Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Нагаев, И. М. Хамдамов, О роли экстремальных слагаемых в сумме случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 3, 575–583

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 09:15:44

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown L., Low M. Asymptotic equivalence of nonparametric regression and white noise. — Ann. Statist., 1996, v. 24, № 6, p. 2384–2398.
2. Chow P.-L., Khasminskii R., Liptser R. Tracking of signals and its derivatives in Gaussian white noise. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 69, № 2, p. 259–273.
3. Grama I., Nussbaum M. Asymptotic equivalence for nonparametric generalized linear models. — Probab. Theory Relat. Fields, 1998, v. 111, № 2, p. 167–214.
4. Ибрагимов И. А., Хасъминский Р. З. Непараметрические оценки регрессии. — Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 4, с. 780–784.
5. Ибрагимов И. А., Хасъминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
6. Le Cam L. Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory. New York: Springer-Verlag, 1986, 742 с.
7. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode. — Ann. Math. Statist., 1962, v. 33, № 3, p. 1065–1076.
8. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function. — Ann. Math. Statist., 1956, v. 27, № 3, p. 832–837.
9. Stone C. Optimal rates of convergence for nonparametric estimators. — Ann. Statist., 1980, v. 8, p. 1348–1360.
10. Stone C. Optimal global rates of convergence for nonparametric regression. — Ann. Statist., 1982, v. 10, p. 1040–1053.

Поступила в редакцию
4.IX.2001

© 2002 г.

НАГАЕВ А. В.*, ХАМДАМОВ И. М.**

**О РОЛИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СЛАГАЕМЫХ
В СУММЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**

Рассматриваются суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, сходящиеся по распределению к случайной величине, имеющей устойчивое распределение с характеристическим показателем $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Устанавливается предельное распределение этих сумм при удалении m крайних левых и k крайних правых порядковых статистик.

Ключевые слова и фразы: устойчивое распределение, пуассоновский спектр, порядковая статистика, монотонная ε -аппроксимация.

1. Введение. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, а $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Упорядочив x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, в порядке возрастания, мы получим так называемый вариационный ряд $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, члены которого принято называть порядковыми статистиками. Результаты упорядочения по абсолютной величине будем обозначать $y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}$. Таким образом,

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)} \quad \text{и} \quad |y_{(1)}| \leq |y_{(2)}| \leq \dots \leq |y_{(n)}|.$$

Нас интересует вопрос о роли экстремальных слагаемых в предельном поведении сумм S_n .

* Университет Н. Коперника, Торунь, Польша; e-mail: nagaev@mat.uni.torun.pl

** Институт математики АН РУз, ул. Ф. Ходжаева, 29, 700143 Ташкент, Узбекистан.

Заметим, что при конечности второго момента x_1 удаление любого ограниченного числа слагаемых, в том числе и экстремальных, не влияет на предельное распределение S_n . Отсюда, в частности, следует, что в этом случае S_n , $x_{(1)}$ и $x_{(n)}$ асимптотически независимы. Если же распределение x_1 принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha < 2$, то экстремальные члены вариационного ряда оказывают существенное влияние на асимптотические свойства S_n .

Предположим, что распределение x_1 удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}\{x_1 < u\} = F(u) = \begin{cases} c_1 |u|^{-\alpha} l_1(|u|), & \text{если } u < 0, \\ 1 - c_2 u^{-\alpha} l_2(u), & \text{если } u > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $c_i \geq 0$, $i = 1, 2$, $c_1 + c_2 = 1$, а функции $l_i(u)$, $i = 1, 2$, медленно изменяются при $u \rightarrow \infty$, причем $\lim_{u \rightarrow \infty} l_1(u)/l_2(u) = 1$.

В дальнейшем, чтобы избежать чисто технических осложнений, будем предполагать, что $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Более того, при $1 < \alpha < 2$ мы предполагаем, что $\mathbf{E}x_1 = 0$.

