Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Чяканавичюс, О многомерных обобщенных распределениях, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 3, 583–594

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3698>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:00:14

9. *Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D.* Théorèmes limites à distance finie pour les marches aléatoires. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1968, v. 4, p. 25–73.
10. *Нагаев А. В.* Некоторые замечания по поводу многомерных локальных предельных теорем. — Матем. заметки, 1973, т. 14, № 4, с. 559–563.
11. *Hill B. M.* A simple general approach to inference about the tail of a distribution. — Ann. Statist., 1975, v. 3, № 5, p. 1163–1174.

Поступила в редакцию
22.VII.1998

Исправленный вариант
3.III.1999

© 2002 г.

ЧЯКАНАВИЧЮС В.*

О МНОГОМЕРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

Рассматривается близость сверток общих обобщенных распределений к обобщенному закону Пуассона. Получено обобщение неравенства Ле Кама. Подход бесконечных сверток Боровкова–Пфайфера распространен на общий случай многомерных обобщенных распределений.

Ключевые слова и фразы: обобщенное распределение Пуассона, полная вариация, первая равномерная теорема Колмогорова.

1. Обозначения и результаты. Обобщенные распределения (см. (1.1)) используются в различных областях математики. Например, в финансовой математике распределения суммарных страховых требований являются обобщенными распределениями. В настоящей работе показывается, что свертки обобщенных распределений могут быть аппроксимированы обобщенным законом Пуассона при наличии очень общих условий. Решающую роль при этом играет подходящее центрирование начального распределения. Полученные результаты близки к первой равномерной теореме Колмогорова.

Первая равномерная теорема Колмогорова утверждает, что в равномерной метрике любую n -кратную свертку можно аппроксимировать классом безгранично делимых распределений с точностью $Cn^{-2/3}$. В начале пятидесятых годов проблему предложил А. Н. Колмогоров. В последующих работах А. Н. Колмогорова [9], [10] и Ю. В. Прохорова [14], [15] было доказано, что аппроксимация равномерна по классу всех одномерных распределений и точность аппроксимации имеет, по крайней мере, порядок $n^{-1/3}$. Более того, Л. Ле Кам [11] доказал, что та же точность достигается на классе всех обобщенных пуассоновских аппроксимаций. В начале восьмидесятых Т. Арак полностью решил проблему Колмогорова для одномерных распределений. Детальный обзор первой равномерной теоремы Колмогорова можно найти в [2]. Многомерный вариант теоремы Колмогорова менее исследован. А. Ю. Зайцев [19] получил общие результаты для симметричных распределений. В общем случае Э. Л. Пресман уточнил результат В. В. Сазонова [16] и получил аналог теоремы Ле Кама, см. (1.5) ниже. В [6], [8] обсуждались возможные асимптотические разложения. В [3] изучалась последовательность бесконечномерных случайных векторов.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{F}(k)$ обозначает множество всех k -мерных распределений; $E_a \in \mathcal{F}(k)$ обозначает распределение, сконцентрированное в точке $a \in \mathbb{R}^k$, $E \equiv E_0$. Все произведения и степени мер понимаются в смысле свертки: $FG = F * G$, $F^n = F * F * \dots * F$, $F^0 = E$.

* Вильнюсский университет, факультет математики и информатики, Наугардуко, 24, 2006 Вильнюс, Литва; e-mail: vydas.cekanavicius@maf.vu.lt

Под обобщенным распределением понимается

$$\varphi(F) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m F^m. \quad (1.1)$$

Здесь $F \in \mathcal{F}(k)$, $\sum_0^{\infty} p_m = 1$, $0 \leq p_m \leq 1$.

Отметим, что в литературе можно найти и другие, более общие, определения многомерных обобщенных распределений, см. [18]. Легко заметить, что $\varphi(F)$ является распределением суммы случайного числа одинаково распределенных случайных величин с общим распределением F . Более того, одномерное распределение $\varphi(E_1)$ является распределением числа суммируемых величин. Отметим, что любое обобщенное распределение Пуассона безгранично делимо и является частным случаем (1.1):

$$\exp\{\lambda(F - E)\} = \exp\{-\lambda\} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^m \lambda^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m (F - E)^m}{m!}. \quad (1.2)$$

Положим

$$\nu_k = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) \cdots (m-k+1) p_m, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Легко проверить, что ν_k являются факториальными кумулянтами $\varphi(E_1)$.

Для любой конечной k -мерной меры W через $\|W\|$ обозначим ее норму полной вариации. Точнее, $\|W\| = W^+\{\mathbf{R}\} + W^-\{\mathbf{R}\}$, где $W = W^+ - W^-$ является разложением Жордана-Хана для W . Аналог равномерного расстояния определяется как

$$|W| = \sup_{x \in \mathbf{R}^k} \left| W \left\{ \{u \in \mathbf{R}^k: u_j < x_j, j = 1, \dots, k\} \right\} \right|. \quad (1.4)$$

Преобразование Фурье-Стилтьеса для F обозначим через $\hat{F}(t)$. Отметим, что $\hat{E}(t) = 1$, $\hat{\varphi}(F)(t) = \varphi(\hat{F}(t))$.

Мы используем символ $C(k)$ для обозначения положительных постоянных, зависящих только от k .

