Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, Метод В. Л. Гончарова и его развитие в анализе различных моделей случайных подстановок, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 3, 558–566

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:31:00

где $X_j \stackrel{d}{=} S_m$ и $X_1, \dots, X_k$ — независимы. Для того чтобы к последовательности серий $\{(\sqrt{k}\sigma_m)^{-1}X_j, j = 1, \dots, k, n = 1, 2, \dots\}$ независимых случайных величин была применима центральная предельная теорема, достаточно, чтобы выполнялось условие Линдберга: при любом $\varepsilon > 0$

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{k\sigma_m^2} \sum_{j=1}^k \mathbf{E}\{X_j^2, |X_j| > \varepsilon\sqrt{k}\sigma_m\} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Используя определение величин X_j и равномерную интегрируемость последовательности $\{\sigma_m^{-2}S_m^2\}$, получаем $L_n(\varepsilon) = \sigma_m^{-2}\mathbf{E}\{S_m^2, |S_m| > \varepsilon\sqrt{k}\sigma_m\} \longrightarrow 0, n \rightarrow \infty$, что вместе с (11) и (15) дает

$$\sigma_n^{-1}S_n \stackrel{d}{\sim} (\sqrt{k}\sigma_m)^{-1} \sum_{j=1}^k X_j \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
3. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
4. Denker M. Uniform integrability and the central limit theorem for strongly mixing processes. — Progr. Probab. Statist., 1986, v. 11, p. 269–274.
5. Гринь А. Г. Области притяжения для последовательностей с перемешиванием. — Сиб. матем. журн., 1990, т. 31, № 1, с. 53–63.
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.

Поступила в редакцию
27.VII.2000

© 2002 г.

ИВЧЕНКО Г. И.*, МЕДВЕДЕВ Ю. И.*

МЕТОД В. Л. ГОНЧАРОВА И ЕГО РАЗВИТИЕ В АНАЛИЗЕ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОДСТАНОВОК

Демонстрируется эффективность метода производящих функций, впервые использованного В. Л. Гончаровым при анализе асимптотических свойств случайных подстановок, в задаче исследования совместных распределений максимальных длин циклов случайной подстановки в модели Эванса. Выводится явный вид соответствующей многомерной плотности Гончарова и ее обобщения.

Ключевые слова и фразы: случайные подстановки и их структура, случайные многочлены над конечными полями, производящие функции, предельные теоремы.

* Московский государственный институт электроники и математики, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, 109028 Москва, Россия.

1. Введение. Распределение Гончарова. Классическая работа В. Л. Гончарова [1] положила начало интенсивному использованию метода производящих функций при исследовании сложных комбинаторных объектов различной природы. В. Л. Гончаров этим методом провел весьма полный анализ асимптотических свойств цикловой структуры случайной равновероятной подстановки степени n при $n \rightarrow \infty$. Одним из наиболее ярких его результатов в этой задаче является вывод предельного распределения длины максимального цикла $\mu(n) = \max\{i: c_i(n) \neq 0\}$, где $c_i(n)$ — число циклов длины i в цикловом представлении подстановки, $i = 1, \dots, n$.

Им впервые получен вид предельной функции распределения $\Phi(x)$ нормированной случайной величины (с.в.) $n^{-1}\mu(n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{n^{-1}\mu(n) \leq x\} = \Phi(x), \quad (1)$$

а также вид соответствующей плотности $\varphi(x) = \Phi'(x)$. Приведем эти выражения, поскольку они будут необходимы нам в последующем. Именно (с некоторыми незначительными изменениями в обозначениях),

$$\Phi(x) = 1 - \sum_{1 \leq k < 1/x} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} J_k(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

где

$$J_k(x) = \int_{A(k,x)} \frac{dt_1 \cdots dt_k}{t_1 \cdots t_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad J_0(x) = 1,$$

и интегрирование проводится по области $A(k, x) = \{t_i \geq x, i = 1, \dots, k, t_1 + \dots + t_k \leq 1\}$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \Phi\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad 0 < x \leq 1.$$

Нетрудно видеть, что представление (2) можно записать следующим образом:

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^s \frac{(-1)^k}{k!} J_k(x) \quad \text{при} \quad x \in \left[\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s}\right], \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (2')$$