Положим

$$b_n = \inf\{t: n\mathbf{P}\{|x_1| > t\} \leq 1\}.$$

Хорошо известно, что при таком выборе b_n случайная величина $b_n^{-1} S_n$ сходится по распределению к случайной величине с характеристической функцией $\phi(t)$, логарифм которой имеет следующий вид:

$$\ln \phi(t) = \begin{cases} \alpha c_1 \int_{-\infty}^0 \frac{e^{itz} - 1}{|z|^{\alpha+1}} dz + \alpha c_2 \int_0^{\infty} \frac{e^{itz} - 1}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ \alpha c_1 \int_{-\infty}^0 \frac{e^{itz} - 1 - itz}{|z|^{\alpha+1}} dz + \alpha c_2 \int_0^{\infty} \frac{e^{itz} - 1 - itz}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 1 < \alpha < 2. \end{cases} \quad (2)$$

После вычисления интегралов получается обычно используемая более компактная запись. Однако для наших целей удобнее именно такая форма представления.

Положим

$$Z_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{n-k} y_{(j)}, \quad S_n^{(m,k)} = \sum_{j=m+1}^{n-k} x_{(j)}.$$

Легко заметить, что $Z_n^{(k)}$ является результатом удаления k наибольших по абсолютной величине слагаемых из суммы S_n , тогда как $S_n^{(m,k)}$ получается при одновременном удалении m крайних левых и k крайних правых порядковых статистик.

Вопрос о роли экстремальных слагаемых интересовал многих авторов (см., например, [1]–[6]). Имеются также работы, посвященные выяснению роли экстремальных слагаемых при сложении случайных векторов (см., например, [7]).

В [1], в частности, получено предельное совместное распределение для случайных величин $b_n^{-1} Z_n^{(k)}$ и $b_n^{-1} |y_{(n-k+1)}|$ в случае $0 < \alpha < 1$. Несколькими изменениями в [1] форму представления указанного предельного распределения, можно записать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{b_n^{-1} Z_n^{(k)} < z, b_n^{-1} |y_{(n-k+1)}| < u\} = \int_0^u F(z; x) dG_k(x), \quad (3)$$

где

$$G_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{x-\alpha}^{\infty} v^{k-1} e^{-v} dv,$$

а $F(z; x)$ — функция распределения безгранично делимого закона, логарифм характеристической функции которой имеет вид

$$h(t; x) = \alpha c_1 \int_{-x}^0 \frac{e^{itz} - 1}{|z|^{\alpha+1}} dz + \alpha c_2 \int_0^x \frac{e^{itz} - 1}{z^{\alpha+1}} dz. \quad (4)$$

Из приводимых ниже утверждений следует, что при $1 < \alpha < 2$ соотношение (3) сохраняет силу с заменой (4) на

$$h(t; x) = it(c_2 - c_1) \frac{\alpha}{\alpha - 1} x^{-\alpha} + \alpha c_1 \int_{-x}^0 \frac{e^{itz} - 1 - itz}{|z|^{\alpha+1}} dz + \alpha c_2 \int_0^x \frac{e^{itz} - 1 - itz}{z^{\alpha+1}} dz. \quad (5)$$

Таким образом, предельное распределение для $Z_n^{(k)}$ представляет собой смесь безгранично делимых законов, причем параметром смеси является уровень, на котором симметричным образом урезается пуассоновский спектр устойчивого закона, а весовой функцией служит $G_k(x)$ (ср. с (2), (4) и (5)).

Из (3), в частности, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{Z_n^{(k)}}{|y_{(n-k+1)}|} < z \right\} = \int_0^\infty F(zx; x) dG_k(x) = \mathbf{P}\{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k < z\}, \quad (6)$$

где $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ независимы и имеют общее распределение с характеристической функцией

$$\mathbf{E} e^{it\eta_1} = \frac{1}{1 + h(t, 1)}.$$

Соотношение (6) в случае $0 < \alpha < 1$ может быть извлечено из [1]. В явной форме оно приведено в [2] для $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$.

Следует заметить, что в ряде случаев цензурирование, приводящее к $S_n^{(m,k)}$, предпочтительнее. В частности, этот способ допускает интересное перенесение на многомерный случай. Так, если $x_i \in \mathbf{R}^d$, то аналогом $S_n^{(1,1)}$ служит сумма, из которой удалены слагаемые, отвечающие вершинам выпуклой оболочки, натянутой на $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Интуитивно понятно, что предельное распределение для $S_n^{(m,k)}$ представляет собой двухпараметрическую смесь безгранично делимых законов, спектральная мера каждого из которых является сужением спектральной меры предельного устойчивого распределения на несимметричный интервал, концы которого являются параметрами смеси. В качестве весовой функции здесь служит плотность предельного совместного распределения $x_{(m)}$ и $x_{(n-k+1)}$.