В 1973 г. Э. Л. Пресман [12] доказал следующий аналог теоремы Ле Кама. Пусть $F \in \mathcal{F}(k)$, тогда

$$\inf_{a \in \mathbf{R}^k} \left| F^n - E_{-na} \exp\{n(FE_a - E)\} \right| \leq C_1(k) n^{-1/3}. \quad (1.5)$$

Отметим, что $C_1(k)$ не зависит от F . Более того, не требуется никаких моментных или других условий. В оценке (1.5) использованы лишь подходящее центрирование и структура обобщенной аппроксимации Пуассона. Центрирование необходимо. С другой стороны, из результатов данной статьи следует, что обобщенное распределение Пуассона можно заменить на другие обобщенные распределения. В одномерном случае этот факт уже был отмечен в [7].

Положим

$$\varphi_j(F) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{mj} F^m, \quad \sum_{m=0}^{\infty} p_{mj} = 1, \quad 0 \leq p_{mj} \leq 1, \quad (1.6)$$

$$\nu_{kj} = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) \cdots (m-k+1) p_{mj}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \nu_{1j}, \quad b = \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq n} \frac{\nu_{1j}}{(\nu_{1j}^2 + \nu_{2j})}, \quad (1.8)$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } b \geq 1, \\ b^{-1/2}, & \text{если } b < 1. \end{cases}$$

Можем сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 1.1. Пусть $\nu_{2j} \leq C_2(k)$, $j = 1, \dots, k$; $F \in \mathcal{F}(k)$. Тогда существует такая $C_3(k)$, что

$$\inf_{a \in \mathbf{R}^k} \left| \prod_{j=1}^n \varphi_j(FE_a) - \exp\{\lambda(FE_a - E)\} \right| \leq C_4(k) \lambda^{-1/3} \varepsilon. \quad (1.9)$$

В случае $\varphi_j \equiv \varphi$ оценку (1.9) можно упростить.

Теорема 1.2. Пусть $\varphi(F)$ определено в (1.1). Пусть $\nu_2 \leq C_5(k)$. Тогда

$$\inf_{a \in \mathbf{R}^k} \left| \varphi^n(FE_a) - \exp\{n\nu_1(FE_a - E)\} \right| \leq C_6(k) n^{-1/3} \left(\frac{\nu_2 + \nu_1}{\nu_1^2} \right)^{1/3}. \quad (1.10)$$

З а м е ч а н и е 1.1. Отметим, что в случае $\varphi(F) \equiv F$ (1.10) совпадает с (1.5).

З а м е ч а н и е 1.2. Пусть независимые случайные векторы ξ_j , $j = 1, 2, \dots$, с распределением $E_a F$ не зависят от N с распределением $\varphi(E_1)$. Тогда $\varphi(E_a F)$ есть распределение суммы $\sum_0^N \xi_j$. Более того, $\mathbf{E}N = \nu_1$ и $(\nu_2 + \nu_1)/\nu_1^2 = 1 + \mathbf{D}N/(\mathbf{E}N)^2$.

Обобщим (1.10) следующим образом. Пусть

$$\psi_j(F) = \sum_{m=0}^{\infty} q_{mj} F^m, \quad \sum_{m=0}^{\infty} q_{mj} = 1, \quad 0 \leq q_{mj} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} m p_{mj} &= \sum_{m=0}^{\infty} m q_{mj}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) p_{mj} = O(1), \\ \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) q_{mj} &= O(1). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Теорема 1.3. Пусть выполнены условия (1.12). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\inf_a \left| \prod_{j=1}^n \varphi_j(E_a F) - \prod_{j=1}^n \psi_j(E_a F) \right| = O(n^{-1/3}). \quad (1.13)$$

К.А. Боровков и Д. Пфайфер [5], исследуя суммы бернуллиевских величин, в качестве главного члена аппроксимации предложили бесконечную свертку распределений. Точнее, они доказали, что $\prod_1^n ((1-p_j)E + p_j E_1)$ можно эффективно аппроксимировать асимптотическим разложением с главным членом

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left((1-p_j)E + p_j E_1 \right) \exp\{-p_j(E_1 - E)\}. \quad (1.14)$$

Здесь $p_1, p_2, \dots$ удовлетворяют

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j = \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_j^2 < \infty. \quad (1.15)$$

К.А. Боровков и Д. Пфайфер [5] продемонстрировали свой подход на числе рекордов (максимумов) в последовательности длины n . Для этого примера точность аппроксимации имела порядок $O(n^{-2})$, что лучше по порядку по сравнению с обычной аппроксимацией Пуассона. Более того, производящая функция главного члена (1.14) выражается через гамма-функции.

Покажем, что подход Боровкова-Пфайфера можно распространить на многомерный случай. Более того, докажем, что оценки имеют место в метрике полной вариации, что является новым даже в одномерном случае. Также покажем, как строить более длинные асимптотические разложения, и рассмотрим общий случай обобщенных распределений.

Пусть $\varphi_j(\cdot)$ определено в (1.6). Пусть факториальные кумулянты $\varphi_j(E_1)$ обозначаются через Γ_{mj} , $\Gamma_{1j} = \nu_{1j}$. Предположим, что $\varphi_j(E_1)$ удовлетворяет следующему условию:

$$|\Gamma_{mj}| \leq \frac{m! \nu_{1j}}{\Delta_{m-1}^{j-1}}, \quad m = 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, \dots \quad (\tilde{S})$$

Здесь $\Delta_j > 0$, $j = 1, 2, \dots$, — некоторые положительные постоянные. Условие $(\tilde{S})$ является аналогом условия Статулявичуса для кумулянтов. Обычно оно используется в больших уклонениях — см., например, [1], [4]. Легко проверить, что любая бернуллиевская величина удовлетворяет $(\tilde{S})$ с $\nu_{1j} = p_j$ и $\Delta_j = 1/p_j$.

