Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ш. Липцер, Р. З. Хасьминский, Слежение за гладкой функцией регрессии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 3, 567–575

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:57:17

© 2002 г.

ЛИПЦЕР Р.*, ХАСЬМИНСКИЙ Р.**

СЛЕЖЕНИЕ ЗА ГЛАДКОЙ ФУНКЦИЕЙ РЕГРЕССИИ¹⁾

Предлагается последовательная оценка функции регрессии при равноотстоящих наблюдениях, обладающая следующим свойством: после неизбежного переходного режима эта оценка имеет оптимальную скорость сходимости квадратичного риска к нулю при размере выборки, стремящемся к бесконечности.

Ключевые слова и фразы: непараметрическое оценивание, регрессия, эквидистантный дизайн, пограничный слой, рекуррентная оценка.

1. Введение. Пусть (t, X) — пара случайных величин, $t \in [0, 1]$, $X \in \mathbf{R}^1$, и $f(t) = \mathbf{E}(X|t)$ — функция регрессии. Хорошо известны два подхода к оцениванию $f(t)$. При первом подходе (*случайный дизайн*) статистик оценивает функцию $f(t)$ по выборке $(t_1, X_1), \dots, (t_n, X_n)$, где $(t_1, X_1), \dots, (t_n, X_n)$ — независимые копии (t, X) , в то время как при втором подходе (*эквидистантный дизайн*) статистик имеет m независимых «измерений» $X_{i1}, \dots, X_{im}$ для каждого $t_{in} = i/[n^\gamma]$, $i = 1, 2, \dots, [n^\gamma]$; $m = n/[n^\gamma]$, $0 < \gamma \leq 1$, и при этом

$$\mathbf{P}\{X_{ij} \in A \mid t = t_{in}\} = \mathbf{P}\{X \in A \mid t = t_{in}\}.$$

При *непараметрическом* оценивании предполагается, что функция f принадлежит некоторому классу функций Σ , который невозможно описать с помощью конечного набора параметров. Следуя [9], [10], [4] и [5], в этой статье мы выбираем класс

$$\Sigma(\beta, L) = f \left\{ \begin{array}{l} k \text{ раз дифференцируема;} \\ |f^{(k)}(t_2) - f^{(k)}(t_1)| \leq L|t_2 - t_1|^\alpha, \quad \forall t_1, t_2 \text{ и } \alpha \in (0, 1]; \\ \beta = k + \alpha. \end{array} \right.$$

Из упомянутых выше работ известно, что для обоих подходов существуют оценки $\widehat{f}_n^{(j)}(t)$, $j = 0, 1, \dots, k$, обладающие для широкого класса функций потерь $\mathcal{L}(\cdot)$ следующим свойством:

$$\sup_{f \in \Sigma(\beta, L)} \mathbf{E} \mathcal{L} \left(n^{(\beta-j)/(2\beta+1)} \|\widehat{f}_n^{(j)} - f^{(j)}\|_{L_p} \right) < C, \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (1)$$

(здесь C — положительная константа), и не существует оценки с лучшей скоростью сходимости к нулю по $n \rightarrow \infty$ риска оценивания равномерно по классу $\Sigma(\beta, L)$. Также известно, что для квадратичного риска $\mathbf{E}(\widehat{f}_n^{(j)}(t) - f^{(j)}(t))^2$ при фиксированном t имеет место та же скорость по n и эту скорость нельзя улучшить равномерно для любого непустого открытого множества из $(0, 1)$. В этой статье мы исследуем задачу слежения за функцией f , или, иначе, задачу фильтрации. Чтобы пояснить наш метод, упомянем родственную задачу о слежении за сигналом $f(t)$, наблюдаемым в аддитивном гауссовском белом шуме малой интенсивности (см. [2]), в том случае, когда наблюдения описываются процессом Ито (относительно винеровского процесса W_t)

$$X_t^\varepsilon = \int_0^t f(s) ds + \varepsilon W_t, \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

* Electrical Engineering Systems, Tel Aviv University, 69978 Ramat. Aviv, Tel Aviv, Israel; e-mail: liptser@eng.tau.ac.il

** Department of Mathematics, Wayne State University, Detroit MI, 48202 USA; e-mail: rafail@math.wayne.edu

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке NSF (Grant DMS 9971608).