Приводимая ниже теорема служит подтверждением этому предположению.

Пусть $F(z; x, y)$, $x > 0$, $y > 0$, — двухпараметрическое семейство функций распределения безгранично делимых законов, логарифмы характеристических функций которых имеют вид (ср. с (2), (4) и (5))

$$h(t; x, y) = \begin{cases} \alpha c_1 \int_{-x}^0 \frac{e^{itz} - 1}{|z|^{\alpha+1}} dz + \alpha c_2 \int_0^y \frac{e^{itz} - 1}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ it \frac{\alpha}{\alpha - 1} (c_2 y^{-\alpha} - c_1 x^{-\alpha}) + \alpha c_1 \int_{-x}^0 \frac{e^{itz} - 1 - itz}{|z|^{\alpha+1}} dz \\ \quad + \alpha c_2 \int_0^y \frac{e^{itz} - 1 - itz}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Теорема. В наших условиях при $\min(c_1, c_2) > 0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n^{(m,k)} < zb_n, -x_{(m)} < ub_n, x_{(n-k+1)} < vb_n\} \\ = \int_0^u \int_0^v F(z; x, y) dG_m^{(1)}(x) dG_k^{(2)}(y) + o(1) \end{aligned}$$

равномерно по u , $u \geq 0$, и v , $v \geq 0$, где

$$G_m^{(i)}(u) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{c_i u^{-\alpha}}^\infty x^{m-1} e^{-x} dx, \quad i = 1, 2.$$

Из теоремы, в частности, следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \frac{S_n^{(m,k)}}{\min(|x_{(m)}|, x_{(n-k+1)})} < z \right\} \rightarrow \iint_{x>y} F(zy; x, y) dG_m^{(1)}(x) dG_k^{(2)}(y) \\ + \iint_{x<y} F(zx; x, y) dG_m^{(1)}(x) dG_k^{(2)}(y) \end{aligned}$$

(ср. с (6)).

Нетрудно понять, что происходит, когда хвосты исходного распределения имеют существенно разный вес. Если, например, $1 - F(u) = u^{-\alpha} l(u)$, $u > 0$, где $l(u)$ медленно изменяется при $n \rightarrow \infty$, а $F(-u) = o(1 - F(u))$, то предельное распределение случайной величины $S_n^{(m,k)}$ совпадает с предельным распределением $Z_n^{(k)}$. Более того, имеет место аналог (6):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{S_n^{(m,k)}}{x_{(n-k+1)}} < z \right\} = \mathbf{P} \{ \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k < z \}.$$

В этом случае

$$\mathbf{E} e^{it\eta_1} = \frac{1}{1 + h(t)},$$

где

$$h(t) = \begin{cases} \alpha \int_0^1 \frac{e^{itz} - 1}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ it \frac{\alpha}{\alpha - 1} + \alpha \int_0^1 \frac{e^{itz} - 1 - itz}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

2. Вспомогательные предложения. В дальнейшем θ означает любую величину, изменяющуюся в $[-1, 1]$, $c(\delta)$ означает любую положительную функцию, ограниченную для каждого $\delta > 0$, а c — любую положительную постоянную. Наконец, $\omega(t)$ означает любую функцию со свойством $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$.