Пусть для всех $j = 1, 2, \dots$

$$\Delta_j > 2. \quad (1.16)$$

Если выполнены условия $(\tilde{S})$ и (1.16), то для любого $F_j \in \mathcal{F}(k)$ имеем

$$\varphi_j(F_j) = \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{mj}(F_j - E)^m}{m!} \right\}. \quad (1.17)$$

Положим

$$T_j(s) = \sum_{m=1}^s \frac{\Gamma_{mj}(F_j - E)^m}{m!}, \quad R_j(s) = \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{\Gamma_{mj}(F_j - E)^m}{m!}. \quad (1.18)$$

Из $(\tilde{S})$ и (1.16) получаем

$$\|R_j(s)\| \leq \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{|\Gamma_{mj}| \|F_j - E\|^m}{m!} \leq \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{2^m \nu_{1j}}{\Delta_j^{m-1}} \leq \frac{2\nu_{1j}(2/\Delta_j)^s}{1 - 2/\Delta_j}. \quad (1.19)$$

Положим

$$\delta_s = 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\nu_{1j}(2/\Delta_j)^s}{1 - 2/\Delta_j}. \quad (1.20)$$

Следующий результат не зависит от свойств F_j , $j = 1, 2, \dots$.

Теорема 1.4. Пусть выполняются условия $(\tilde{S})$ и (1.16), $s \geq 1$, и пусть $\delta_s < \infty$. Тогда

$$\left\| \prod_{j=1}^n \varphi_j(F_j) - \prod_{j=1}^{\infty} \exp\{R_j(s)\} \exp \left\{ \sum_{j=1}^n T_j(s) \right\} \right\| \leq \delta_s e^{\delta_s}. \quad (1.21)$$

Условие (1.16) можно ослабить. На самом деле, пусть существуют конечные меры

$$G = \prod_{j=1}^{\infty} \varphi_j(F_j) \exp \left\{ -\nu_{1j}(F_j - E) \right\},$$

$$L(s) = - \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{m=2}^s \frac{\Gamma_{mj}(F_j - E)^m}{m!}. \quad (1.22)$$

Тогда аппроксимацию из (1.21) можно представить в следующем виде:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \exp \left\{ R_j(s) \right\} \exp \left\{ \sum_{j=1}^n T_j(s) \right\} = \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \nu_{1j}(F_j - E) \right\} G \exp\{L(s)\}. \quad (1.23)$$

Из (1.23) можно вывести другие разложения. Например, можно заменить $\exp\{L\}$ на $E + L + L^2/2! + \dots + L^m/m!$ и т.д. Из (1.23) видно, что по свойствам полной вариации (см. (2.1) ниже) $\varphi_1(F_1)$ можно удалить из оценки. Это позволяет применить (1.21) даже в случае $\varphi_j(F_j) = (1 - 1/(j+1)) E + F_j/(j+1)$.

Следствие 1.1. Пусть $\varphi_j(E_1) = (1 - 1/(j+1)) E + E_1/(j+1)$, $j = 1, 2, \dots$. Пусть $s \geq 2$. Тогда для любой последовательности $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F}(k)$

$$\left\| \prod_{j=1}^n \varphi_j(F_j) - \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{F_j - E}{j+1} \right\} G \exp\{L(s)\} \right\| = O(n^{-s}), \quad (1.24)$$

$$\left\| \prod_{j=1}^n \varphi_j(F_j) - \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{F_j - E}{j+1} \right\} G(E + L(2)) \right\| = O(n^{-2}). \quad (1.25)$$

З а м е ч а н и е 1.3. Число рекордов, рассмотренное в [5], соответствует случаю $F_j \equiv E_1 \in \mathcal{F}(1)$. Отметим, что в [5] использовалось разложение, похожее на (1.25), и были получены небольшие абсолютные постоянные. Однако Боровков и Пфайфер [5] исследовали только равномерное расстояние. Более того, (1.24) дает явное представление о построении асимптотических разложений.

З а м е ч а н и е 1.4. Отметим, что в теоремах 1.1–1.4 исследовался случай схемы серий, т.е. величины F_j , F , φ_j могут зависеть от n . Более того, F_j , F могут не иметь конечных моментов.

Оценку (1.21) можно уточнить, если $F_j \equiv F$ для всех $j = 1, 2, \dots$. Тогда в оценке появляется дополнительный множитель $(\sum_1^n \nu_{1j})^{-(s+1)/2}$. Продemonстрируем это свойство только для случая $\varphi_j(F) = (1 - p_j)E + p_jF$.

Введем аналоги G и $L(s)$:

$$\begin{aligned} G_1(F) &= \prod_{j=1}^{\infty} \left((1 - p_j)E + p_jF \right) \exp \left\{ -p_j(F - E) \right\}, \\ L_1(s) &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{m=2}^s \frac{(-1)^m}{m} p_j^m (F - E)^m. \end{aligned} \quad (1.26)$$

(Как обычно, полагаем $\sum_{m=2}^1 = 0$.) Положим $\mu = \sum_{j=1}^n p_j$.

Теорема 1.5. Пусть $p_1, p_2, \dots$ удовлетворяют условию (1.15), и пусть $p_j \leq \frac{1}{3}$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда для любого $s \geq 2$

$$\begin{aligned} \sup_{F \in \mathcal{F}(k)} \left\| \prod_{j=1}^n \left((1 - p_j)E + p_jF \right) - \exp \left\{ \mu(F - E) \right\} G_1(F) \exp \{ L_1(s) \} \right\| \\ \leq C(s) \sum_{j=n+1}^{\infty} p_j^{s+1} \mu^{-(s+1)/2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

З а м е ч а н и е 1.5. Пусть $F = E_1 \in \mathcal{F}(1)$, $s = 1$. Тогда (1.27) соответствует общему случаю из [5]. Мы использовали более сильное расстояние полной вариации и отметили возможность построения более длинных асимптотических разложений. С другой стороны, в [5] даны явные константы.