где ε — малый параметр. Для $f \in \Sigma(\beta, L)$ в [2] был предложен фильтр для слежения за $f(t) = f^{(0)}(t)$ и $f^{(j)}(t)$, $j = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned} df^{(j)}(t) &= f^{(j+1)}(t) dt + \frac{q_j}{\varepsilon^{2(j+1)/(2\beta+1)}} \left(dX_t^\varepsilon - \widehat{f^{(0)}}(t) dt \right), \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \\ df^{(k)}(t) &= \frac{q_k}{\varepsilon^{2(k+1)/(2\beta+1)}} \left(dX_t^\varepsilon - \widehat{f^{(0)}}(t) dt \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $q_0, \dots, q_k$ выбраны такими, что все корни полинома

$$p^k(u) = u^{k+1} + q_0 u^k + q_1 u^{k-1} + \dots + q_{k-1} u + q_k \quad (4)$$

имеют отрицательные действительные части. Вне пограничного слоя $[0, \Delta^\varepsilon]$ качество фильтра характеризуется оптимальной в минимаксном смысле скоростью сходимости по $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. с (1)):

$$\frac{\mathbf{E}(f^{(j)}(t) - \widehat{f^{(j)}}(t))^2}{\varepsilon^{4(\beta-j)/(2\beta+1)}} < C, \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (5)$$

В этой статье мы рассматриваем более естественную (с точки зрения приложений) модель наблюдений: при $t_{in} = i/n$, $i = 0, \dots, n$,

$$X_{in} = f(t_{in}) + \sigma(t_{in}) \xi_{in}, \quad (6)$$

где $(\xi_{in})_{i \leq n}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{E}\xi_{in} \equiv 0$, $\mathbf{E}\xi_{in}^2 = 1$ и $\sigma^2(t_{in}) < C$. Для $f \in \Sigma(\beta, L)$ из [1] и [3] известно, что регрессионная оценка по наблюдениям (6) асимптотически эквивалентна, в смысле Ле Кама [6], оценке f для модели (2) (при гауссовском шуме в [1] и при произвольном шуме в [3]). В свете результатов [1] и [3] естественно предположить, что подходящий фильтр для дискретного времени может быть взят по образу и подобию фильтра (3) (здесь и далее ради простоты обозначений пишем t_i вместо t_{in}):

$$\begin{aligned} \widehat{f_n^{(j)}}(t_i) &= \widehat{f_n^{(j)}}(t_{i-1}) + \frac{1}{n} \widehat{f_n^{(j+1)}}(t_{i-1}) + \frac{q_j}{n^{(2\beta-j)/(2\beta+1)}} \left(X_i - \widehat{f_n^{(0)}}(t_{i-1}) \right), \\ j &= 0, 1, \dots, k-1, \\ \widehat{f_n^{(k)}}(t_i) &= \widehat{f_n^{(k)}}(t_{i-1}) + \frac{q_k}{n^{(2\beta-k)/(2\beta+1)}} \left(X_i - \widehat{f_n^{(0)}}(t_{i-1}) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\widehat{f_n^{(0)}}(0), \widehat{f_n^{(1)}}(0), \dots, \widehat{f_n^{(k)}}(0)$ — произвольные начальные условия.

Важным и полезным для многих приложений преимуществом этой оценки является тот факт, что оценка для $f(t_{i+1})$ является малой поправкой оценки для $f(t_i)$, основанной на вновь поступившем наблюдении. Таким образом, оценка (7) является рекуррентной и, следовательно, легче реализуется по сравнению с проекционной оценкой Ченцова (см., например, [5]) или ядерными оценками (см. [8], [7]).

Основной целью этой статьи является результат, утверждающий, что вне пограничного слоя объема $Cn^{-1/(2\beta+1)} \ln n$ оценки, определяемые фильтром (7), обладают наилучшим порядком скорости сходимости к нулю при $n \rightarrow \infty$ среднеквадратической ошибки фильтрации.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 формулируются основные результаты. Раздел 3 содержит некоторые вспомогательные сведения и результаты. Верхние границы для нормированных смещений и дисперсий даны в разделах 4 и 5. Заключительная часть доказательства основного результата приведена в разделе 6.

2. Свойства оценки (7).

2.1. Общая константа. Все результаты этой статьи имеют асимптотический характер относительно большого параметра n . В связи с этим все не зависящие от n положительные константы обозначаются единой буквой C .

2.2. Формулировка основных результатов.

Теорема 1. Пусть $q_0, \dots, q_k$ выбраны такими, что все корни полинома (4) различны и имеют отрицательные действительные части. Пусть рассматривается модель (6), $f \in \Sigma(\beta, L)$ и $\sigma^2(t) < C$. Тогда фильтр (7) с произвольными ограниченными начальными условиями $\widehat{f}_n^{(0)}(0), \widehat{f}_n^{(1)}(0), \dots, \widehat{f}_n^{(k)}(0)$ обеспечивает следующие свойства оценок: для $t_\ell > Cn^{-1/(2\beta+1)} \ln n$

$$\sup_{f \in \Sigma(\beta, L)} \sum_{j=0}^k \mathbf{E} \left(\widehat{f}_n^{(j)}(t_\ell) - f^{(j)}(t_\ell) \right)^2 n^{2(\beta-j)/(2\beta+1)} \leq C. \quad (8)$$

Всюду ниже мы будем предполагать, что условия теоремы 1 выполнены.