Положим для произвольно малого фиксированного $\delta > 0$

$$u_0 = u_0(n, \delta) = -\delta b_n, \quad v_0 = v_0(n, \delta) = \delta b_n$$

и

$$u_j = u_{j-1} - \Delta, \quad v_j = v_{j-1} + \Delta, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \text{где } \Delta > 0.$$

Лемма 1. Пусть выполнено (1). Тогда

$$\begin{aligned} \limsup_{\Delta \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^n \mathbf{1}_{[u_j, u_{j-1})}(x_l) > 1 \right\} \right) &\leq c(\delta) \omega\left(\frac{1}{n}\right), \\ \limsup_{\Delta \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^n \mathbf{1}_{[v_{j-1}, v_j)}(x_l) > 1 \right\} \right) &\leq c(\delta) \omega\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Для упрощения записи положим

$$\begin{aligned} P_n(\Delta) &= \mathbf{P} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^n \mathbf{1}_{[u_j, u_{j-1})}(x_l) > 1 \right\} \right), \\ \pi_n(\Delta) &= \mathbf{P} \left\{ \sum_{l=1}^n \mathbf{1}_{[u_j, u_{j-1})}(x_l) > 1 \right\}. \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что $P_n(\Delta)$ есть вероятность того, что по крайней мере в один из отрезков $[u_j, u_{j-1})$ попадет более одной из случайных величин x_l , $l = 1, 2, \dots, n$. Ясно также, что $P_n(\Delta) \leq \sum_{j=1}^n \pi_j(\Delta)$. Запишем, далее, цепочку очевидных соотношений

$$\begin{aligned} \pi_n(\Delta) &\leq n^2 \left(F(u_{j-1}) - F(u_j) \right)^2 \leq n^2 \left(F(u_{j-1}) - F(u_j) \right) \sup_{l \geq 1} \left(F(u_{l-1}) - F(u_l) \right) \\ &\leq n^2 F(u_0) \left(F(u_{j-1}) - F(u_j) \right) \sup_{l \geq 1} \left(1 - \frac{F(u_l)}{F(u_{l-1})} \right) \\ &\leq n^2 F(u_0) \left(F(u_{j-1}) - F(u_j) \right) \sup_{u \leq u_0} \left(1 - \frac{F(u - \Delta)}{F(u)} \right). \end{aligned}$$

Согласно (1),

$$\frac{F(u - \Delta)}{F(u)} = \left(1 + \frac{\Delta}{|u|} \right)^{-\alpha} \frac{l_1(|u - \Delta|)}{l_1(|u|)}.$$

Если Δ ограничено, а n достаточно велико, то при $u \leq u_0$

$$\left(1 + \frac{\Delta}{|u|}\right)^\alpha \geq 1 - c \frac{\Delta}{|u|}.$$

Рассмотрим представление Караматы (см., например, гл. XIII в [8])

$$l_1(x) = a(x) \exp \left(\int_1^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right).$$

Здесь $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = a > 0$, $\varepsilon(x)$ абсолютно интегрируема в любом конечном интервале $(x', x'') \in (0, \infty)$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$.

Если n достаточно велико, то для $u \leq u_0$

$$\int_{|u|}^{|u-\Delta|} \frac{\varepsilon(v)}{v} dv \geq -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\Delta}{|u|} \right).$$

Следовательно,

$$\frac{F(u-\Delta)}{F(u)} \geq \left(1 - c \frac{\Delta}{|u|}\right) \left(1 + \frac{\Delta}{|u|}\right)^{-1/2} \frac{a(|u-\Delta|)}{a(|u|)} \geq \left(1 - c \frac{\Delta}{|u|}\right) \frac{a(|u-\Delta|)}{a(|u|)}.$$

Таким образом,

$$P_n(\Delta) \leq n^2 F^2(u_0) \sup_{u \leq u_0} \left(1 - \left(1 - c \frac{\Delta}{|u|} \right) \frac{a(|u-\Delta|)}{a(|u|)} \right).$$

Положим $\bar{a}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} a(y)$. Легко видеть, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{a}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = a$. Отсюда

$$\limsup_{\Delta \rightarrow 0} P_n(\Delta) \leq n^2 F^2(u_0) \sup_{u \leq u_0} \left(1 - \frac{\bar{a}(|u|)}{a(|u|)} \right).$$

Очевидно, $\sup_{n \geq n_0} n^2 F^2(-\delta b_n) = c(\delta) < \infty$, тогда как $\sup_{u \leq -\delta b_n} (1 - \bar{a}(|u|)/a(|u|)) = \omega(1/n)$. Лемма доказана.