В принципе, предположение $p_j \leq \frac{1}{3}$ можно ослабить. Например, когда $F_j \equiv F$, можно уточнить (1.24) следующим образом.

Следствие 1.2. Пусть $p_j = 1/(j+1)$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{F \in \mathcal{F}(k)} \left\| \prod_{j=1}^n \left(\left(1 - \frac{1}{j+1} \right) E + \frac{F}{j+1} \right) - \exp \{ \mu(F - E) \} G_1(F) (E + L_1(2)) \right\| \\ = O \left(n^{-2} (\ln n)^{-3/2} \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

З а м е ч а н и е 1.6. Пусть $F \equiv E_1 \in \mathcal{F}(1)$. Тогда разложение (1.28) очень похоже на разложение для числа рекордов из [5]. Однако нами получена точность несколько лучше ($O(n^{-2} (\ln n)^{-3/2})$ вместо $O(n^{-2})$), что позволяет предположить возможность улучшения оценки из [5].

2. Доказательства. В дальнейшем для краткости один и тот же символ $C(k)$ используется для всех (вообще говоря, различных) положительных постоянных, зависящих только от k . Аналогично, C используется для обозначения всех абсолютных положительных постоянных.

Мы постоянно будем обращаться к следующим свойствам полной вариации. Пусть W , V — конечные меры, $F \in \mathcal{F}(k)$. Тогда

$$\|WV\| \leq \|W\| \|V\|, \quad |W| \leq \|W\|, \quad (2.1)$$

$$\|E_a W\| = \|W\|, \quad |E_a W| = |W|, \quad \|F\| = 1. \quad (2.2)$$

Начнем с доказательства теоремы 1.1. Если $\lambda \leq 2$, то (1.9) следует из того, что левая часть (1.9) не превышает 2. Поэтому можем считать, что $\lambda > 2$.

Предположим, что $F \in \mathcal{F}(k)$ непрерывное. В [12] показано, что для любого $0 < p < 1$ существует a такое, что

$$E_a F = (1 - p) M + pK. \quad (2.3)$$

Здесь $M \in \mathcal{F}(k)$ сосредоточено внутри прямоугольного параллелепипеда (т.е. в некотором множестве вида $\{x \in \mathbf{R}^k: x_i^- < x_i < x_i^+\}$) и $K \in \mathcal{F}(k)$ сосредоточено вне его. Существует непрерывное распределение $W \in \mathcal{F}(k)$ такое, что его плотность выражается через функции Бесселя и для любого натурального s

$$\left| W(M^s - \exp\{s(M - E)\}) \right| \leq \frac{C(k)}{s+1}. \quad (2.4)$$

Более того, для $r, s > 0$

$$\left| W\left(\exp\{r(M - E)\} - \exp\{s(M - E)\}\right) \right| \leq C(k) \frac{|r - s|}{s}. \quad (2.5)$$

Для $\tau > 0$ положим

$$Q(K, \tau) = \sup_A K\{(\partial A)_\tau\}, \quad (2.6)$$

где $(\partial A)_\tau$ означает τ -окрестность границы множества A , а супремум берется по всем прямоугольникам со сторонами, параллельными координатным осям. Как показано в [12], существует $\tau = \tau(k) > 0$ такое, что для любого натурального $s > 0$

$$Q(K^s, \tau) \leq C(k) (\tau(s+1))^{-1/2}. \quad (2.7)$$

Положим

$$U = \prod_{j=1}^n \varphi_j(E_a F) - \exp\{\lambda(E_a F - E)\}. \quad (2.8)$$

Тогда по варианту неравенства сглаживания Ле Кама из [12] получаем

$$|U| \leq C(k) \left(|WU| + Q(\exp\{\lambda(E_a F - E)\}, \tau) \right). \quad (2.9)$$

Здесь $\tau = \tau(k)$ и имеют место неравенства (2.4), (2.5) и (2.7).

Учитывая свойства Q (см. [12]) и (2.7), можем оценить второе слагаемое в (2.9) следующим образом:

$$\begin{aligned} Q\left(\exp\{\lambda(E_a F - E)\}, \tau\right) &\leq Q\left(\exp\{\lambda p(K - E)\}, \tau\right) \leq \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^m}{m!} Q(K^m, \tau) \\ &\leq C(k) \tau \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^m}{m! \sqrt{m+1}} \leq \frac{C(k)}{\sqrt{\lambda p}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

По неравенству треугольника получаем

$$\begin{aligned} |WU| &\leq \left| \left(\prod_{j=1}^n \varphi_j(E_a F) - \exp\left\{\lambda(1-p)(M - E)\right\} \prod_{j=1}^n \varphi_j(H) \right) W \right| \\ &\quad + \left| \exp\left\{\lambda(1-p)(M - E)\right\} \left(\prod_{j=1}^n \varphi_j(H) - \exp\{\lambda p(K - E)\} \right) W \right| \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь $H = (1 - p) E + pK$.

Имеем

$$\prod_{j=1}^n \varphi_j(E_a F) = \sum_{j=0}^n p_j(n) (E_a F)^j. \quad (2.12)$$

Здесь $p_j(n)$, $j = 0, 1, \dots$, обозначают вероятности $\mathbf{P}\{S_n = j\}$, где S_n имеет распределение $\prod_1^n \varphi_j(E_1)$, т.е. $\prod_1^n \varphi_j(E_1) = \sum_0^\infty p_j(n) E_j$. Отметим, что $S_n = \sum_1^n \eta_j$, где все η_j независимы и имеют распределения $\varphi_j(E_1)$, $j = 1, 2, \dots$.

Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} p_j(n) \left| W\left((E_a F)^j - \exp\{\lambda(1-p)(M-E)\} H^j\right) \right| \\ &= \sum_{j \geq \lambda/2} + \sum_{j < \lambda/2} = I_{11} + I_{12}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Разность между двумя распределениями меньше, чем 2. Мы предположили, что $\lambda > 2$. Поэтому

$$\begin{aligned} I_{12} &\leq C(k) \sum_{j < \lambda/2} p_j(n) \leq 2C(k) \sum_{j < \lambda/2} p_j(n) \frac{|\lambda - j|}{\lambda} \leq C(k) \sqrt{\mathbf{D} S_n} \lambda^{-1} \\ &= C(k) \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{D} \xi_j \right)^{1/2} \lambda^{-1} = C(k) \left(\sum_{j=1}^n (\nu_{2j} + \nu_{1j} - \nu_{1j}^2) \right)^{1/2} \lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Применяя (2.4) и (2.5), получаем

$$\begin{aligned} &\left| W\left((E_a F)^j - \exp\{\lambda(1-p)(M-E)\} H^j\right) \right| \\ &\leq \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (1-p)^m p^{j-m} \left(\left| W\left(M^m - \exp\{m(M-E)\}\right) K^{j-m} \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| W\left(\exp\{m(M-E)\} - \exp\{\lambda(1-p)(M-E)\}\right) K^{j-m} \right| \right) \\ &\leq C(k) \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (1-p)^m p^{j-m} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{|m - \lambda(1-p)|}{\lambda(1-p)} \right) \\ &\leq C(k) \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (1-p)^m p^{j-m} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{|m - j(1-p)|}{\lambda(1-p)} + \frac{|j - \lambda|}{\lambda} \right) \\ &\leq C(k) \left(\frac{1}{(1-p)(j+1)} + \frac{\sqrt{jp(1-p)}}{\lambda(1-p)} + \frac{|j - \lambda|}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{11} &\leq C(k) \sum_{j \geq \lambda/2} p_j(n) \left(\frac{1}{(1-p)(j+1)} + \frac{\sqrt{jp(1-p)}}{\lambda(1-p)} + \frac{|j - \lambda|}{\lambda} \right) \\ &\leq C(k) \left([(1-p)\lambda]^{-1} + (\mathbf{E} S_n)^{1/2} p^{1/2} (1-p)^{-1/2} \lambda^{-1} + (\mathbf{D} S_n)^{1/2} \lambda^{-1} \right) \\ &\leq C(k) \left([(1-p)\lambda]^{-1} + p^{1/2} (1-p)^{-1/2} \lambda^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{j=1}^n (\nu_{2j} + \nu_{1j} - \nu_{1j}^2) \right)^{1/2} \lambda^{-1} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Дальнейшее доказательство зависит от поведения b . Сначала предположим, что $b \geq 1$. Тогда $\nu_{1j}^2 + \nu_{2j} \leq \nu_{1j}/2$ для всех $j = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^n (\nu_{2j} + \nu_{1j} - \nu_{1j}^2) \leq 2\lambda. \quad (2.17)$$

Положим $p = \lambda^{-1/3}$. Тогда из (2.9)–(2.11), (2.14), (2.16) и (2.17) получаем

$$|U| \leq C(k) \lambda^{-1/3} + I_2. \quad (2.18)$$

Положим

$$U_1 = \prod_{j=1}^n \varphi_j((1-p)E + pE_1) - \exp\{\lambda p(E_1 - E)\}. \quad (2.19)$$

Отметим, что в (2.19) распределения одномерны. Из свойств полной вариации (см., например, [8]) получаем

$$I_2 \leq \|U_1\|. \quad (2.20)$$

В силу $\nu_{1j}^2 + \nu_{2j} \leq \nu_{1j}/2$ имеем

$$\nu_{1j}p - \nu_{1j}^2p^2 - \nu_{2j}p^2 \geq \frac{\nu_{1j}p}{2}.$$

Следовательно, применяя разложение характеристической функции по факториальным моментам, получаем

$$\varphi_j\left((1-p) + pe^{it}\right) = 1 + \nu_{1j}p(e^{it} - 1) + \theta_1\nu_{2j}p^2 \frac{(e^{it} - 1)^2}{2}.$$

Здесь $|\theta_1| \leq 1$. Отметим, что аналогичное разложение имеет место и для распределений, см. [8]. Поэтому, после довольно очевидных вычислений (см. также [17]), устанавливаем, что для $|t| \leq \pi$

$$\left|\varphi_j\left((1-p) + pe^{it}\right)\right|, \left|\exp\left\{\nu_{1j}p(e^{it} - 1)\right\}\right| \leq \exp\left\{-\nu_{1j}p \sin^2 \frac{t}{2}\right\}, \quad (2.21)$$

$$\left|\widehat{U}_1(t)\right| \leq C \sum_{j=1}^n (\nu_{2j} + \nu_{1j}^2) p \lambda^{-1} \exp\{-C\lambda p t^2\} \leq C \lambda^{-1/3} \exp\{-C\lambda p t^2\}, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \left|\left(\widehat{U}_1(t) \exp\{-it\lambda p\}\right)'\right| &\leq C \sum_{j=1}^n (\nu_{2j} + \nu_{1j}^2) p \lambda^{-1} \exp\{-C\lambda p t^2\} (\lambda p)^{1/2} \\ &\leq C \lambda^{-1/3} \exp\{-C\lambda p t^2\} (\lambda p)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Например,