З а м е ч а н и е 1. Как отмечалось во введении, скорость сходимости рисков к нулю при $n \rightarrow \infty$ в (8) неулучшаема. С другой стороны, пограничный слой порядка $n^{-1/(2\beta+1)}$, где эта скорость не соответствует оптимальной, неизбежен. Более точно, справедливо следующее утверждение, полностью повторяющее лемму 5.1 из [2].

Утверждение 1. Пусть X_{in} определено в (6), $f \in \Sigma(\beta, L)$ и $t_{in} \in \Delta_n$, где

$$\Delta_n = [0, \psi(n)n^{-1/(2\beta+1)}], \quad \psi(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда для любой оценки $\{\widehat{f}_n^{(0)}(t_{in}), \widehat{f}_n^{(1)}(t_{in}), \dots, \widehat{f}_n^{(k)}(t_{in})\}$ и любого $\delta > 0$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \Sigma(\beta, L)} \mathbf{P} \left\{ \left| \widehat{f}_n^{(j)}(t_{in}) - f^{(j)}(t_{in}) \right| n^{(\beta-j)/(2\beta+1)} > \delta (\psi(n))^{-(\beta-j)/(2\beta)} \right\} > 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Оценки, определяемые в (7), можно использовать для слежения за функцией $f(t)$ и ее производными при всех t вне пограничного слоя. Например, можно взять $\widehat{f}_n^{(j)}(t) := \widehat{f}_n^{(j)}(t_\ell)$ для $t_\ell \leq t < t_{\ell+1}$. Этот выбор оправдывается тем, что f является гладкой функцией и поэтому скорость сходимости при $n \rightarrow \infty$ для такой оценки наилучшая для всех t вне пограничного слоя, т.е. дополнительная интерполяция или полиномиальная тейлоровская аппроксимация не могут ее улучшить. Не является проблемой и использование этой оценки для экстраполяции, когда наблюдения производятся только в моменты времени $t_{in} \leq t_\ell = t$ и требуется оценить значение $f(t_\ell + h)$, $h > 0$. Верхняя граница (8) позволяет утверждать, что оценка $\widehat{f}_n^{(0)}(t_\ell + h) = \sum_{j=0}^k (h^j/j!) \widehat{f}_n^{(j)}(t_\ell)$ имеет скорость сходимости $(\max\{h, n^{-1/(2\beta+1)}\})^\beta$ в том смысле, что

$$\mathbf{E} \left(\frac{\widehat{f}_n(t_\ell + h) - f(t_\ell + h)}{(\max\{h, n^{-1/(2\beta+1)}\})^\beta} \right)^2 < C,$$

и эта скорость также неулучшаема.

3. Обозначения и векторная форма для системы (7). Везде далее $\|x\|$ обозначает евклидову норму вектора x , а $\|A\|$ — норму матрицы A . Для упрощения обозначений перепишем оценку (7) в матрично-векторной форме

$$\widehat{F}^n(t_i) = \widehat{F}^n(t_{i-1}) + \frac{1}{n} a \widehat{F}^n(t_{i-1}) + q_n (X_i - \widehat{f}_n^{(0)}(t_{i-1})) \quad (9)$$

с детерминированным начальным условием — вектором $\widehat{F}^n(0)$. В (9)

$$\widehat{F}^n(t_i) = \begin{pmatrix} \widehat{f}_n^{(0)}(t_i) \\ \widehat{f}_n^{(1)}(t_i) \\ \vdots \\ \widehat{f}_n^{(k)}(t_i) \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad q_n = \begin{pmatrix} q_0 n^{-2\beta/(2\beta+1)} \\ q_1 n^{-(2\beta-1)/(2\beta+1)} \\ \vdots \\ q_{k-1} n^{-(2\beta-(k-1))/(2\beta+1)} \\ q_k n^{-(2\beta-k)/(2\beta+1)} \end{pmatrix}$$

и все матрицы и векторы имеют размеры $(k+1) \times (k+1)$ и $k+1$ соответственно.