Обозначим

$$X_n^- = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^n \mathbf{1}_{[u_j, u_{j-1})}(x_l) = 1 \right\}, \quad X_n^+ = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^n \mathbf{1}_{[v_{j-1}, v_j)}(x_l) = 1 \right\}.$$

Пусть

$$X_n = X_n^+ \cap X_n^-.$$

Из леммы 1 следует, что $\mathbf{P}(X_n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Ясно, что при $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_n$ и любых фиксированных целых m и k

$$x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(m)} \quad \text{и} \quad x_{(n)} > x_{(n-1)} > \dots > x_{(n-k+1)}.$$

Лемма 2. Если в (1) $\min(c_1, c_2) > 0$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{-x_{(m)} < ub_n, x_{(n-k+1)} < vb_n\} = G_m^{(1)}(u) G_k^{(2)}(v) + o(1)$$

равномерно по $u, v \geq 0$.

Доказательство. Из леммы 1 получаем

$$\mathbf{P}\{x_{(m)} < -ub_n, x_{(n-k+1)} > vb_n\} = \mathbf{P}\{x_{(m)} < -ub_n, x_{(n-k+1)} > vb_n, X_n\} + \theta \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

При этом

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{x_{(m)} < -ub_n, x_{(n-k+1)} > vb_n, X_n\} \\ &= C_n^{(m,k)} \int_{-\infty}^{-ub_n} \int_{vb_n}^{\infty} F^{m-1}(z) (F(w) - F(z))^{n-m-k} (1 - F(w))^{k-1} dF(z) dF(w) \\ &= C_n^{(m,k)} \int_{-\infty}^{-u} \int_v^{\infty} F^{m-1}(zb_n) (F(wb_n) - F(zb_n))^{n-m-k} \\ & \quad \times (1 - F(wb_n))^{k-1} dF(zb_n) dF(wb_n), \end{aligned}$$

где $C_n^{(m,k)} = n! / ((m-1)!(k-1)!(n-m)!)$. Из (1) следует, что для любой непрерывной функции $g(u)$ с компактным носителем, лежащим в $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,

$$n \int g(u) dF(ub_n) \rightarrow \alpha \int g(u) \left(\mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(u) c_1 |u|^{-\alpha-1} + \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u) c_2 u^{-\alpha-1} \right) du. \quad (7)$$

Это, в частности, означает, что $nF(zb_n) \rightarrow c_1(-z)^{-\alpha}$ для $z < 0$, тогда как для $w > 0$ $n(1 - F(wb_n)) \rightarrow c_2 w^{-\alpha}$, а

$$(F(wb_n) - F(zb_n))^{n-m-k} \rightarrow e^{-c_1(-z)^{-\alpha} - c_2 w^{-\alpha}}.$$

Остается проделать очевидные вычисления. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $w_j(x, y)$, $x > 0$, $y > 0$, $j = 1, 2, \dots$, с общим распределением

$$\mathbf{P}\{w_1(x, y) < z\} = \mathbf{P}\{x_1 < z \mid -x < x_1 < y\}.$$

Обозначим $f(t; x, y) = \mathbf{E} \exp(itw_1(x, y))$. Пусть, далее,

$$\xi_j(x, y) = b_n^{-1} w_j(xb_n, yb_n), \quad \zeta_n(x, y) = \sum_{j=1}^n \xi_j(x, y).$$

Запишем очевидное представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{S_n^{(m,k)} < zb_n, -x_{(m)} < ub_n, x_{(n-k+1)} < vb_n\} \\ &= \int_{x < u} \int_{y < v} \mathbf{P}\{\zeta_{n-m-k}(x, y) < z\} d\mathbf{P}\{-\xi_{(m)} < x, \xi_{(n-k+1)} < y\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $-\xi_{(m)} = b_n^{-1} x_{(m)}$, $\xi_{(n-k+1)} = b_n^{-1} x_{(n-k+1)}$.

Очевидно, $\mathbf{E} e^{it\xi_j} = f(b_n^{-1}t; xb_n, yb_n)$. Из (7) легко получаем, что

$$n \int_{-x}^0 (e^{itz} - 1) dF(zb_n) \rightarrow c_1 \alpha \int_{-x}^0 \frac{e^{itz} - 1}{|z|^{\alpha+1}} dz, \quad (9)$$

а

$$n \int_0^y (e^{itz} - 1) dF(zb_n) \rightarrow c_2 \alpha \int_0^y \frac{e^{itz} - 1}{z^{\alpha+1}} dz, \quad (10)$$

причем оба соотношения выполняются равномерно по t , $|t| \leq T < \infty$.