$$\begin{aligned} \left|\varphi_j\left((1-p) + pe^{it}\right)\right| &\leq \left|1 + \nu_{1j}p(e^{it} - 1) + \nu_{2j}p^2 \frac{e^{it} - 1}{2}\right| \\ &\leq \left(\left((1 - \nu_{1j}p) + \nu_{1j}p \cos t\right)^2 + (\nu_{1j}p)^2 \sin^2 t\right)^{1/2} + 2\nu_{2j}p^2 \sin^2 \frac{t}{2} \\ &\leq \left(1 - 4\nu_{1j}p(1 - \nu_{1j}p) \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{1/2} + 2\nu_{2j}p^2 \sin^2 \frac{t}{2} \\ &\leq 1 - 2(\nu_{1j}p - \nu_{1j}^2p^2 - \nu_{2j}p^2) \sin^2 \frac{t}{2} \leq 1 - \nu_{1j}p \sin^2 \frac{t}{2} \leq \exp\left\{-\nu_{1j}p \sin^2 \frac{t}{2}\right\}. \end{aligned}$$

По формуле обращения (см., например, [13] или [17]) имеем

$$\|U_1\|^2 \leq C \int_{-\pi}^{\pi} \left(|\widehat{U}_1(t)|^2 (\lambda p)^{1/2} + \left|\left(\widehat{U}_1(t) \exp\{-it\lambda p\}\right)'\right| (\lambda p)^{-1/2}\right) dt. \quad (2.24)$$

Из (2.22)–(2.24) получаем оценку $\|U_1\| \leq C \lambda^{-1/3}$, которая вместе с (2.18) и (2.20) завершает доказательство (1.9) для $b \geq 1$.

Пусть $b < 1$. Положим $p = \lambda^{-1/3}b$. Собирая оценки (2.14), (2.16), (2.13), (2.11), (2.10) и (2.9), получаем

$$|U| \leq C(k) \lambda^{-1/3} \varepsilon + I_2. \quad (2.25)$$

Остается оценить I_2 . Пусть $\lambda p \leq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} I_2 \leq \|U_1\| &\leq \sum_{j=1}^n \left\| \prod_{m=1}^j \varphi_m((1-p)E + pE_1) \prod_{m=j+1}^n \exp\{\nu_{1j}p(E_1 - E)\} \right\| \\ &\quad \times \left\| \varphi_j((1-p)E + p_jE_1) - \exp\{\nu_{1j}p(E_1 - E)\} \right\| \\ &\leq C(k) \sum_{j=1}^n (\nu_{1j}^2 + \nu_{2j}) p^2 \|E_1 - E\|^2 \\ &\leq C(k) \sum_{j=1}^n (\nu_{1j}^2 + \nu_{2j}) 2^2 p \lambda^{-1} \leq C(k) \lambda^{-1/3} \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Пусть $\lambda p > 2$. Тогда (см. [13] или [17]) можно применить неравенство (2.24). Более того, учитывая, что $\lambda > 2$, из определения b получаем $p = \lambda^{-1/3} b \leq b \leq 2^{-1} \nu_{1j} / (\nu_{1j}^2 + \nu_{2j})$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно, для всех j имеем

$$(\nu_{1j}^2 + \nu_{2j}) p \leq \frac{\nu_{1j}}{2} \quad \text{и} \quad \nu_{1j} p - \nu_{1j}^2 p^2 - \nu_{2j} p^2 \geq \frac{\nu_{1j} p}{2}.$$

Последнего неравенства достаточно для получения (2.21) и промежуточных оценок в (2.22) и (2.23), тем самым и для доказательства неравенства $I_2 \leq C(k) \sum (\nu_{1j}^2 + \nu_{2j}) p \lambda^{-1}$. Объединяя эту оценку с (2.25) и (2.26), получаем (1.9) для непрерывного F .

Рассмотрим случай разрывного F . Используем сглаженное распределение $\Phi_\sigma F$. Здесь $\Phi_\sigma \in \mathcal{F}(k)$ — нормальное распределение с нулевым средним и матрицей вторых моментов $\sigma^{-2} \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Теперь для любого фиксированного n можем поступать, как прежде, и найти $a = a(\sigma)$. Как доказал В. В. Сазонов [16], $a(\sigma)$ ограничено относительно σ . Поэтому можем применить следующее неравенство:

$$\inf_a \left| \prod_{j=1}^n \varphi_j(E_a F) - \exp\{\lambda(E_a F - E)\} \right| \leq \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left| \prod_{j=1}^n \varphi_j(E_{a(\sigma)} F) - \exp\{\lambda(E_{a(\sigma)} F - E)\} \right|.$$

Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2 проходит в точности как раньше, за исключением более точной оценки I_2 . Пусть $n\nu_1 \leq 16$. Тогда левая часть (1.10) меньше, чем $2 \leq C(n\nu_1)^{-1/3} \leq Cn^{-1/3}((\nu_1 + \nu_2)/\nu_1)^{1/3}$.