так что $\Phi(x) = 1$ при $x \geq 1$, $\Phi(x) = 1 - \ln(1/x)$ при $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, $\Phi(x) = 1 - \ln(1/x) + \frac{1}{2} J_2(x)$ при $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ и т.д. Соответственно этому и плотность $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^k}{k!} J_k\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad \text{при} \quad x \in \left[\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s}\right], \quad s = 1, 2, \dots; \quad (3)$$

в частности,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x} \left(1 - \ln \frac{1-x}{x}\right), & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x} \left(1 - \ln \frac{1-x}{x} + \frac{1}{2} J_2\left(\frac{x}{1-x}\right)\right), & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3}, \text{ и т.д.} \end{cases}$$

Таким образом, функция распределения $\Phi(x)$ и ее плотность $\varphi(x)$ на отрезке $[0, 1]$ задаются с помощью счетного множества выражений.

Необычность структуры этого предельного распределения, его экзотичность вот уже более полувека привлекают к нему внимание специалистов по теории вероятностей. Как оказалось, это распределение возникает в качестве предельного для распределений экстремальных характеристик в различных комбинаторных схемах. На это впервые обратил внимание В. Е. Степанов (1982 г.), который обнаружил, что максимальная степень $\mu'(n)$ неприводимого множителя в каноническом представлении многочлена над полем $GF(2)$, выбираемого с равной вероятностью из множества всех

многочленов степени, меньшей n , при $n \rightarrow \infty$ также удовлетворяет соотношению (1) (с заменой $\mu(n)$ на $\mu'(n)$).

В последующем выяснилось, что этот результат справедлив для случайного многочлена фиксированной степени n над произвольным полем $GF(q)$, $q \geq 2$ (В. Н. Сачков, 1986 г., а также [2], [3], [5], [6]).

Соответствующая литература, посвященная как различным обобщениям приведенного выше результата В. Л. Гончарова, так и его аналогам в других комбинаторных схемах, весьма обширна. Отметим, в частности, работы Шепша и Ллойда [8] (предельное распределение длины m -го максимального цикла случайной n -подстановки); В. Е. Степанова [9] (другой подход к изучению предельного поведения с.в. $\mu(n)$, нежели в [1]); Кингмана [10] и А. М. Вершика и А. А. Шмидта [11] (совместные распределения длин максимальных циклов подстановки); монографию В. Ф. Колчина [12], в которой подробно изложена соответствующая теория экстремумов для подстановок и общих случайных отображений и даны библиографические комментарии к ней, охватывающие период до 1984 г.; работу Хансен [13] (порядковые статистики для общих комбинаторных структур); наконец, недавнюю работу Арратиа, Барбу и Таваре [7], в которой для общих комбинаторных структур, включающих, в частности, модели случайных подстановок и случайных многочленов над конечным полем, получена многомерная локальная предельная теорема для распределения их экстремальных характеристик, которую можно рассматривать как многомерное обобщение результата В. Л. Гончарова. Отметим также разнообразие используемых методов, которые в ряде случаев приводят к разным формам одних и тех же конечных результатов.

В зарубежной литературе для обозначения найденного В. Л. Гончаровым распределения (2)–(3) и связанных с ним более общих распределений (в частности, его многомерного варианта, о чем будет идти речь ниже) используется термин «распределение Пуассона–Дирихле» [7], но, на наш взгляд, было бы более оправданным называть его *распределением Гончарова*.

В настоящей заметке мы хотим не только подчеркнуть приоритет отечественных ученых в данной области, но и еще раз продемонстрировать эффективность метода Гончарова (метода производящих функций), установив этим методом как локальный вариант результата Гончарова (1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP\{\mu(n) = [nx]\} = \varphi(x) = \frac{1}{x} \Phi\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad 0 < x \leq 1, \quad (4)$$

так и соответствующее его многомерное обобщение, а тем самым и явный вид *многомерной плотности Гончарова*. При этом одновременно мы будем рассматривать более общую (неравновероятную) модель случайной подстановки, а именно модель Эванса [14], когда подстановка A из симметрической группы S_n выбирается с вероятностью

$$P(A) = \frac{\theta^{C_A(n)}}{\theta_{(n)}}, \quad (5)$$

где $C_A(n)$ — число циклов подстановки A , $\theta > 0$ — некоторый параметр, $\theta_{(n)} = \theta(\theta+1) \cdots (\theta+n-1)$.

