Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Гринь, О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 3, 554–558

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3694>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 07:26:01

© 2002 г.

ГРИНЬ А. Г.*

О МИНИМАЛЬНОМ УСЛОВИИ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ¹⁾

Предложено минимальное в некотором смысле условие слабой зависимости для стационарных последовательностей, обеспечивающее выполнение центральной предельной теоремы.

Ключевые слова и фразы: стационарные последовательности, условия слабой зависимости, центральная предельная теорема.

Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, и пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Будем писать $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$ и $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [1, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин ξ_n и η_n к нулю при $n \rightarrow \infty$ [1, с. 393]. Обозначим через $\mathcal{N}(0, 1)$ случайную величину, имеющую стандартное нормальное распределение.

Если $E\xi_n^2 < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, $\sigma_n^2 = DS_n \rightarrow \infty$ и

$$\sigma_n^{-1} (S_n - ES_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

то будем говорить, что к последовательности $\{\xi_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Следуя [2], назовем $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ , если $b_{[x]}$, $x > 0$, является правильно меняющейся функцией порядка ρ , где $[x]$ — целая часть x .

Предельные теоремы для сумм зависимых случайных величин, как правило, доказываются с определенными заранее условиями слабой зависимости (регулярности) такими, как условия сильного перемешивания, равномерно сильного перемешивания, полной регулярности (ρ -перемешивания) и т.п. (см., например, [3]). В связи с этим возникает вопрос — насколько выполнение той или иной теоремы обусловлено данным условием регулярности, возможно ли (и в каких границах) ослабление этого условия?

В настоящей заметке предлагается минимальное в некотором смысле условие слабой зависимости, при котором справедлива центральная предельная теорема.

Естественно, центральная предельная теорема может иметь место и при сколь угодно зависимых слагаемых, что показывают, скажем, примеры такого типа: $\xi_n = \mathcal{N}(0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, или $\xi_n = \eta_n + \mathcal{N}(0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, где $\{\eta_n\}$ — последовательность независимых и не зависящих от $\mathcal{N}(0, 1)$ одинаково распределенных величин с конечной дисперсией. Легко видеть, что в этих случаях $\sigma_n \sim n$, $n \rightarrow \infty$.

Вместе с тем в предельных теоремах для последовательностей с сильным перемешиванием, равномерно сильным перемешиванием, полной регулярностью нормальное предельное распределение может иметь место лишь в случае, когда масштабная нормировка осуществляется правильно меняющимися последовательностями порядка $\frac{1}{2}$ (см., например, [3, теорема 18.1.1]). Предположение о том, что σ_n является правильно меняющейся последовательностью порядка $\frac{1}{2}$, является, по существу, некоторым условием слабой зависимости, касающимся лишь моментов порядка не выше второго (см.

* Омский государственный университет, пр. Мира, 55а, 644077 Омск, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-01130) и программы интеграции науки и высшей школы (грант 586).

лемму 1), и это предположение в дальнейшем позволит нам «отсеять» последовательности, не обладающие слабой зависимостью, подобные приведенным выше.

Через $\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n$ будем обозначать независимые случайные величины такие, что $\hat{\xi}_k \stackrel{d}{=} \xi_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию (R), если при любом действительном t и при любой последовательности натуральных чисел $m = m(n)$

$$\mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}S_{n+m}\} - \mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}S_n\} \mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n+m}^{-1}S_m\} \rightarrow 0, \quad (R)$$

$n \rightarrow \infty$ (для краткости будем говорить, что соотношение (R) выполняется при $n + m \rightarrow \infty$). В соответствии с определением слабой эквивалентности условие (R) можно записать так:

$$\frac{S_{n+m}}{\sigma_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \frac{\hat{S}_n}{\sigma_{n+m}} + \frac{\hat{S}_m}{\sigma_{n+m}}, \quad n + m \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Лемма 1. Дисперсия σ_n^2 является правильно меняющейся последовательностью порядка 1 (а σ_n — правильно меняющейся последовательностью порядка $\frac{1}{2}$) тогда и только тогда, когда выполнено «условие (R) в широком смысле»:

$$\sigma_{n+m}^2 \sim \sigma_n^2 + \sigma_m^2, \quad n + m \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — стационарная последовательность, и пусть $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$, $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Для того чтобы к последовательности $\{\xi_n\}$ была применима центральная предельная теорема и σ_n являлась правильно меняющейся функцией порядка $\frac{1}{2}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (R) и последовательность $\{\sigma_n^{-2}S_n^2\}$ была равномерно интегрируема.

Доказательства леммы и теоремы приводятся ниже.

