0. \quad (2.13)$$

Характеристическое уравнение для (2.13) имеет два действительных корня противоположных знаков. Функция $\varphi(x, t)$ ограничена, поэтому $W(x, s)$ также ограничена и $W(x, s) = A(s)e^{\alpha(s)x}$, где $\alpha(s)$ — отрицательный корень характеристического уравнения, имеющий вид (2.9).

Параметр $A(s)$ находится из уравнения (2.11) при $x = 0$:

$$\frac{\partial \varphi(0, t)}{\partial t} + (\lambda + \lambda_1) \varphi(0, t) = \lambda_1 \int_0^\infty \varphi(v, t) b e^{-bv} dv, \quad (2.14)$$

и имеет вид (2.10).

З а м е ч а н и е. Из второй части доказательства теоремы 3 следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [1 - \varphi(x, t)] = \lim_{s \rightarrow 0} sW(x, s) = \frac{\lambda(a + b)}{a(\lambda + \lambda_1)} \exp \left\{ \frac{\lambda b - \lambda_1 a}{\lambda + \lambda_1} x \right\},$$

что согласуется с явной формулой для $\varphi(x)$ из теоремы 2.

Выражаю благодарность своему научному руководителю в Математическом институте им. В. А. Стеклова д.ф.-м.н. проф. А. В. Мельникову за предложенную постановку и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grandell J.* Aspects of Risk Theory. New York: Springer-Verlag, 1991, 175 p.
2. *Pervozvansky A. A. Jr.* Equation for survival probability in a finite time interval in case of non-zero real interest force. — Insurance: Math. Econ., 1998, v. 23, p. 287–295.
3. *Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.* Stochastic Processes for Insurance and Finance. Chichester: Wiley, 1999, 654 p.
4. *Жилина Л. С.* Оценка вероятности разорения страховой компании для некоторой модели страхования. — Прикладна статистика, актуарна та фінансова математика (Донецьк), 2000, № 1, с. 67–78.
5. *Мельников А. В., Волков С. Н., Нечаев М. Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001.

Поступила в редакцию
25.VI.2002