Пусть $n\nu_1 > 16$. Левая часть (1.10) меньше, чем 2. Рассуждая в точности так же, как при доказательстве теоремы 1.1, устанавливаем, что (1.10) имеет место для $b \geq 1$. Пусть $b < 1$. Положим $p = \lambda^{-1/3} b^{2/3}$. Отметим, что

$$p = \lambda^{-1/3} b^{2/3} = 2^{-2/3} \nu_1^{1/3} n^{-1/3} (\nu_1^2 + \nu_2)^{-2/3} \leq 2^{-2/3} \nu_1^{1/3} n^{-1/3} (2\nu_1^{1/2} n^{-1/2})^{-2/3} \leq 2^{-1}.$$

Из (2.9)–(2.11), (2.13), (2.14) и (2.16) получаем, что

$$\left| \varphi^n(FE_a) - \exp\{n\nu_1(FE_a - E)\} \right| \leq C(k) n^{-1/3} \left(\frac{\nu_2 + \nu_1}{\nu_1^2} \right)^{1/3} + I_2. \quad (2.27)$$

Можно показать, что

$$I_2 \leq \|U_1\| \leq \frac{Cp(\nu_1^2 + \nu_2)}{\nu_1}. \quad (2.28)$$

В самом деле, если $n\nu_1 p \leq 2$, то можно использовать (2.26). Если же $(\nu_1^2 + \nu_2)p \leq \nu_1/2$, то та же оценка может быть доказана тем же методом, что и выше. Если $(\nu_1^2 + \nu_2)p > \nu_1/2$, то $I_2 \leq 2 Cp(\nu_1^2 + \nu_2)/\nu_1$. Сочетая (2.28) с (2.27), получаем (1.10).

Для доказательства теоремы 1.3 заметим, что выбор a определяется поведением F и не связан с поведением φ_j или ψ_j . Поэтому можно использовать неравенство треугольника и теорему 1.1.

Для доказательства теоремы 1.4 заметим, что ввиду свойств нормы полной вариации левая часть (1.21) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left\| \prod_{j=1}^n \varphi_j(F_j) \left(E - \exp \left\{ \sum_{j=n+1}^{\infty} R_j(s) \right\} \right) \right\| \leq \left\| E - \exp \left\{ \sum_{j=n+1}^{\infty} R_j(s) \right\} \right\| \\ & \leq \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} R_j(s) \right\| \exp \left\{ \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} R_j(s) \right\| \right\} \leq \delta_s \exp\{\delta_s\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Пусть $\Gamma_{mj} = (-1)^m(j+1)^{-m}(m-1)!$, $\nu_{1j} = 1/(j+1)$, $\Delta_j = j+1$. Тогда

$$\delta_s \leq 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j+1} \left(\frac{2}{j+1} \right)^s \left(1 - \frac{2}{j+1} \right)^{-1} = O(n^{-s}).$$

Оценка (1.24) следует прямо из теоремы 1.4. Более того, $\|L(2)\| \leq \sum_{n+1}^{\infty} (j+1)^{-2} = O(n^{-1})$. Значит,

$$\begin{aligned} & \left\| E - (E + L(2)) \exp\{-L(2)\} \right\| = \left\| E - (E + L(2)) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-L(2))^m}{m!} \right\| \\ & \leq \|L(2)\|^2 + (1 + \|L(2)\|) \|L(2)\|^2 \exp\{\|L(2)\|\} = O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Более того, из (1.24), (1.23), (1.21) следует

$$\begin{aligned} & \left\| \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{F_j - E}{j+1} \right\} G(\exp\{L(2)\} - (E + L(2))) \right\| \\ & \leq \left\| \prod_{j=1}^{\infty} \exp\{R_j(2)\} \exp \left\{ \sum_{j=1}^n T_j(2) \right\} \right\| \left\| E - (E + L(2)) \exp\{-L(2)\} \right\| \\ & \leq \left(\left\| \prod_{j=1}^n \varphi_j(F_j) \right\| + \delta_s \exp\{\delta_s\} \right) \left\| E - (E + L(2)) \exp\{-L(2)\} \right\| = O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Последняя оценка доказывает (1.25).

Доказательство теоремы 1.5 почти совпадает с доказательством теоремы 1.4. Отметим, что в этом случае

$$\delta_s = 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{p_j^{s+1} 2^s}{1 - 2p} \leq C(s) \sum_{m=n+1}^{\infty} p_j^{s+1}$$

и

$$\|G_1(F)\| \leq \exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} (2p_j)^m \right\} \leq C. \quad (2.30)$$

Применяя (1.23) и рассуждая, как в (2.29), доказываем, что левая часть (1.27) меньше, чем

$$\begin{aligned} & C(s) \delta_s \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{m=s+1}^{\infty} (2p_j)^m \sup_{f \in \mathcal{F}(k)} \left\| \prod_{j=1}^n ((1-p_j)E + p_j F)(F - E)^{s+1} \right\| \\ & \leq C(s) \sum_{j=n+1}^{\infty} p_j^{s+1} \left\| \prod_{j=1}^n ((1-p_j)E + p_j E_1)(E_1 - E)^{s+1} \right\|. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Применяя вполне стандартные рассуждения (см. [13], [17] или (2.24)), можно показать, что

$$\left\| \prod_{j=1}^n ((1-p_j)E + p_j E_1)(E_1 - E)^{s+1} \right\| \leq C \mu^{-(s+1)/2}.$$

Очевидно, что это завершает доказательство теоремы 1.5.

