Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Шерстнев, Разложения равномерного распределения на конечной группе, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 3, 594–599

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 10:58:59

11. *Le Cam L.* On the distribution of sums of independent random variables. — Bernoulli 1713, Bayes 1763, Laplace 1813. Anniversary volume. Ed. by J. Neyman and L. Le Cam. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1965, p. 179–202.
12. *Пресман Э. Л.* О многомерном варианте равномерной предельной теоремы Колмогорова. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, в. 2, с. 396–402.
13. *Пресман Э. Л.* О сближении биномиальных и безгранично делимых распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 2, с. 372–382.
14. *Прохоров Ю. В.* О суммах одинаково распределенных величин. — Докл. АН СССР, 1955, т. 105, № 4, с. 645–647.
15. *Прохоров Ю. В.* О равномерной предельной теореме А. Н. Колмогорова. — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 1, с. 103–113.
16. *Сазонов В. В.* О сближении распределений сумм независимых случайных величин с классом безгранично делимых распределений в многомерном случае. — Труды Тбил. ун-та, сер. А, физ.-матем. и естеств. науки, 1972, т. 4, с. 29–37.
17. *Шяулис Й., Чяканавичюс В.* Аппроксимация распределений целозначных аддитивных функций дискретными зарядами. I. — Литов. матем. сб., 1988, т. 28, № 4, с. 795–810.
18. *Wang Y. H.* On the multivariate compound distributions. — J. Multivariate Anal., 1996, v. 59, № 1, p. 13–21.
19. *Зайцев А. Ю.* Об аппроксимации сверток многомерных симметричных распределений сопровождающими законами. — Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1989, т. 177, с. 55–72.

Поступила в редакцию
18.VII.2000

© 2002 г.

ШЕРСТНЕВ В. И.*

РАЗЛОЖЕНИЯ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ¹⁾

В работе описаны все возможные разложения равномерного распределения на конечной группе в свертку вероятностных распределений на той же группе. Рассмотрены примеры разложения равномерного распределения на некоторых специальных группах.

Ключевые слова и фразы: вероятностные распределения на группах, разложение вероятностных распределений.

1. Введение. Рассмотрим группу G порядка $m < \infty$. Пусть независимые случайные величины ξ и η принимают значения на этой группе. При каких условиях случайная величина $\xi \cdot \eta$ равномерно распределена на G ?

Очевидно, что если одна из рассматриваемых случайных величин имеет равномерное распределение, то произведение также будет иметь равномерное распределение. Для групп не более чем третьего порядка других разложений равномерного распределения не существует. Для любой группы большего порядка существуют разложения равномерного распределения в свертку двух распределений, ни одно из которых не является равномерным.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: sherstn@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00531) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект 96-15-96092).

Для абелевых групп все возможные варианты распределений, свертка которых является равномерным распределением, были описаны в [1]. Там же приведен список работ, относящихся к рассматриваемой задаче. Примеры разложений равномерного распределения были приведены также в [2].

В данной работе описаны все вероятностные распределения на конечной группе, свертка которых является равномерным распределением.

Специальным случаем рассматриваемой задачи является разложение равномерного распределения в свертку некоторого распределения с самим собой, т.е. извлечение «квадратного корня» из равномерного распределения. В [3] доказано, что равномерное распределение на компактной сепарабельной топологической группе можно представить в виде свертки двух одинаковых не равномерных распределений тогда и только тогда, когда группа неабелева и не изоморфна прямому произведению группы кватернионов и произведения двухэлементных групп. Для компактных топологических групп аналогичный результат доказан в [4].

2. Построение разложений. Упорядочим элементы группы G таким образом, чтобы первым элементом был единичный. Пусть случайные величины ξ и η имеют распределения $\mathbf{p} = (p_g, g \in G) = (\mathbf{P}\{\xi = g\}, g \in G)$ и $\mathbf{q} = (q_g, g \in G) = (\mathbf{P}\{\eta = g\}, g \in G)$. Распределения $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ теперь можно рассматривать как m -мерные векторы.