Введем также используемые в дальнейшем матрицу и векторы

$$Q_n = \begin{pmatrix} q_0 n^{-2\beta/(2\beta+1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1 n^{-(2\beta-1)/(2\beta+1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k-1} n^{-(2\beta-(k-1))/(2\beta+1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_k n^{-(2\beta-k)/(2\beta+1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}, \quad F(t_i) = \begin{pmatrix} f^{(0)}(t_i) \\ f^{(1)}(t_i) \\ \vdots \\ f^{(k)}(t_i) \end{pmatrix}.$$

4. Верхняя граница для смещения.

4.1. Предварительные результаты. Обозначим $M^n(t_i) = \widehat{\mathbf{E}} F^n(t_i)$. Беря математическое ожидание от обеих частей (9), получаем (здесь I — единичная матрица размера $(k+1) \times (k+1)$):

$$M^n(t_i) = \left(I + \frac{1}{n} a \right) M^n(t_{i-1}) + Q_n (F(t_i) - M^n(t_{i-1})) \quad (10)$$

$$= B_n M^n(t_{i-1}) + Q_n F(t_i), \quad (11)$$

где $M^n(0) = \widehat{F}^n(0)$ и $B_n = (I + (1/n) a - Q_n)$. Заметим также, что

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 - q_0 n^{-2\beta/(2\beta+1)} & n^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -q_1 n^{-(2\beta-1)/(2\beta+1)} & 1 & n^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -q_{k-1} n^{-(2\beta-(k-1))/(2\beta+1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n^{-1} \\ -q_k n^{-(2\beta-k)/(2\beta+1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тождество

$$\begin{aligned} M^n(t_i) - F(t_i) &= M^n(t_{i-1}) - F(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - F(t_i) + \frac{1}{n} a F(t_{i-1}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{n} a (M^n(t_{i-1}) - F(t_{i-1})) + Q_n (F(t_i) - F(t_{i-1}) + F(t_{i-1}) - M^n(t_{i-1})), \end{aligned}$$

вытекающее из (10), позволяет вывести следующее рекуррентное уравнение для $\Delta_i = M^n(t_i) - F(t_i)$:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \left(I - Q_n + \frac{1}{n} a \right) \Delta_{i-1} + \left(F(t_{i-1}) - F(t_i) + \frac{1}{n} a F(t_{i-1}) \right) \\ &\quad + Q_n (F(t_i) - F(t_{i-1})). \end{aligned} \quad (12)$$

Введем теперь матрицу (размера $(k+1) \times (k+1)$)

$$C_n = \begin{pmatrix} n^{\beta/(2\beta+1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n^{(\beta-1)/(2\beta+1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n^{(\beta-(k-1))/(2\beta+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n^{(\beta-k)/(2\beta+1)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

и вектор нормированных смещений

$$\delta_i = C_n \Delta_i. \quad (14)$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} C_n Q_n &= n^{-\beta/(2\beta+1)} \begin{pmatrix} q_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} := n^{-\beta/(2\beta+1)} Q, \\ Q C_n^{-1} &= n^{-\beta/(2\beta+1)} Q, \quad C_n a = n^{1/(2\beta+1)} a C_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Для удобства обозначений введем также матрицу

$$D_n = I - n^{-2\beta/(2\beta+1)} Q + n^{-2\beta/(2\beta+1)} a \quad (16)$$

и вектор (размера $k+1$) $b = (0, \dots, 0, 1)^*$, где $*$ — символ транспонирования. Тогда, с учетом (12) и (15), мы приходим к рекуррентному уравнению

$$\delta_i = D_n \delta_{i-1} + C_n \left(F(t_{i-1}) - F(t_i) + \frac{1}{n} a F(t_{i-1}) \right) + n^{-\beta/(2\beta+1)} Q \left(F(t_i) - F(t_{i-1}) \right) \quad (17)$$

с начальным условием $\delta_0 = C_n (\hat{F}(0) - F(0))$. Для упрощения последующего анализа мы вводим разложение $\delta_i \equiv \sum_{p=1}^4 \delta_i^p$, где

$$\begin{aligned} \delta_i^1 &= D_n \delta_{i-1}^1, \quad \delta_i^2 = D_n \delta_{i-1}^2 + n^{-\beta/(2\beta+1)} Q \left(F(t_i) - F(t_{i-1}) \right), \\ \delta_i^3 &= D_n \delta_{i-1}^3 + C_n \left(F(t_{i-1}) - F(t_i) + \frac{1}{n} a F(t_{i-1}) - b \left(f^{(k)}(t_{i-1}) - f^{(k)}(t_i) \right) \right), \\ \delta_i^4 &= D_n \delta_{i-1}^4 + C_n b \left(f^{(k)}(t_{i-1}) - f^{(k)}(t_i) \right), \end{aligned}$$

и

$$\delta_0^1 = C_n (\hat{F}(0) - F(0)), \quad \delta^2(0) = 0, \quad \delta^3(0) = 0, \quad \delta^4(0) = 0. \quad (18)$$

Далее, положим

$$\gamma = \frac{2\beta}{2\beta+1} \quad (19)$$

и

$$c_0 = -\frac{1}{2} \max_{j=1, \dots, k+1} \operatorname{Re} u_j, \quad (20)$$

где $u_j = \operatorname{Re} u_j + \sqrt{-1} \operatorname{Im} u_j$, $j = 1, \dots, k+1$ — корни полинома (4).