Таким образом, для любой подстановки $A \in S_n$ имеем $P(A) > 0$. При различных θ можно рассматривать различные типы неравновероятных подстановок. При $\theta < 1$ более вероятны подстановки с малым числом циклов, а стало быть, с циклами, как правило, большой длины; при $\theta > 1$ более вероятны подстановки с большим числом циклов; при $\theta = 1$ все подстановки равновероятны. Таким образом, эта схема включает в себя и равновероятный классический случай, рассматривавшийся В. Л. Гончаровым.

2. Производящие функции в модели Эванса. Предварительно напомним (в добавление к сказанному выше), что производящая функция цикловой последовательности $(C_1(n), \dots, C_n(n))$ случайной равновероятной подстановки степени n имеет вид (см. [1])

$$F(t_1, \dots, t_n) = E \prod_{i=1}^n t_i^{C_i(n)} = [z^n] \frac{1}{1-z} \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} (t_i - 1) \right\}, \quad (6)$$

где $[z^n] f(z) = \text{coef}_{z^n} f(z)$, а результату (1) можно придать следующую форму: при $0 < x < 1$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu(n) \leq [nx]\} &= \mathbf{P}\{C_i(n) = 0, i > [nx]\} = F(t_1, \dots, t_n) \Big|_{t_i = \begin{cases} 1, & i \leq [nx] \\ 0, & i > [nx] \end{cases}} \\ &= [z^n] \frac{1}{1-z} \exp \left\{ - \sum_{i > [nx]} \frac{z^i}{i} \right\} \rightarrow \Phi(x). \end{aligned} \quad (7)$$

В модели Эванса (5) все соответствующие характеристики будем снабжать индексом θ , так что $C_{\theta i}(n)$ есть число циклов длины i в цикловом представлении подстановки $A \in S_n$ ($i = 1, \dots, n$), $\mu_{\theta}(n) = \max\{i: C_{\theta i}(n) \neq 0\}$ — длина максимального цикла и т.д. Распределение вероятностей цикловой последовательности $\bar{C}_{\theta}(n) = (C_{\theta 1}(n), \dots, C_{\theta n}(n))$ имеет вид (см. [14])

$$\mathbf{P}\{\bar{C}_{\theta}(n) = (a_1, \dots, a_n)\} = I \left(\sum_{i=1}^n i a_i = n \right) \frac{n!}{\theta(n)} \prod_{i=1}^n \left(\frac{\theta}{i} \right)^{a_i} \frac{1}{a_i!}$$

(здесь и далее $I(A)$ — индикатор события A). Следуя [1], введем производящую функцию

$$F_{\theta}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{E} \prod_{i=1}^n t_i^{C_{\theta i}(n)} = \sum_{\sum i a_i = n} \frac{n!}{\theta(n)} \prod_{i=1}^n \left(\frac{\theta t_i}{i} \right)^{a_i} \frac{1}{a_i!}$$

и легко найдем двойную производящую функцию

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n \theta(n)}{n!} F_{\theta}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(1-z)^{\theta}} \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} (t_i - 1) \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$F_{\theta}(t_1, \dots, t_n) = \frac{n!}{\theta(n)} [z^n] \frac{1}{(1-z)^{\theta}} \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} (t_i - 1) \right\} \quad (8)$$

(при $\theta = 1$ (8) сводится к (6)). Представление (8) может быть основой для исследования различных характеристик цикловой последовательности $\bar{C}_{\theta}(n)$. Например, производящая функция числа циклов $C_{\theta}(n) = \sum_{i=1}^n C_{\theta i}(n)$ есть

$$\mathbf{E} t^{C_{\theta}(n)} = F_{\theta}(t, \dots, t) = \frac{n!}{\theta(n)} [z^n] (1-z)^{-\theta t} = \frac{(\theta t)_{(n)}}{\theta(n)} = t \prod_{i=1}^{n-1} (q_i + p_i t),$$