Обозначим ρ неприводимое унитарное представление группы G (используемые сведения из алгебры можно найти, например, в [2] и [6]). При этом значениями представления ρ на элементах $g \in G$ являются унитарные матрицы $\rho(g) = (\rho_{kl}(g))$ размера $d_\rho \times d_\rho$, где d_ρ — степень представления ρ . Преобразование Фурье вектора $\mathbf{p}$ на группе будем обозначать $\hat{\mathbf{p}}(\rho) = (\hat{\mathbf{p}}_{kl}(\rho)) = \sum_{g \in G} p_g \rho(g)$.

По формуле обращения преобразования Фурье

$$p_g = \frac{1}{m} \sum_{\rho} d_{\rho} \operatorname{Tr}(\rho(g^{-1}) \hat{\mathbf{p}}(\rho))$$

(суммирование здесь ведется по всем неприводимым представлениям ρ , причем d_{ρ} равно степени представления ρ). Для унитарных представлений это равенство можно переписать в виде

$$p_g = \frac{1}{m} \sum_{\rho} d_{\rho} \sum_{k,l=1}^{d_{\rho}} \bar{\rho}_{kl}(g) \hat{\mathbf{p}}_{kl}(\rho). \quad (1)$$

Введем систему m -мерных векторов $\mathfrak{X} = \{\mathbf{x}_{kl}^{\rho}\} = \{(\bar{\rho}_{kl}(g), g \in G)\}$, где индекс ρ пробегает все неприводимые представления и k, l принимают значения от 1 до d_{ρ} (степени представления ρ). По известной теореме порядок группы равен сумме квадратов степеней всех ее неприводимых представлений, поэтому $\mathfrak{X}$ содержит m векторов. Эта система векторов образует ортогональный базис в пространстве $\mathbf{C}^m$.

Тривиальному представлению ρ_1 в системе векторов $\mathfrak{X}$ соответствует вектор $(1, \dots, 1)$. Обозначим этот вектор $\mathbf{x}_{11}^{\rho_1}$. Преобразование Фурье любого вероятностного распределения принимает на тривиальном представлении значение 1.

Теперь равенство (1) можно записать в векторном виде

$$\mathbf{p} = \frac{1}{m} \mathbf{x}_{11}^{\rho_1} + \sum_{\rho \neq \rho_1} \sum_{k,l=1}^{d_{\rho}} \frac{d_{\rho}}{m} \hat{\mathbf{p}}_{lk}(\rho) \mathbf{x}_{kl}^{\rho}, \quad (2)$$

где сумма по ρ берется уже по нетривиальным неприводимым представлениям.

Используя формулу обращения преобразования Фурье, легко видеть, что для того чтобы свертка распределений $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ была равномерным распределением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\hat{\mathbf{p}}(\rho) \hat{\mathbf{q}}(\rho) = 0 \quad \text{для } \rho \neq \rho_1, \quad \hat{\mathbf{p}}(\rho_1) \hat{\mathbf{q}}(\rho_1) = 1. \quad (3)$$

Опишем все пары $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, которые удовлетворяют данным условиям.

Будем искать распределения $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, удовлетворяющие условию (3), в виде

$$\mathbf{p} = \frac{1}{m} \mathbf{x}_{11}^{\rho_1} + \sum_{\rho} \sum_{k,l} v_{kl}^{\rho} \mathbf{x}_{kl}^{\rho}, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{m} \mathbf{x}_{11}^{\rho_1} + \sum_{\rho} \sum_{k,l} w_{kl}^{\rho} \mathbf{x}_{kl}^{\rho}. \quad (4)$$

Для построения искомого разложения равномерного распределения осталось найти условия на коэффициенты v и w .