Утверждение 2. Пусть $q_0, \dots, q_k$ (компоненты вектора q) выбраны такими, что все корни полинома (4) различны и их действительные части отрицательны. Тогда

1) при выбранном в (20) c_0 (> 0) и достаточно большом n

$$\|D_n^i\| \leq C e^{-(c_0/n^\gamma)^i}, \quad i = 1, 2, \dots;$$

2) векторы $P(t_i)$, порождаемые рекуррентным уравнением

$$P(t_i) = D_n P(t_{i-1}) + C_n(i) \quad (21)$$

при $P(0) = 0$ и $\|C_n(i)\| \leq r/n^\gamma$, имеют нормы, ограниченные константой, не зависящей от n : $\|P(t_i)\| < C$.

Доказательство. 1) Поскольку $(\det(*))$ обозначает детерминант матрицы $*$)

$$\det(\lambda I - D_n) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 + q_0 n^{-\gamma} & -n^{-\gamma} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q_1 n^{-\gamma} & \lambda - 1 & -n^{-\gamma} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{k-1} n^{-\gamma} & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - 1 & -n^{-\gamma} \\ q_k n^{-\gamma} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix},$$

при $\lambda - 1 = u n^{-\gamma}$ уравнение $\det(\lambda I - D_n) = 0$ преобразуется следующим образом:

$$\det(uI + Q - a) = \begin{vmatrix} u + q_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q_1 & u & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & u & -1 \\ q_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

В свою очередь, уравнение (22) можно записать в виде $p^k(u) = 0$, где $p^k(u)$ — определенный в (4) полином. Напомним, что по предположению все корни полинома $p^k(u)$ имеют отрицательные действительные части: $\operatorname{Re} u_j \leq -2c_0$. С другой стороны, $\lambda_n(j) = 1 + u_j/n^\gamma$, $j = 1, \dots, k+1$. Отсюда при достаточно больших n получаем

$$|\lambda_n(j)| = \sqrt{\left(1 + \frac{\operatorname{Re} u_j}{n^\gamma}\right)^2 + \frac{(\operatorname{Im} u_j)^2}{n^{2\gamma}}} \leq \sqrt{\left(1 - \frac{2c_0}{n^\gamma}\right)^2 + \frac{C}{n^{2\gamma}}} \leq \left(1 - \frac{2c_0}{n^\gamma}\right) \left(1 + o(n^{-2\gamma})\right) \leq \exp\left(-\frac{c_0}{n^\gamma}\right).$$

Далее, поскольку собственные числа матрицы D_n различны, ее жорданова форма $J(D_n)$ является диагональной матрицей:

$$J(D_n) = \operatorname{diag}\left(1 + \frac{u_0}{n^\gamma}, 1 + \frac{u_1}{n^\gamma}, \dots, 1 + \frac{u_k}{n^\gamma}\right),$$

и существует невырожденная матрица T такая, что $J(D_n) = T^{-1}D_nT$. Следовательно, $D_n = TJ(D_n)T^{-1}$ и $D_n^i = TJ^i(D_n)T^{-1}$, $i \geq 2$. В частности, при c_0 , определенном в (20), имеет место неравенство

$$\|D_n^i\| \leq \|T\| \|T^{-1}\| \left\| \operatorname{diag}\left(\left|1 + \frac{u_0}{n^\gamma}\right|^i, \left|1 + \frac{u_1}{n^\gamma}\right|^i, \dots, \left|1 + \frac{u_k}{n^\gamma}\right|^i\right) \right\| \leq C e^{-(c_0/n^\gamma)i}. \quad (23)$$

2) Поскольку $P(t_\ell) = \sum_{i=1}^\ell D_n^{\ell-i} C_n(i)$, то

$$\|P(t_\ell)\| \leq \frac{r}{n^\gamma} \sum_{i=1}^n \|D_n^i\| \leq \frac{C}{n^\gamma} \sum_{i=0}^\infty e^{-(c_0/n^\gamma)i} = \frac{C}{n^\gamma(1 - e^{-c_0/n^\gamma})} < C.$$

4.2. Пограничный слой и оценка для $\|\delta_\ell^1\|$.