где $p_i = 1 - q_i = \theta/(\theta + i)$. Отсюда стандартными методами можно получить как интегральный, так и локальный вариант центральной предельной теоремы с оценкой скорости сходимости для $C_{\theta}(n)$ при $\mathbf{D}C_{\theta}(n) \rightarrow \infty$, а также пуассоновской сходимости в схеме серий, т.е. когда $\theta = \theta(n)$ стремится к 0 либо к ∞ и $\mathbf{D}C_{\theta}(n)$ стремится к постоянной, — это осуществлено в [4]. Здесь же мы будем акцентировать внимание на экстремальных характеристиках цикловой последовательности $\bar{C}_{\theta}(n)$, важнейшей из которых является с.в. $\mu_{\theta}(n) \equiv \mu_{\theta 1}(n)$ — номер последнего (или первого с конца) ненулевого члена в последовательности $\bar{C}_{\theta}(n)$. Введем также с.в. $\mu_{\theta 2}(n) = \max\{i < \mu_{\theta 1}(n): C_{\theta i}(n) \neq 0\}$ — номер второго с конца ненулевого члена $\bar{C}_{\theta}(n)$, и т.д., $\mu_{\theta r}(n) = \max\{i < \mu_{\theta, r-1}(n): C_{\theta i}(n) \neq 0\}$ — номер r -го (с конца) ненулевого члена $\bar{C}_{\theta}(n)$. Другими словами, $\mu_{\theta r}(n)$ — это r -й максимальный член последовательности различных длин циклов случайной подстановки, или r -я максимальная цикловая длина, $r = 1, 2, \dots$. Эти характеристики несколько отличаются от традиционно рассматриваемых максимальных порядковых статистик вариационного ряда длин циклов подстановки, когда каждая длина i учитывается $C_{\theta i}(n)$ раз (при $C_{\theta i}(n) > 0$). Однако, как будет ясно из дальнейшего, асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) различие между этими характеристиками нивелируется и фактически $\mu_{\theta r}(n)$ будет

означать длину r -го максимального цикла (для $r = 1$ это всегда так). Для обоснования этого установим один вспомогательный результат.

Рассмотрим хвост $(C_{\theta i}(n), i > b)$ цикловой последовательности $\bar{C}_\theta(n)$ и определим для него избыточность $D_\theta^b(n)$ равенством (ниже $a^+ = \max(0, a)$)

$$D_\theta^b(n) = \sum_{i>b} (C_{\theta i}(n) - I(C_{\theta i}(n) \geq 1)) = \sum_{i>b} (C_{\theta i}(n) - 1)^+.$$

Лемма 1. При $n \rightarrow \infty$ и любом $b = b(n) \rightarrow \infty$ имеем $D_\theta^b(n) \xrightarrow{P} 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathbf{E} D_\theta^b(n) \rightarrow 0$. Предварительно заметим, что $(C_{\theta i}(n) - 1)^+ = 0$ при $i > n/2$, так как может быть лишь один цикл длины, большей $n/2$. Поэтому достаточно рассматривать значения $i \leq n/2$. Из (8) следует, что производящая функция $C_{\theta i}(n)$ имеет вид

$$F_{\theta i}(t) = \mathbf{E} t^{C_{\theta i}(n)} = \frac{n!}{\theta_{(n)}} [z^n] \frac{1}{(1-z)^\theta} \exp \left\{ \theta(t-1) \frac{z^i}{i} \right\}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta i}(n) &= \mathbf{E} (C_{\theta i}(n) - 1)^+ = \sum_{r \geq 2} (r-1) \mathbf{P}\{C_{\theta i}(n) = r\} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{r \geq 2} r(r-1) \mathbf{P}\{C_{\theta i}(n) = r\} \\ &= \frac{1}{2} F_{\theta i}''(1) = \frac{\theta^2}{2i^2} \frac{n!}{\theta_{(n)}} [z^{n-2i}] (1-z)^{-\theta} = \frac{\theta^2}{2i^2} \frac{n! \theta_{(n-2i)}}{(n-2i)! \theta_{(n)}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее мы неоднократно будем использовать следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{n! \theta_{(n-r)}}{(n-r)! \theta_{(n)}} &= \frac{(n-r+1) \cdots (n-1) n}{(n-r+\theta) \cdots (n-2+\theta)(n-1+\theta)} \\ &= \frac{n! \Gamma(n-r+\theta)}{(n-r)! \Gamma(n+\theta)} \begin{cases} \leq 1 & \text{при } \theta \geq 1, \\ < \frac{n}{\theta} & \text{при } \theta < 1, \\ \sim \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{\theta-1} \leq 1 & \text{при } n-r \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь если $\theta \geq 1$, то из (9) и (10) находим, что $\Delta_{\theta i}(n) = O(1/i^2)$, следовательно, $\mathbf{E} D_\theta^b(n) \rightarrow 0$. Если же $\theta < 1$, то, воспользовавшись при $i \leq (1-\varepsilon)n/2$, $\varepsilon > 0$, асимптотикой в (10), также получим для (9) оценку $O(1/i^2)$. В диапазоне же $(1-\varepsilon)n/2 < i < n/2 - l_n$, где $l_n \rightarrow \infty$ как угодно медленно, справедлива оценка

$$\frac{1}{i^2} \left(1 - \frac{2i}{n}\right)^{\theta-1} < \frac{4}{(1-\varepsilon)^2 n^2} \left(\frac{n}{2l_n}\right)^{1-\theta},$$