Введем $d_\rho \times d_\rho$ -матрицы $V^\rho = \{v_{kl}^\rho\}$ и $W^\rho = \{w_{kl}^\rho\}$, тогда $\hat{\mathbf{p}}(\rho) = V^\rho$, $\hat{\mathbf{q}}(\rho) = W^\rho$. Так как $\hat{\mathbf{p}}(\rho)\hat{\mathbf{q}}(\rho) = V^\rho W^\rho$, то для выполнения условия (3) необходимо и достаточно, чтобы произведение было нулевым для матриц, построенных для всех нетривиальных неприводимых представлений группы.

Вероятностные распределения задаются действительными векторами, тогда как базисные векторы системы $\mathfrak{X}$ могут содержать мнимую часть. Однако избавиться от мнимой части можно, объединив при разложении комплексно сопряженные векторы. Если среди векторов, соответствующих данному представлению, нет комплексно сопряженных, то наряду с представлением ρ рассмотрим комплексно сопряженное ему представление, которое для унитарного представления совпадает с контраградиентным. Для действительных векторов $\mathbf{p}$ значение преобразования Фурье на контраградиентном представлении $\bar{\rho}$ равно $\hat{\mathbf{p}}(\bar{\rho}) = V^{\bar{\rho}} = \overline{V^\rho} = \overline{\hat{\mathbf{p}}(\rho)}$. В системе векторов $\mathfrak{X}$ контраградиентному представлению $\bar{\rho}$ соответствуют векторы, комплексно сопряженные векторам, соответствующим представлению ρ .

В разложении (4) комплексно сопряженным базисным векторам соответствуют комплексно сопряженные коэффициенты. Таким образом, пара комплексно сопряженных векторов порождает двумерное действительное подпространство.

Очевидно, что произведение двух матриц равно нулю тогда и только тогда, когда равно нулю произведение комплексно сопряженных матриц. Поэтому выполнение равенства (3) для представления ρ автоматически обеспечивает выполнение того же равенства для контраградиентного представления $\bar{\rho}$.

Объединяя приведенные рассуждения, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Для того чтобы произведение двух независимых случайных величин ξ и η было равномерно распределено на конечной группе G , необходимо и достаточно, чтобы сомножители имели распределения*

$$\mathbf{p} = \frac{1}{m} \mathbf{x}_{11}^1 + \sum_{\rho} \sum_{k,l=1}^{d_{\rho}} v_{kl}^{\rho} \mathbf{x}_{kl}^{\rho}, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{m} \mathbf{x}_{11}^1 + \sum_{\rho} \sum_{k,l=1}^{d_{\rho}} w_{kl}^{\rho} \mathbf{x}_{kl}^{\rho}, \quad (5)$$

где внешние суммы берутся по всем нетривиальным неприводимым унитарным представлениям ρ группы G , коэффициенты v_{kl}^{ρ} , w_{kl}^{ρ} — любые комплексные числа, для которых $V^{\rho}W^{\rho} = 0$, $\bar{v}_{kl}^{\rho} = \overline{v_{kl}^{\rho}}$, $\bar{w}_{kl}^{\rho} = \overline{w_{kl}^{\rho}}$ и все координаты векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ неотрицательны.

Данная теорема легко обобщается на случай нескольких сомножителей.

З а м е ч а н и е 1. Неотрицательность распределений обеспечить нетрудно. Можно решить (см., например, [5]) систему линейных неравенств, полученную из (5):

$$\mathbf{p} = \frac{1}{m} \mathbf{x}_{11}^1 + \sum_{\rho} \sum_{k,l=1}^{d_{\rho}} v_{kl}^{\rho} \mathbf{x}_{kl}^{\rho} \geq 0.$$

Можно поступить по-другому: выберем подходящий по всем остальным условиям ненулевой набор коэффициентов. Если вектор $\mathbf{p}$ имеет несколько отрицательных координат, то можно нормировать коэффициенты v_{kl}^{ρ} таким образом, чтобы все координаты стали неотрицательными. Используя эти результаты, несложно доказать, что равномерное распределение на любой группе G порядка m , $3 < m < \infty$, можно представить в виде свертки двух распределений, ни одно из которых не является равномерным.