Нетрудно понять, что последние соотношения выполняются также равномерно и по $x \in [\delta, \infty)$, $y \in [\delta, \infty)$.

Таким образом,

$$\phi_n(t; x, y) = \left(f\left(\frac{t}{b_n}; xb_n, yb_n\right) \right)^n \rightarrow \phi(t; x, y) = e^{h(t; x, y)} \quad (11)$$

равномерно по t , $|t| < T$, и $x \in [\delta, \infty)$, $y \in [\delta, \infty)$. Из очевидного неравенства

$$\min_{z \geq z_0} \int_0^z \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda > 0$$

следует, что функция распределения $F(z; x, y)$ имеет плотность $p(z; x, y)$, причем $\sup_{x \geq \delta, y \geq \delta} \sup_z p(z; x, y) = c(\delta) < \infty$.

Докажем, что для любых z_1 и z_2 , $z_1 < z_2$, при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \geq \delta, y \geq \delta} \left| \mathbf{P}\{z_1 \leq \zeta_{n-m-k}(x, y) < z_2\} - F(z_2; x, y) + F(z_1; x, y) \right| \rightarrow 0. \quad (12)$$

Согласно [9] (см. также [10]), для любого $\varepsilon > 0$ существуют $g_-(z)$ и $g_+(z)$ такие, что

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \int |g_{\pm}(z)| dz < \infty, \quad g_-(z) \leq \mathbf{1}_{[z_1, z_2]}(z) \leq g_+(z), \\ \text{б)} \quad & \int (g_+(z) - g_-(z)) dz < \varepsilon, \end{aligned}$$

а соответствующие преобразования Фурье $\widehat{g}_{\pm}(t) = \int e^{itz} g_{\pm}(z) dz$ имеют компактные носители.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{z_1 \leq \zeta_{n-m-k}(x, y) < z_2\} &= \mathbf{E} \mathbf{1}_{[z_1, z_2)}(\zeta_{n-m-k}(x, y)) \\ &= \int \mathbf{1}_{[z_1, z_2)}(z) d\mathbf{P}\{\zeta_{n-m-k}(x, y) < z\} \leq \int g_+(z) d\mathbf{P}\{\zeta_{n-m-k}(x, y) < z\}. \end{aligned}$$

Поскольку $\widehat{g}_+(t)$ имеет компактный носитель, существует $T > 0$ такое, что $\widehat{g}_+(t) = 0$ для $|t| > T$. Применение тождества Парсеваля дает нам ввиду (11)

$$\begin{aligned} \int g_+(z) d\mathbf{P}\{\zeta_{n-m-k}(x, y) < z\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < T} \widehat{g}_+(-t) \phi_{n-m-k}(t; x, y) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < T} \widehat{g}_+(-t) \phi(t; x, y) dt + \frac{T}{\pi} \sup_t |\phi_{n-m-k}(t; x, y) - \phi(t; x, y)| \\ &= \int g_+(z) dF(z; x, y) + \omega\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Далее,

$$\int g_+(z) dF(z; x, y) \leq \int \mathbf{1}_{[z_1, z_2)}(z) p(z; x, y) dz + \sup_u p(u; x, y) \int (g_+(z) - g_-(z)) dz.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\{z_1 \leq \zeta_{n-m-k}(x, y) < z_2\} \leq F(z_2; x, y) - F(z_1; x, y) + \varepsilon c(\delta) + \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналогично

$$\mathbf{P}\{z_1 \leq \zeta_{n-m-k}(x, y) < z_2\} \geq F(z_2; x, y) - F(z_1; x, y) - \varepsilon c(\delta) + \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ввиду произвольности ε получаем (12). Теорема следует теперь из леммы 2 и соотношений (8) и (12).