Лемма 1. $\sup_{\ell > Cn^\gamma \ln n} \|\delta_\ell^1\| \leq C$.

Доказательство. Поскольку $\delta_\ell^1 = D_n^\ell \delta_0^1$, мы имеем: $\|\delta_\ell^1\| \leq \|D_n^\ell\| \|\delta_0^1\| \leq C e^{-(c_0/n^\gamma)\ell} \|\delta_0^1\|$ (см. утверждение 2). С другой стороны, в силу (13) и (18) $\|\delta_0^1\| \leq C n^{\gamma/2}$.

4.3. Оценки для $\|\delta_\ell^2\| \div \|\delta_\ell^4\|$.

Лемма 2. Для любого $\ell \leq n$ справедливо неравенство $\|\delta_\ell^2\| < C$.

Доказательство. Принимая во внимание утверждение 2, достаточно показать, что

$$\left\| n^{-\beta/(2\beta+1)} Q(F(t_i) - F(t_{i-1})) \right\| \leq \frac{C}{n^\gamma}. \quad (24)$$

В связи с этим заметим, что все компоненты вектора $Q(F(t_i) - F(t_{i-1}))$ пропорциональны разности $f^{(0)}(t_i) - f^{(0)}(t_{i-1})$, модуль которой ограничен величиной Cn^{-1} . Поэтому левая часть неравенства (24) ограничена величиной $C/n^{1+\gamma/2}$ и, в силу $\gamma < 1$, имеет место оценка $C/n^{1+\gamma/2} \leq C/n^\gamma$.

Лемма 3. Для любого $\ell \leq n$ справедливо неравенство $\|\delta_\ell^3\| < C$.

Доказательство. В силу утверждения 2 достаточно показать, что

$$\left\| C_n \left(F(t_{i-1}) - F(t_i) + \frac{1}{n} a F(t_{i-1}) - b \left(f^{(k)}(t_{i-1}) - f^{(k)}(t_i) \right) \right) \right\| \leq \frac{C}{n^\gamma}. \quad (25)$$

Первые k компонент вектора

$$\mathfrak{F}_i = C_n \left(F(t_{i-1}) - F(t_i) + \frac{1}{n} a F(t_{i-1}) - b \left(f^{(k)}(t_{i-1}) - f^{(k)}(t_i) \right) \right)$$

совпадают с первыми k компонентами вектора

$$\mathfrak{F}'_i = C_n \left(F(t_{i-1}) - F(t_i) + \frac{1}{n} a F(t_{i-1}) \right),$$

в то время как последняя компонента вектора $\mathfrak{F}_i$ нулевая. Кроме того, абсолютные значения первых k компонент вектора $\mathfrak{F}'_i$ ограничены величиной $Cn^{\beta/(2\beta+1)-2}$, в то время как модуль последней компоненты ограничен величиной $n^{(\beta-k)/(2\beta+1)-(1+\alpha)}$ (напомним, что $\beta = k + \alpha$). Отсюда следует, что левая часть неравенства (25) ограничена величиной

$$C \left(\frac{1}{n^{2-\beta/(2\beta+1)}} + \frac{1}{n^{(1+\alpha)-\alpha/(2\beta+1)}} \right) \leq C \left(\frac{1}{n^{(3\beta+2)/(2\beta+1)}} + \frac{1}{n^{(2\beta(1+\alpha)+1)/(2\beta+1)}} \right) \leq 2 \frac{C}{n^\gamma}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Для любого l такого, что $Cn^\gamma \ln n < \ell \leq n$, справедливо неравенство $\|\delta_\ell^4\| < C$.

Доказательство. В силу равенства $C_n b = n^{(\beta-k)/(2\beta+1)} b$ имеет место рекуррентное уравнение

$$\delta_i^4 = D_n \delta_{i-1}^4 + n^{(\beta-k)/(2\beta+1)} b \left(f^{(k)}(t_{i-1}) - f^{(k)}(t_i) \right),$$

и, значит, $\delta_\ell^4 = n^{(\beta-k)/(2\beta+1)} \sum_{i=1}^\ell D_n^{\ell-i} b (f^{(k)}(t_{i-1}) - f^{(k)}(t_i))$. Использование же очевидных тождеств

$$\sum_{i=1}^\ell D_n^{\ell-i} b f^{(k)}(t_{i-1}) := D_n^{\ell-1} b f^{(k)}(0) + \sum_{i=1}^{\ell-1} D_n^{\ell-i-1} b f^{(k)}(t_i),$$

$$\sum_{i=1}^\ell D_n^{\ell-i} b f^{(k)}(t_i) := b f^{(k)}(t_\ell) + \sum_{i=1}^{\ell-1} D_n^{\ell-i-1} D_n b f^{(k)}(t_i),$$

$$I := D_n^{\ell-1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} D_n^{\ell-i-1} (I - D_n)$$