поэтому сумма по всем таким i величин $\Delta_{\theta i}(n)$ даст $O(1/(n^\theta l_n^{1-\theta}))$. Наконец, для диапазона $n/2 - l_n \leq i \leq n/2$, воспользовавшись оценкой в (10) при $\theta < 1$, находим, что сумма соответствующих величин $\Delta_{\theta i}(n)$ есть $O(l_n/n)$. В итоге получаем, что $\mathbf{E} D_\theta^b(n) \rightarrow 0$ и при $\theta < 1$. Лемма 1 доказана.

Так как $I(C_{\theta i}(n) \geq 2) \leq C_{\theta i}(n) - I(C_{\theta i}(n) \geq 1)$, то $\sum_{i>b} I(C_{\theta i}(n) \geq 2) \leq D_\theta^b(n)$, и лемма 1 говорит о том, что при $n \rightarrow \infty$ далекие хвосты последовательности $\bar{C}_\theta(n)$ с вероятностью, стремящейся к 1, будут состоять лишь из 0 и 1. Следовательно, события вида $\{C_{\theta i}(n) > 0 \exists i > b\}$ и $\{C_{\theta i}(n) = 1 \exists i > b\}$ при $n \rightarrow \infty$ и $b = b(n) \rightarrow \infty$ будут асимптотически эквиваленты, и потому максимальные циклы подстановки с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, будут иметь различные длины.

Обращаясь теперь к вопросу об асимптотическом (при $n \rightarrow \infty$) поведении введенных выше экстремальных характеристик $\mu_{\theta i}(n)$, $i = 1, 2, \dots$, отметим предварительно, что, как и в (7), из (8) следует, что для с.в. $\mu_{\theta 1}(n)$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_{\theta 1}(n) \leq s\} &= \mathbf{P}\{C_{\theta i}(n) = 0, i > s\} = F_{\theta}(t_1, \dots, t_n) \Big|_{t_i = \begin{cases} 1, & i \leq s \\ 0, & i > s \end{cases}} \\ &= \frac{n!}{\theta(n)} [z^n] \frac{1}{(1-z)^{\theta}} \exp \left\{ -\theta \sum_{i>s} \frac{z^i}{i} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда теми же рассуждениями, что в [1], можно получить вид предельного распределения $\mu_{\theta 1}(n)$. Однако мы не будем буквально повторять этот путь, а несколько изменим ход рассуждений, который позволит нам получить вид предельного распределения сразу для $\mu_{\theta r}(n)$ при произвольном $r \geq 1$. Для этого мы введем с.в. $\zeta_{\theta}^b(n) = \sum_{i>b} I(C_{\theta i}(n) \geq 1)$, равную числу положительных членов последовательности $(C_{\theta i}(n), i > b)$, и установим для нее следующий, представляющий и самостоятельный интерес, результат.

Лемма 2. При $n \rightarrow \infty$ и $b \sim xn$, $0 < x < 1$, случайная величина $\zeta_{\theta}^b(n)$ имеет предельное распределение, задаваемое производящей функцией

$$P_{\theta x}(t) = 1 + \sum_{1 \leq k < 1/x} \frac{(\theta(t-1))^k}{k!} J_{\theta k}(x), \quad (12)$$

где

$$J_{\theta k}(x) = \int_{A(k,x)} (1-t_1-\dots-t_k)^{\theta-1} \frac{dt_1 \cdots dt_k}{t_1 \cdots t_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$A(k, x)$ — то же, что в (2).