4. Замечания по поводу распределений с правильно изменяющимися хвостами. Пусть в отличие от (1)

$$F(u) = \begin{cases} |u|^{-\alpha_1} l_1(|u|), & \text{если } u < 0, \\ 1 - u^{-\alpha_2} l_2(u), & \text{если } u > 0, \end{cases} \quad (13)$$

где $\min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$, а функции $l_i(u)$, $i = 1, 2$, медленно изменяются при $u \rightarrow \infty$. Положим

$$\beta_{ni} = \inf\{u: u > 0, nu^{-\alpha_i} l_i(u) \leq 1\}, \quad i = 1, 2.$$

Для любой непрерывной функции $g(u)$, имеющей компактный носитель, лежащий в $(-\infty, 0)$, имеем (ср. с (7), (9) и (10))

$$\beta_{n1} \int g(u) dF(u\beta_{n1}) \longrightarrow \alpha_1 \int g(u) \frac{du}{|u|^{\alpha_1+1}}. \quad (14)$$

Если же носитель $g(u)$ лежит в $(0, \infty)$, то

$$\beta_{n2} \int g(u) dF(u\beta_{n2}) \longrightarrow \alpha_2 \int g(u) \frac{du}{u^{\alpha_2+1}}. \quad (15)$$

Нетрудно показать, что при выполнении (13) $x_{(m)}$ и $x_{(n-k+1)}$ асимптотически независимы, причем

$$\mathbf{P}\{-\beta_{n1}^{-1} x_{(m)} < z\} \longrightarrow G_m^{(1)}(z), \quad \mathbf{P}\{\beta_{n2}^{-1} x_{(n-k+1)} < z\} \longrightarrow G_k^{(2)}(z).$$

Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве леммы 1, нетрудно показать, что

$$P\{x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(m)}, x_{(n)} > x_{(n-1)} > \dots > x_{(n-k+1)}\} \rightarrow 1.$$

Пусть $j_1, j_2, \dots, j_{m-1}$ — номера случайных величин, попавших в $(-\infty, x_{(m)})$, т.е.

$$j_1 = \min(j: x_j < x_{(m)}), \quad j_2 = \min(j: j > j_1, x_j < x_{(m)}) \quad \text{и т.д.}$$

Пусть, далее, $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$ — номера случайных величин, попавших в $(x_{(n-k+1)}, \infty)$.

Используя (14) и (15), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{x_{j_1}}{x_{(m)}} > z_1, \dots, \frac{x_{j_{m-1}}}{x_{(m)}} > z_{m-1}, \frac{x_{i_1}}{x_{(n-k+1)}} > w_1, \dots, \frac{x_{i_{k-1}}}{x_{(n-k+1)}} > w_{k-1}\right\} \\ \rightarrow \prod_{j=1}^{m-1} z_j^{-\alpha_1} \prod_{i=1}^{k-1} w_i^{-\alpha_2} \end{aligned}$$

для $z_i \geq 1, w_j \geq 1, i = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, k-1$. Именно этот факт неявно используется в работе [11], положившей начало целой серии исследований, посвященных статистическому оцениванию показателя правильно изменяющегося хвоста распределения.

Рассмотрим устойчивый закон, являющийся предельным для нецензурированных сумм $S_n = S_n^{(0,0)}$. При $\alpha \in (0, 1) \cup (0, 2)$ из последнего соотношения получаем любопытное представление для функции распределения $S(z)$ этого предельного закона, справедливое при всех m и k . Согласно (11), $\zeta_n(x, y)$ сходится по распределению к случайной величине $\zeta(x, y)$, имеющей функцию распределения $F(z; x, y)$. Тогда

$$S(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty P\{\zeta(x, y) - x\xi_m + y\eta_k < z\} dG_m^{(1)}(x) dG_k^{(2)}(y).$$

Здесь $\zeta(x, y)$, ξ_m и η_k независимы, причем

$$\xi_m \stackrel{d}{=} 1 + e_1 + \dots + e_{m-1}, \quad \eta_k \stackrel{d}{=} 1 + e_1 + \dots + e_{k-1},$$