З а м е ч а н и е 1. Теорему 1 можно интерпретировать так: условие (R) является минимальным условием слабой зависимости, при котором справедлива центральная предельная теорема с правильно меняющейся порядка 1 дисперсией.

З а м е ч а н и е 2. Из условий сильного перемешивания, равномерно сильного перемешивания, ρ -перемешивания следует условие (R). Это доказывается стандартным методом секционирования (см., например, [3, теорема 18.1.1]). Наоборот, из условия (R) ни одно из названных выше условий, вообще говоря, не следует, более того, условие (R) может выполняться для последовательностей со сколь угодно сильной зависимостью «прошлого» и «будущего». Простейший пример такой последовательности: $\xi_n = \eta_n + (-1)^n \zeta$, $n = 1, 2, \dots$, где η_n — последовательность независимых одинаково распределенных величин, а ζ — случайная величина с симметричным распределением, не зависящая от $\{\eta_n\}$, $\mathbf{E}\eta_n^2 < \infty$, $\mathbf{E}\zeta^2 < \infty$. Тогда $\sigma_n^2 \sim n\mathbf{D}\eta_n$ и

$$\sigma_n^{-1}S_n = \sigma_n^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \eta_k + \frac{1}{2}((-1)^n - 1)\zeta \right) \stackrel{d}{\sim} \sigma_n^{-1} \sum_{k=1}^n \eta_k,$$

откуда легко следуют и условие (R), и применимость центральной предельной теоремы к последовательности $\{\xi_n\}$. В то же время ясно, что эта последовательность не удовлетворяет, вообще говоря, ни одному из общепринятых условий слабой зависимости. Попросту говоря, условие (R) — это слабая зависимость сумм, а не слагаемых.

З а м е ч а н и е 3. Если последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию ρ -перемешивания и $\sigma_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, то σ_n является правильно меняющейся последовательностью порядка $\frac{1}{2}$ ([3, замечание 18.2.2]). Из теоремы 1 и замечания 2 следует теперь, что для последовательности с ρ -перемешиванием центральная предельная теорема имеет место тогда и только тогда, когда последовательность $\{\sigma_n^{-2}S_n^2\}$ равномерно интегрируема. Этот факт неоднократно доказывался многими авторами (см., например, [4]).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Мы будем доказывать, что σ_n^2 является правильно меняющейся последовательностью порядка 1, для чего достаточно проверить справедливость следующих соотношений (см., например, [5]):

$$\sigma_n^{-2}\sigma_{n+1}^2 \rightarrow 1, \quad \sigma_n^{-2}\sigma_{kn}^2 \rightarrow k, \quad n \rightarrow \infty,$$

при любом натуральном k , и $\sigma_{[(\lambda+\mu)n]}^2 \sim \sigma_{[\lambda n]}^2 + \sigma_{[\mu n]}^2$, $n \rightarrow \infty$, где $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Легко видеть, что эти соотношения вытекают из (2), так что если выполнено (2), то σ_n является правильно меняющейся последовательностью порядка $\frac{1}{2}$.

Наоборот, пусть σ_n является правильно меняющейся последовательностью порядка $\frac{1}{2}$. Тогда $\sigma_n^2 = nh(n)$, где $h(x)$ — медленно меняющаяся функция. Для функции $h(x)$ справедливы следующие утверждения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon \leq \lambda \leq 1} \left| \frac{h(\lambda n)}{h(n)} - 1 \right| = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (3)$$

[2, теорема 1.1],

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < \lambda < \varepsilon} \frac{\lambda h(\lambda n)}{h(n)} = 0 \quad (4)$$

[3, лемма 18.2.4]. Имеем

$$\frac{\sigma_n^2 + \sigma_m^2}{\sigma_{n+m}^2} = \frac{nh(n)}{(n+m)h(n+m)} + \frac{mh(m)}{(n+m)h(n+m)} = I_1 + I_2.$$

Легко видеть, что существует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, такая, что соотношения (3) и (4) выполняются при $\varepsilon = \varepsilon_n$. Пусть для определенности $n \geq m$. Если $m \geq n\varepsilon_n$, то в силу (3)

$$I_1 + I_2 = \frac{n}{n+m} (1 + o_n(1)) + \frac{m}{n+m} (1 + o_n(1)) = 1 + o_n(1).$$

Если же $m < n\varepsilon_n$, то в силу (4) $I_2 = o_n(1)$, так что снова $I_1 + I_2 = 1 + o_n(1)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть к последовательности $\{\xi_n\}$ применима центральная предельная теорема, т.е. при любом $t \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E} \exp\{it\sigma_n^{-1} S_n\} \rightarrow \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

и σ_n является правильно меняющейся функцией порядка $\frac{1}{2}$. В этих предположениях равномерная интегрируемость последовательности $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ доказана, например, в [3, с. 425].