позволяет установить, что

$$b f^{(k)}(t_\ell) = D_n^{\ell-1} b f^{(k)}(t_\ell) + \sum_{i=1}^{\ell-1} D_n^{\ell-i-1} (I - D_n) b f^{(k)}(t_\ell),$$

и представить δ_ℓ^4 в следующем виде:

$$\delta_\ell^4 = n^{(\beta-k)/(2\beta+1)} \left(D_n^{\ell-1} b \left(f^{(k)}(0) - f^{(k)}(t_\ell) \right) + \sum_{i=1}^{\ell-1} D_n^{\ell-i-1} (I - D_n) b \left(f^{(k)}(t_i) - f^{(k)}(t_\ell) \right) \right).$$

Последнее равенство влечет за собой оценку

$$\|\delta_\ell^4\| \leq C n^{(\beta-k)/(2\beta+1)} \left(\|D_n^{\ell-1}\| \left(\frac{\ell}{n} \right)^\alpha + \sum_{i=1}^{\ell-1} \|D_n^{\ell-i-1}\| \|I - D_n\| \left(\frac{\ell-i}{n} \right)^\alpha \right).$$

Тогда, принимая во внимание соотношения $\|D_n^i\| \leq C e^{-(c_0/n^\gamma)i}$ (см. утверждение 2), $\|I - D_n\| \leq C/n^\gamma$ и $n^{(\beta-k)/(2\beta+1)} n^{\alpha\gamma}/n^\alpha \equiv 1$ (напомним, что $\beta - k = \alpha$), получаем

$$\begin{aligned} \|\delta_\ell^4\| &\leq C n^{(\beta-k)/(2\beta+1)} \left(e^{-(c_0/n^\gamma)(\ell-1)} + \frac{1}{n^\gamma} \sum_{i=1}^{\ell-1} e^{-(c_0/n^\gamma)(\ell-i-1)} \left(\frac{\ell-i}{n} \right)^\alpha \right) \\ &\leq C \left(n^{(\beta-k)/(2\beta+1)} e^{-(c_0/n^\gamma)(\ell-1)} + \frac{e^{c_0/n^\gamma}}{n^\gamma} \sum_{i=1}^\infty e^{-c_0 i/n^\gamma} \left(\frac{i}{n^\gamma} \right)^\alpha \right). \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение леммы выполняется, поскольку

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-c_0 i/n^\gamma} \left(\frac{i}{n^\gamma}\right)^\alpha \frac{1}{n^\gamma} < C. \quad (26)$$

Действительно, для любого K

$$\sum_{i=1}^{[Kn^\gamma]} e^{-c_0 i/n^\gamma} \left(\frac{i}{n^\gamma}\right)^\alpha \frac{1}{n^\gamma} \leq K^\alpha \sum_{i=1}^{[Kn^\gamma]} e^{-c_0 i/n^\gamma} \frac{1}{n^\gamma} \leq K^\alpha \int_0^\infty e^{-c_0 x} dx < \infty$$

и в то же самое время, в связи с тем, что при достаточно больших значениях K $e^{-c_0 i/n^\gamma} (i/n^\gamma)^\alpha$ убывает по $i \geq K$, получаем

$$\frac{1}{n^\gamma} \sum_{i \geq Kn^\gamma} e^{-c_0 i/n^\gamma} \left(\frac{i}{n^\gamma}\right)^\alpha \leq \int_K^\infty x^\alpha e^{-c_0 x} dx < \infty.$$

Лемма доказана.

5. Оценка дисперсии. Обозначим

$$\Gamma(t_i) = \mathbf{E} C_n \left(\widehat{F}^n(t_i) - M^n(t_i) \right) \left(\widehat{F}^n(t_i) - M^n(t_i) \right)^* C_n^*,$$