Доказательство. Из леммы 1 следует, что при рассматриваемых условиях $\zeta_{\theta}^b(n)$ асимптотически совпадает с числом $C_{\theta}^b(n) = \sum_{i>b} C_{\theta i}(n)$ циклов с длинами, большими b , для производящей функции которого из (8) при $t_i = 1, i \leq b, t_i = t, i > b$, получаем представление

$$\begin{aligned} \mathbf{E} t^{C_{\theta}^b(n)} &= \frac{n!}{\theta(n)} [z^n] \frac{1}{(1-z)^{\theta}} \exp \left\{ \theta(t-1) \sum_{i>b} \frac{z^i}{i} \right\} \\ &= \frac{n!}{\theta(n)} [z^n] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\theta(l)}{l!} z^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta(t-1))^k}{k!} \left(\sum_{i>b} \frac{z^i}{i} \right)^k \\ &= 1 + \sum_{1 \leq k < n/b} \frac{(\theta(t-1))^k}{k!} S_{\theta k}(b, n), \end{aligned}$$

где

$$S_{\theta k}(b, n) = \sum_{r=(b+1)k} \frac{n! \theta_{(n-r)}}{(n-r)! \theta(n)} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=r \\ i_1, \dots, i_k > b}} \frac{1}{i_1 \cdots i_k}.$$

Далее, как и в [1] для случая $\theta = 1$, устанавливаем, что в условиях леммы (с учетом асимптотики в (10)) для чисел $S_{\theta k}(b, n)$ справедливы соотношения

$$S_{\theta k}(b, n) \sim \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k \leq n \\ i_1, \dots, i_k > b}} \left(1 - \frac{i_1 + \dots + i_k}{n} \right)^{\theta-1} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} \sim J_{\theta k}(x),$$

откуда и следует значение предела (12) для $\mathbf{E} t^{C_{\theta}^b(n)}$, а следовательно, и для $\mathbf{E} t^{\zeta_{\theta}^b(n)}$. Лемма 2 доказана.

Дополним эту лемму некоторыми комментариями. Функция $P_{\theta x}(t)$ является многочленом степени $[1/x]$, тем самым с.в. $\zeta_{\theta}^b(n)$ асимптотически принимает лишь значения $0, 1, \dots, [1/x]$. В частности, при $x > \frac{1}{2}$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{\theta}^b(n) = 1\} \sim 1 - \mathbf{P}\{\zeta_{\theta}^b(n) = 0\} \sim \theta J_{\theta 1}(x) = \theta \int_x^1 (1-t)^{\theta-1} \frac{dt}{t}.$$

Это соответствует тому, что в подстановке степени n может быть лишь один цикл длины, большей $n/2$, т.е. $\zeta_{\theta}^{n/2}(n) \leq 1$.

Далее, среднее значение предельного распределения есть $P'_{\theta x}(1) = \theta J_{\theta 1}(x)$, и нетрудно убедиться, что оно совпадает с предельным значением $\mathbf{E} \zeta_{\theta}^b(n)$.

Наконец, формула для соответствующих вероятностей имеет вид

$$\mathbf{P}\{\zeta_{\theta}^b(n) < m\} \rightarrow \Phi_{\theta m}(x) = 1 - \sum_{m \leq k < 1/x} \frac{(-1)^{k-m} \theta^k}{k(m-1)!(k-m)!} J_{\theta k}(x), \quad m \geq 1; \quad (13)$$

в частности,

$$\mathbf{P}\{\zeta_{\theta}^b(n) = 0\} \rightarrow \Phi_{\theta 1}(x) = 1 - \sum_{1 \leq k < 1/x} \frac{(-1)^{k-1} \theta^k}{k!} J_{\theta k}(x) = \sum_{k=0}^s \frac{(-\theta)^k}{k!} J_{\theta k}(x), \quad (14)$$

$$x \in \left[\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s} \right], \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

где $J_{\theta 0}(x) \equiv 1$.

3. Предельные распределения максимальных длин циклов. Имеет место следующая очевидная связь между m -й максимальной цикловой длиной $\mu_{\theta m}(n)$ и с.в. $\zeta_{\theta}^b(n)$:

$$\mathbf{P}\{\mu_{\theta m}(n) \leq b\} = \mathbf{P}\{\zeta_{\theta}^b(n) < m\},$$

в то время как для длины m -го максимального цикла $\tilde{\mu}_{\theta m}(n)$ аналогичное соотношение имеет вид

$$\mathbf{P}\{\tilde{\mu}_{\theta m}(n) \leq b\} = \mathbf{P}\{C_{\theta}^b(n) < m\}.$$

Но в условиях леммы 2 обе с.в. $\zeta_{\theta}^b(n)$ и $C_{\theta}^b(n)$ имеют одно и то же предельное распределение (13), поэтому m -е экстремумы $\mu_{\theta m}(n)$ и $\tilde{\mu}_{\theta m}(n)$ также будут иметь одинаковые предельные распределения.