Доказательство следствия 1.2 основывается на том, что по (2.1)

$$\begin{aligned} & \left\| \prod_{j=1}^n \left(\left(1 - \frac{1}{j+1} \right) E + \frac{F}{j+1} \right) - \exp \{ \mu(F-E) \} G_1(F) \exp \{ L_1(2) \} \right\| \\ & \leq \left\| \prod_{j=2}^n \left(\left(1 - \frac{1}{j+1} \right) E + \frac{F}{j+1} \right) - \exp \left\{ \sum_{j=2}^n \frac{F-E}{j+1} \right\} \right. \\ & \quad \times \left. \prod_{j=2}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{j+1} \right) E + \frac{F}{j+1} \right) \exp \left\{ - \frac{F-E}{j+1} \right\} \exp \{ L_1(2) \} \right\|. \end{aligned}$$

К полученному выражению можно применить оценку (1.27). Отметим, что $\|L_1(2)\| \leq \|F-E\| \sum_{j=n+1}^{\infty} (j+1)^{-2}$. Учитывая (2.30), убеждаемся, что достаточно оценить

$$\begin{aligned} & \left\| \exp \{ \mu(F-E) \} \left(\exp \{ L_1(2) \} - (E + L_1(2)) \right) \right\| \\ & \leq \left\| L_1^2(2) \exp \{ \mu(F-E) \} \exp \{ \|L_1(2)\| \} \right\| \\ & \leq C \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} (j+1)^{-2} \right)^2 \left\| (F-E)^2 \exp \{ \mu(F-E) \} \right\|^2. \end{aligned}$$

В силу (2.1)

$$\left\| (F-E)^2 \exp \{ \mu(F-E) \} \right\|^2 \leq \left\| (E_1-E) \exp \left\{ \frac{\mu(E_1-E)}{2} \right\} \right\|^4 \leq C\mu^{-2}.$$

Собирая последние две оценки, получаем утверждение следствия 1.2.

Выражаю глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешкявичене А. К., Статулявичус В. А. Большие отклонения в степенных зонах при аппроксимации законом Пуассона. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, в. 5, с. 64–82.
2. Арак Т. В., Зайцев А. Ю. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1986, т. 174, с. 1–216.
3. Bentkus V., Götze F., Zaitsev A. Yu. Approximation of quadratic forms of independent random vectors by accompanying laws. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 2, с. 308–335.
4. Бикялис А., Жемайтис А. Асимптотические разложения для вероятностей больших отклонений. — Применения теории вероятностей и математической статистики. Т. 3. Вильнюс: Изд-во Вильнюс. ун-та, 1980, с. 9–39.
5. Borovkov K. A., Pfeifer D. On improvements of the order of approximation in the Poisson limit theorem. — J. Appl. Probab., 1996, v. 33, № 1, p. 146–155.
6. Čekanavičius V. On asymptotic expansions in the first uniform Kolmogorov theorem. — Statist. Probab. Lett., 1995, v. 25, № 1, p. 145–151.
7. Čekanavičius V. On compound approximations. — Probab. Math. Statist., 1996, v. 16, № 2, p. 275–285.
8. Čekanavičius V. Estimates in total variation for convolutions of compound distributions. — J. London Math. Soc., 1998, v. 58, № 3, p. 748–760.
9. Колмогоров А. Н. Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 4, с. 426–436.
10. Kolmogorov A. N. On the approximation of distributions of sums of independent summands by infinitely divisible distributions. — Sankhyā, Ser. A, 1963, v. 25, p. 159–174.

11. *Le Cam L.* On the distribution of sums of independent random variables. — Bernoulli 1713, Bayes 1763, Laplace 1813. Anniversary volume. Ed. by J. Neyman and L. Le Cam. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1965, p. 179–202.
12. *Пресман Э. Л.* О многомерном варианте равномерной предельной теоремы Колмогорова. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, в. 2, с. 396–402.
13. *Пресман Э. Л.* О сближении биномиальных и безгранично делимых распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 2, с. 372–382.
14. *Прохоров Ю. В.* О суммах одинаково распределенных величин. — Докл. АН СССР, 1955, т. 105, № 4, с. 645–647.
15. *Прохоров Ю. В.* О равномерной предельной теореме А. Н. Колмогорова. — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 1, с. 103–113.
16. *Сазонов В. В.* О сближении распределений сумм независимых случайных величин с классом безгранично делимых распределений в многомерном случае. — Труды Тбил. ун-та, сер. А, физ.-матем. и естеств. науки, 1972, т. 4, с. 29–37.
17. *Шяулис Й., Чяканавичюс В.* Аппроксимация распределений целозначных аддитивных функций дискретными зарядами. I. — Литов. матем. сб., 1988, т. 28, № 4, с. 795–810.
18. *Wang Y. H.* On the multivariate compound distributions. — J. Multivariate Anal., 1996, v. 59, № 1, p. 13–21.
19. *Зайцев А. Ю.* Об аппроксимации сверток многомерных симметричных распределений сопровождающими законами. — Зап. научн. семина. ЛОМИ, 1989, т. 177, с. 55–72.

Поступила в редакцию
18.VII.2000

© 2002 г.

ШЕРСТНЕВ В. И.*

РАЗЛОЖЕНИЯ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ¹⁾

В работе описаны все возможные разложения равномерного распределения на конечной группе в свертку вероятностных распределений на той же группе. Рассмотрены примеры разложения равномерного распределения на некоторых специальных группах.

Ключевые слова и фразы: вероятностные распределения на группах, разложение вероятностных распределений.

1. Введение. Рассмотрим группу G порядка $m < \infty$. Пусть независимые случайные величины ξ и η принимают значения на этой группе. При каких условиях случайная величина $\xi \cdot \eta$ равномерно распределена на G ?

Очевидно, что если одна из рассматриваемых случайных величин имеет равномерное распределение, то произведение также будет иметь равномерное распределение. Для групп не более чем третьего порядка других разложений равномерного распределения не существует. Для любой группы большего порядка существуют разложения равномерного распределения в свертку двух распределений, ни одно из которых не является равномерным.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: sherstn@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00531) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект 96-15-96092).