а $e_j, j = 1, 2, \dots$, в свою очередь, независимы и имеют общее распределение Парето с показателем α .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аров Д. З., Бобров А. А. О крайних членах вариационного ряда и их роли в сумме независимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 4, с. 415–435.
2. Teugels J. L. Limit theorems on order statistics. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 5, p. 868–880.
3. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 304 с.
4. Егоров В. А., Невзоров В. Б. Некоторые оценки скорости сходимости сумм порядковых статистик к нормальному закону. — Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1974, т. 41, с. 105–128.
5. Ахундов И. С. Предельные теоремы, учитывающие роль максимальных слагаемых при суммировании случайных величин. — Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып. 1. Под ред. З. И. Боревиича и В. В. Петрова. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1986, с. 139–146.
6. Darling D. A. The influence of the maximum term in the addition of independent random variables. — Trans. Amer. Math. Soc., 1952, v. 73, № 1, p. 95–107.
7. Калинаускайте Н. О влиянии максимального модуля слагаемого на сумму независимых случайных векторов. — Литов. матем. сб., 1974, т. 14, № 1, с. 41–48.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. II. М.: Мир, 1984, 752 с.

9. *Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D.* Théorèmes limites à distance finie pour les marches aléatoires. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1968, v. 4, p. 25–73.
10. *Нагаев А. В.* Некоторые замечания по поводу многомерных локальных предельных теорем. — Матем. заметки, 1973, т. 14, № 4, с. 559–563.
11. *Hill B. M.* A simple general approach to inference about the tail of a distribution. — Ann. Statist., 1975, v. 3, № 5, p. 1163–1174.

Поступила в редакцию
22.VII.1998

Исправленный вариант
3.III.1999

© 2002 г.

ЧЯКАНАВИЧЮС В.*

О МНОГОМЕРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

Рассматривается близость сверток общих обобщенных распределений к обобщенному закону Пуассона. Получено обобщение неравенства Ле Кама. Подход бесконечных сверток Боровкова–Пфайфера распространен на общий случай многомерных обобщенных распределений.

Ключевые слова и фразы: обобщенное распределение Пуассона, полная вариация, первая равномерная теорема Колмогорова.

1. Обозначения и результаты. Обобщенные распределения (см. (1.1)) используются в различных областях математики. Например, в финансовой математике распределения суммарных страховых требований являются обобщенными распределениями. В настоящей работе показывается, что свертки обобщенных распределений могут быть аппроксимированы обобщенным законом Пуассона при наличии очень общих условий. Решающую роль при этом играет подходящее центрирование начального распределения. Полученные результаты близки к первой равномерной теореме Колмогорова.

Первая равномерная теорема Колмогорова утверждает, что в равномерной метрике любую n -кратную свертку можно аппроксимировать классом безгранично делимых распределений с точностью $Cn^{-2/3}$. В начале пятидесятых годов проблему предложил А. Н. Колмогоров. В последующих работах А. Н. Колмогорова [9], [10] и Ю. В. Прохорова [14], [15] было доказано, что аппроксимация равномерна по классу всех одномерных распределений и точность аппроксимации имеет, по крайней мере, порядок $n^{-1/3}$. Более того, Л. Ле Кам [11] доказал, что та же точность достигается на классе всех обобщенных пуассоновских аппроксимаций. В начале восьмидесятых Т. Арак полностью решил проблему Колмогорова для одномерных распределений. Детальный обзор первой равномерной теоремы Колмогорова можно найти в [2]. Многомерный вариант теоремы Колмогорова менее исследован. А. Ю. Зайцев [19] получил общие результаты для симметричных распределений. В общем случае Э. Л. Пресман уточнил результат В. В. Сазонова [16] и получил аналог теоремы Ле Кама, см. (1.5) ниже. В [6], [8] обсуждались возможные асимптотические разложения. В [3] изучалась последовательность бесконечномерных случайных векторов.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{F}(k)$ обозначает множество всех k -мерных распределений; $E_a \in \mathcal{F}(k)$ обозначает распределение, сконцентрированное в точке $a \in \mathbb{R}^k$, $E \equiv E_0$. Все произведения и степени мер понимаются в смысле свертки: $FG = F * G$, $F^n = F * F * \dots * F$, $F^0 = E$.

* Вильнюсский университет, факультет математики и информатики, Наугардуо, 24, 2006 Вильнюс, Литва; e-mail: vydas.cekanavicius@maf.vu.lt