Пусть $t \in \mathbf{R}$ и $m = m(n)$. Обозначим

$$\Delta(n) = \left| \mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n+m}^{-1} S_{n+m}\} - \mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n+m}^{-1} S_n\} \mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n+m}^{-1} S_m\} \right|.$$

Поскольку σ_n^2 — правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то $\sigma_{n+m}^2 \sim \sigma_n^2 + \sigma_m^2$, $n \rightarrow \infty$, в силу леммы 1, так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \leq c \leq 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такие, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma_{n_2+m_2}^{-2} \sigma_{n_2}^2 \rightarrow c, \quad \sigma_{n_2+m_2}^{-2} \sigma_{m_2}^2 \rightarrow 1 - c,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Если $c = 0$ ($c = 1$), то при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma_{n_2+m_2}^{-1} S_{n_2} \rightarrow 0 \quad (\sigma_{n_2+m_2}^{-1} S_{m_2} \rightarrow 0)$$

по вероятности, следовательно, $\Delta(n_2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Если же $0 < c < 1$, то в силу (15)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n_2+m_2}^{-1} S_{n_2+m_2}\} &\sim \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{ct^2}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{(1-c)t^2}{2}\right\} \\ &\sim \mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n_2+m_2}^{-1} S_{n_2}\} \mathbf{E} \exp\{it\sigma_{n_2+m_2}^{-1} S_{m_2}\}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т.е. снова $\Delta(n_2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, доказано, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Это означает, что $\Delta(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, т.е. выполнено условие (R).

Достаточность. Пусть выполнено условие (R) и последовательность $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ равномерно интегрируема. В силу известной теоремы Прохорова (см., например, [6]) последовательность $\{\sigma_n^{-1} S_n\}$ является относительно компактной, так что из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать подпоследовательность $\{n_1\}$, $n_1 = n_1(n)$, такую, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma_{n_1}^{-1} S_{n_1} \xrightarrow{d} \xi, \quad \sigma_{m_1}^{-1} S_{m_1} \xrightarrow{d} \eta, \quad \sigma_{n_1+m_1}^{-1} S_{n_1+m_1} \xrightarrow{d} \zeta, \quad (6)$$

где $m_1 = m(n_1)$, а ξ, η и ζ — случайные величины. При этом поскольку последовательность $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ равномерно интегрируема, то

$$\mathbf{E} \xi^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\sigma_{n_1}^{-1} S_{n_1})^2 = 1, \quad \mathbf{E} \eta^2 = 1, \quad \mathbf{E} \zeta^2 = 1 \quad (7)$$

[6, теорема 5.4]. Далее, из ограниченных последовательностей $\alpha_{n_1} = \sigma_{n_1} / \sqrt{\sigma_{n_1}^2 + \sigma_{m_1}^2}$, $\beta_{n_1} = \sigma_{m_1} / \sqrt{\sigma_{n_1}^2 + \sigma_{m_1}^2}$ выберем подпоследовательности $\{\alpha_{n_2}\}$ и $\{\beta_{n_2}\}$ такие, что

$$\alpha_{n_2} \rightarrow \alpha, \quad \beta_{n_2} \rightarrow \beta, \quad n \rightarrow \infty, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (8)$$

Тогда

$$\frac{\widehat{S}_{n_2} + \widehat{S}_{m_2}}{\sqrt{\sigma_{n_2}^2 + \sigma_{m_2}^2}} = \alpha_{n_2} \sigma_{n_2}^{-1} \widehat{S}_{n_2} + \beta_{n_2} \sigma_{m_2}^{-1} \widehat{S}_{m_2} \xrightarrow{d} \alpha \widehat{\xi} + \beta \widehat{\eta}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Понятно, что $\alpha \widehat{\xi} + \beta \widehat{\eta}$ имеет невырожденное распределение.