где матрица C_n определена в (13) и $*$ — символ транспонирования. Обозначим также $V(t_i) = C_n (\widehat{F}^n(t_i) - M^n(t_i))$. Рекуррентное уравнение (9) и определение D_n (см. (16)) позволяют получить рекуррентное уравнение

$$V(t_i) = D_n V(t_{i-1}) + n^{-\beta/(2\beta+1)} q \sigma(t_{in}) \xi_{in}.$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} V(t_i) V^*(t_i) &= D_n V(t_{i-1}) V^*(t_{i-1}) D_n^* + n^{-2\beta/(2\beta+1)} q q_n^* \sigma^2(t_{in}) \xi_{in}^2 \\ &\quad + n^{-2\beta/(2\beta+1)} (D_n V(t_{i-1}) q^* + q V^*(t_{i-1}) D_n^*) \sigma(t_{in}) \xi_{in}. \end{aligned}$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей этого равенства, приходим к рекуррентному уравнению для $\Gamma(t_i) \equiv \mathbf{E} V(t_i) V^*(t_i)$:

$$\Gamma(t_i) = D_n \Gamma(t_{i-1}) D_n^* + n^{-2\beta/(2\beta+1)} q q_n^* \sigma_{in}^2, \quad \Gamma(0) = 0.$$

Поэтому

$$\Gamma(t_\ell) = \sigma_{in}^2 n^{-\gamma} \sum_{i=1}^{\ell} D_n^{\ell-i} q q^* (D_n^{\ell-i})^*$$

и, поскольку величины σ_{in}^2 ограничены, имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|\Gamma(t_\ell)\| &\leq C n^{-\gamma} \sum_{i=1}^{\ell} \|D_n^{\ell-i}\|^2 = C n^{-\gamma} \sum_{i=0}^{\ell-1} \|D_n^i\|^2 \\ &\leq C n^{-\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2c_0 i/n^\gamma} = \frac{C}{n^\gamma (1 - e^{-2c_0 n^{-\gamma}})} < C. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\ell \leq n$

$$\sum_{j=0}^k \mathbf{E} \left(f^{(j)}(t_\ell) - \widehat{f}_n^{(j)}(t_\ell) \right)^2 n^{2(\beta-j)/(2\beta+1)} < C. \quad (27)$$

6. Доказательство теоремы 1. В силу лемм 1–4 получаем

$$\sum_{j=0}^k \left(f^{(j)}(t_\ell) - \mathbf{E} \widehat{f}^{(j,n)}(t_\ell) \right)^2 n^{2(\beta-j)/(2\beta+1)} < C, \quad \text{если } \ell > C n^\gamma \ln n. \quad (28)$$

Требуемый результат выводится теперь из (27) и (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown L., Low M. Asymptotic equivalence of nonparametric regression and white noise. — Ann. Statist., 1996, v. 24, № 6, p. 2384–2398.
2. Chow P.-L., Khasminskii R., Liptser R. Tracking of signals and its derivatives in Gaussian white noise. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 69, № 2, p. 259–273.
3. Grama I., Nussbaum M. Asymptotic equivalence for nonparametric generalized linear models. — Probab. Theory Relat. Fields, 1998, v. 111, № 2, p. 167–214.
4. Ибрагимов И. А., Хасъминский Р. З. Непараметрические оценки регрессии. — Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 4, с. 780–784.
5. Ибрагимов И. А., Хасъминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
6. Le Cam L. Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory. New York: Springer-Verlag, 1986, 742 с.
7. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode. — Ann. Math. Statist., 1962, v. 33, № 3, p. 1065–1076.
8. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function. — Ann. Math. Statist., 1956, v. 27, № 3, p. 832–837.
9. Stone C. Optimal rates of convergence for nonparametric estimators. — Ann. Statist., 1980, v. 8, p. 1348–1360.
10. Stone C. Optimal global rates of convergence for nonparametric regression. — Ann. Statist., 1982, v. 10, p. 1040–1053.

Поступила в редакцию
4.IX.2001

© 2002 г.

НАГАЕВ А. В.*, ХАМДАМОВ И. М.**

**О РОЛИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СЛАГАЕМЫХ
В СУММЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**

Рассматриваются суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, сходящиеся по распределению к случайной величине, имеющей устойчивое распределение с характеристическим показателем $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Устанавливается предельное распределение этих сумм при удалении m крайних левых и k крайних правых порядковых статистик.

Ключевые слова и фразы: устойчивое распределение, пуассоновский спектр, порядковая статистика, монотонная ε -аппроксимация.

1. Введение. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, а $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Упорядочив x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, в порядке возрастания, мы получим так называемый вариационный ряд $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, члены которого принято называть порядковыми статистиками. Результаты упорядочения по абсолютной величине будем обозначать $y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}$. Таким образом,

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)} \quad \text{и} \quad |y_{(1)}| \leq |y_{(2)}| \leq \dots \leq |y_{(n)}|.$$

Нас интересует вопрос о роли экстремальных слагаемых в предельном поведении сумм S_n .

* Университет Н. Коперника, Торунь, Польша; e-mail: nagaev@mat.uni.torun.pl

** Институт математики АН РУз, ул. Ф. Ходжаева, 29, 700143 Ташкент, Узбекистан.