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $m \geq 1$

$$\mathbf{P}\{n^{-1} \mu_{\theta m}(n) \leq x\} \rightarrow \begin{cases} \Phi_{\theta m}(x), & 0 < x < m^{-1}, \\ 1, & x \geq m^{-1}. \end{cases} \quad (15)$$

Результат (15) является обобщением (1) сразу в двух направлениях: рассматриваются произвольное $m \geq 1$ и произвольное $\theta > 0$ (при $m = \theta = 1$ (15) сводится к (1)), и, подчеркнем, этот результат получен тем же методом, что и (1).

На этом же пути можно получить и соответствующую локальную предельную теорему, причем метод производящих функций позволяет без особого труда установить сразу ее многомерный вариант.

Теорема 2. Пусть $r \geq 1$ и $0 < x_r < x_{r-1} < \dots < x_1 < 1$ таковы, что $0 < x_1 + \dots + x_r < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^r \mathbf{P}\{\mu_{\theta j}(n) = [nx_j], j = 1, \dots, r\} &= \varphi_{\theta}^{(r)}(x_1, \dots, x_r) \\ &= \frac{\theta^r (1 - x_1 - \dots - x_r)^{\theta-1}}{x_1 \dots x_r} \Phi_{\theta 1} \left(\frac{x_r}{1 - x_1 - \dots - x_r} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Доказательство. Для любых целых $s_1, \dots, s_r$, удовлетворяющих условиям $1 \leq s_r < s_{r-1} < \dots < s_1 \leq n$, $s \equiv s_1 + \dots + s_r \leq n$, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_{\theta j}(n) = s_j, j = 1, \dots, r\} \\ = \mathbf{P}\{C_{\theta s_j}(n) > 0, j = 1, \dots, r; C_{\theta i}(n) = 0, s_r < i \neq s_{r-1}, \dots, s_1\}. \end{aligned}$$

Как следует из леммы 1, событие $\{C_{\theta s_j}(n) > 0, j = 1, \dots, r\}$ при $n \rightarrow \infty$ и $s_r = s_r(n) \rightarrow \infty$ асимптотически эквивалентно событию $\{C_{\theta s_j}(n) = 1, j = 1, \dots, r\}$, поэтому достаточно оценить вероятность события

$$B_n = \{C_{\theta s_j}(n) = 1, j = 1, \dots, r; C_{\theta i}(n) = 0, s_r < i \neq s_{r-1}, \dots, s_1\}.$$

Из (8) находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_n) &= \left. \frac{\partial^r F_\theta(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_{s_1} \dots \partial t_{s_r}} \right|_{t_i = \begin{cases} 1, & i < s_r \\ 0, & i \geq s_r \end{cases}} \\ &= \frac{\theta^r}{s_1 \dots s_r} \frac{n!}{\theta_{(n)}} [z^n] \frac{1}{(1-z)^\theta} \exp \left\{ -\theta \sum_{i \geq s_r} \frac{z^i}{i} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим теперь, что по аналогии с (7) результату (15) при $m = 1$ с учетом (11) можно придать форму

$$\mathbf{P}\{\mu_{\theta 1}(n) \leq [nx]\} = \frac{n!}{\theta_{(n)}} [z^n] \frac{1}{(1-z)^\theta} \exp \left\{ -\theta \sum_{i > [nx]} \frac{z^i}{i} \right\} \rightarrow \Phi_{\theta 1}(x), \quad (18)$$

поэтому (17) можно записать также в виде

$$\mathbf{P}(B_n) = \frac{\theta^r}{s_1 \dots s_r} \frac{n! \theta_{(n-s)}}{(n-s)! \theta_{(n)}} \mathbf{P}\{\mu_{\theta 1}(n-s) < s_r\}.$$

Здесь в условиях теоремы при $s_j = [nx_j]$, $j = 1, \dots, r$, третий множитель в силу (18) имеет предел $\Phi_{\theta 1}(x_r/(1-x_1-\dots-x_r))$, второй множитель имеет предел $(1-x_1-\dots-x_r)^{\theta-1}$ (см. (10)), первый же множитель асимптотически эквивалентен $\theta^r/(n^r x_1 \dots x_r)$, что в итоге дает (16). Теорема 2 доказана.