Далее, в силу соотношений (1), (6) и (7)

$$\sigma_{n_2+m_2}^{-1} (\widehat{S}_{n_2} + \widehat{S}_{m_2}) \xrightarrow{d} \zeta, \quad n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где ζ имеет невырожденное распределение. По теореме о сходимости типов [1, с. 216] из (9) и (10) вытекает $\sigma_{n_2+m_2}^{-1} \sqrt{\sigma_{n_2}^2 + \sigma_{m_2}^2} \rightarrow C$, $0 < C < \infty$. Отсюда следует, что вместе с последовательностями $\{\sigma_{n_2}^{-2} S_{n_2}^2\}$ и $\{\sigma_{m_2}^{-2} S_{m_2}^2\}$ равномерно интегрируемой является последовательность $\{\sigma_{n_2+m_2}^{-2} (\widehat{S}_{n_2}^2 + \widehat{S}_{m_2}^2)\}$, и из (10) получаем теперь $\delta_{n_2} = \sigma_{n_2+m_2}^{-2} (\sigma_{n_2}^2 + \sigma_{m_2}^2) \rightarrow \mathbf{E} \zeta^2 = 1$, $n \rightarrow \infty$. Таким образом, мы показали, что для всякой последовательности натуральных чисел найдется подпоследовательность $\{n_2\}$ такая, что $\delta_{n_2} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Это означает, что $\delta_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, т.е. выполнено (2). По лемме 1 σ_n является правильно меняющейся последовательностью порядка $\frac{1}{2}$.

Пусть σ_n является правильно меняющейся последовательностью порядка $\frac{1}{2}$ и выполнено условие (R). Представим произвольное натуральное n в виде $n = km + r$, $m < n$, $0 \leq r < m$, $k = [n/m]$. Тогда

$$S_n = \sum_{j=1}^k \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \xi_i + \sum_{i=km+1}^{km+r} \xi_i. \quad (11)$$

Из свойства (2) легко выводится, что

$$\sup_{n \geq 1} \max_{1 \leq r \leq m} \sigma_r^2 \sigma_m^{-2} < \infty, \quad (12)$$

так что

$$(\sqrt{k} \sigma_m)^{-1} \sum_{i=km+1}^{km+r} \xi_i \rightarrow 0 \quad (13)$$

по вероятности, а последовательность $k = k(n) \rightarrow \infty$ можно подобрать растущей столь медленно, что

$$\sigma_n^2 \sim k \sigma_m^2. \quad (14)$$

Из условия (R) (уменьшив, если нужно, скорость стремления $k(n)$ к бесконечности) и соотношений (13) и (14) получаем

$$\sigma_n^{-1} \sum_{j=1}^k \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \xi_i \stackrel{d}{\sim} (\sqrt{k} \sigma_m)^{-1} \sum_{j=1}^k X_j, \quad n \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где $X_j \stackrel{d}{=} S_m$ и $X_1, \dots, X_k$ — независимы. Для того чтобы к последовательности серий $\{(\sqrt{k}\sigma_m)^{-1}X_j, j = 1, \dots, k, n = 1, 2, \dots\}$ независимых случайных величин была применима центральная предельная теорема, достаточно, чтобы выполнялось условие Линдберга: при любом $\varepsilon > 0$

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{k\sigma_m^2} \sum_{j=1}^k \mathbf{E}\{X_j^2, |X_j| > \varepsilon\sqrt{k}\sigma_m\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Используя определение величин X_j и равномерную интегрируемость последовательности $\{\sigma_m^{-2}S_m^2\}$, получаем $L_n(\varepsilon) = \sigma_m^{-2}\mathbf{E}\{S_m^2, |S_m| > \varepsilon\sqrt{k}\sigma_m\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, что вместе с (11) и (15) дает

$$\sigma_n^{-1}S_n \stackrel{d}{\sim} (\sqrt{k}\sigma_m)^{-1} \sum_{j=1}^k X_j \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
3. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
4. Denker M. Uniform integrability and the central limit theorem for strongly mixing processes. — *Progr. Probab. Statist.*, 1986, v. 11, p. 269–274.
5. Гринь А. Г. Области притяжения для последовательностей с перемешиванием. — *Сиб. матем. журн.*, 1990, т. 31, № 1, с. 53–63.
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.

Поступила в редакцию
27.VII.2000

© 2002 г.

ИВЧЕНКО Г. И.*, МЕДВЕДЕВ Ю. И.*

МЕТОД В. Л. ГОНЧАРОВА И ЕГО РАЗВИТИЕ В АНАЛИЗЕ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОДСТАНОВОК

Демонстрируется эффективность метода производящих функций, впервые использованного В. Л. Гончаровым при анализе асимптотических свойств случайных подстановок, в задаче исследования совместных распределений максимальных длин циклов случайной подстановки в модели Эванса. Выводится явный вид соответствующей многомерной плотности Гончарова и ее обобщения.

Ключевые слова и фразы: случайные подстановки и их структура, случайные многочлены над конечными полями, производящие функции, предельные теоремы.

* Московский государственный институт электроники и математики, Б. Трехсвятильский пер., 3/12, 109028 Москва, Россия.