При $r = 1$ из (16) получаем утверждение о локальной сходимости для длины максимального цикла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{P}\{\mu_{\theta 1}(n) = [nx]\} = \varphi_\theta(x) \equiv \frac{\theta}{x} (1-x)^{\theta-1} \Phi_{\theta 1}\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad 0 < x < 1$$

(при $\theta = 1$ это есть локальный вариант результата Гончарова (1)). Явный вид одномерной плотности $\varphi_\theta(x)$ следует из представления (14) для $\Phi_{\theta 1}$:

$$\varphi_\theta(x) = \frac{\theta}{x} (1-x)^{\theta-1} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-\theta)^k}{k!} J_{\theta k}\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad x \in \left[\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s}\right], \quad s = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

что сводится к (3) при $\theta = 1$. Поэтому $\varphi_\theta(x)$ может быть названа *обобщенной плотностью Гончарова*, а функция $\varphi_\theta^{(r)}(x_1, \dots, x_r)$ в (16) — *многомерной (r-мерной) обобщенной плотностью Гончарова*.

В заключение отметим, что теорема 2 доказана также в [7] другим методом, в основе которого лежит представление

$$\mathcal{L}(\overline{C}_\theta(n)) = \mathcal{L}\left(Z_1, \dots, Z_n \left| \sum_{i=1}^n i Z_i = n \right.\right),$$

где $(Z_i, i \geq 1)$ — независимые с.в. и Z_i имеет распределение Пуассона со средним θ/i . Возникающее в этой теореме предельное распределение называется в [7] распределением Пуассона–Дирихле, а предельная плотность $\varphi_\theta^{(r)}(x_1, \dots, x_r)$ (в наших обозначениях) получена в виде

$$\frac{e^{\gamma\theta} \theta^r \Gamma(\theta) x_r^{\theta-1}}{x_1 \cdots x_r} g_\theta \left(\frac{1 - x_1 - \cdots - x_r}{x_r} \right), \quad (20)$$

где γ — константа Эйлера, а функция $g_\theta(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x g_\theta(x) = \theta \int_{x-1}^x g_\theta(u) du, \quad x > 0,$$

и $g_\theta(x) = 0$ при $x < 0$; в частности,

$$g_\theta(x) = \frac{e^{-\gamma\theta} x^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)}, \quad 0 < x \leq 1,$$

следовательно, при $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ предельная плотность (20) для $r = 1$ есть $\theta(1-x)^{\theta-1}/x$, что соответствует (19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1944, т. 8, № 1, с. 3–48.
2. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Случайные многочлены над конечным полем. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 204–210.
3. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. О структуре случайных многочленов над конечными полями. — Труды по дискретной математике. Т. 3. М.: Физматлит, 2000, с. 111–138.
4. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. О случайных подстановках. — Труды по дискретной математике. Т. 4. М.: Физматлит, 2001, с. 71–82.
5. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Экстремальные характеристики случайного многочлена над конечным полем. — Труды по дискретной математике. Т. 5. М.: Физматлит, 2002 (в печати).
6. Arratia R., Barbour A. D., Tavaré S. On random polynomials over finite fields. — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1993, v. 114, № 2, p. 347–368.
7. Arratia R., Barbour A. D., Tavaré S. On Poisson–Dirichlet limits for random decomposable combinatorial structures. — Combin. Probab. Comput., 1999, v. 8, № 3, p. 193–208.
8. Shepp L. A., Lloyd S. P. Ordered cycle lengths in a random permutation. — Trans. Amer. Math. Soc., 1966, v. 121, № 2, p. 340–357.
9. Степанов В. Е. Предельные распределения некоторых характеристик случайных отображений. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, в. 4, с. 639–653.
10. Kingman J. F. C. The population structure associated with the Ewens sampling formula. — Theoret. Population Biol., 1977, v. 11, p. 274–283.
11. Вершик А. М., Шмидт А. А. Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 1, с. 72–88.
12. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 206 с.
13. Hansen J. C. Order statistics for decomposable combinatorial structures. — Random Structures Algorithms, 1994, v. 5, № 4, p. 517–533.
14. Ewens W. J. The sampling theory of selectively neutral alleles. — Theoret. Population Biol., 1972, v. 3, p. 87–112.

Поступила в редакцию
1.X.2001