З а м е ч а н и е 2. Чтобы строить разложения равномерного распределения по теореме 1, необязательно знать все неприводимые унитарные представления группы. Например, свертка двух распределений $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ будет равномерным распределением в том случае, когда векторы этих распределений раскладываются по подпространствам, соответствующим разным неприводимым представлениям. То есть достаточно знать два не контраградиентных нетривиальных унитарных представления группы. Вместо представлений можно использовать характеры группы (обычно их

проще построить), при этом, правда, построенные распределения будут постоянными на классах сопряженных элементов.

З а м е ч а н и е 3. Рассмотрев все неприводимые унитарные представления группы, поставим в соответствие вектору $\mathbf{p}$ следующую блочно-диагональную матрицу:

$$M(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & \ddots & & \\ & & V^{\mathbf{p}} & \\ & 0 & & \ddots \end{pmatrix},$$

где по диагонали стоят блоки, соответствующие неприводимым представлениям, а все остальные элементы — нулевые. Размер этой матрицы равен сумме степеней неприводимых представлений, т.е., вообще говоря, может быть меньше m . Из сказанного выше следует, что свертка распределений $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ является равномерным распределением тогда и только тогда, когда в матрице $M(\mathbf{p})M(\mathbf{q})$ левый верхний элемент — единица, а все остальные элементы — нули.

З а м е ч а н и е 4. Для абелевых групп, у которых все неприводимые представления одномерны, матрица $M(\mathbf{p})$ становится диагональной. Поэтому произведение двух случайных величин будет равномерным распределением тогда и только тогда, когда распределения сомножителей раскладываются по векторам, соответствующим разным представлениям (пара контраградиентных представлений считается за одно).

3. Примеры. В данном пункте будут рассмотрены разложения равномерного распределения на некоторых специальных группах.

Циклическая группа Z_m . Как и у всех абелевых групп, все представления циклической группы являются одномерными. В качестве этих представлений можно взять (см. [6, с. 359]) отображения $\rho_n(j) = e^{(2\pi i/m)jn}$, $j, n = 0, \dots, m-1$. Построим по этим представлениям систему векторов $\mathfrak{X} = \{\mathbf{x}_n\} = \{(e^{-(2\pi i/m)jn}, j = 0, \dots, m-1)\}$. (Для удобства здесь векторы системы $\mathfrak{X}$ вместо $\mathbf{x}_{11}^{\rho_n}$ обозначены $\mathbf{x}_n$.)

Комплексно сопряженным к представлению ρ_n является представление ρ_{m-n} , поэтому разложение векторов распределений будем искать в виде

$$\mathbf{p} = \frac{1}{m} \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m-1} (v_n \mathbf{x}_n + \bar{v}_n \mathbf{x}_{m-n}).$$

Учитывая вид векторов базиса $\mathfrak{X}$, преобразуем сопряженные векторы в действительные векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{m-n}) = \left(\cos \frac{2\pi i}{m} jn, j = 0, \dots, m-1 \right), \\ \mathbf{u}_{m-n} &= \frac{1}{2i} (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{m-n}) = \left(\sin \frac{2\pi i}{m} jn, j = 0, \dots, m-1 \right). \end{aligned}$$

Теперь разложение векторов распределений можно вести уже по системе действительных векторов с коэффициентами, являющимися действительными числами.

По теореме 1 свертка двух распределений на конечной циклической группе является равномерным распределением тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{p} = \frac{1}{m} \mathbf{x}_0 + \sum_{1 \leq n \leq m/2} (a_n \mathbf{u}_n + b_n \mathbf{u}_{m-n}), \quad \mathbf{q} = \frac{1}{m} \mathbf{x}_0 + \sum_{1 \leq n \leq m/2} (c_n \mathbf{u}_n + d_n \mathbf{u}_{m-n}),$$

где распределения сомножителей должны раскладываться по векторам, соответствующим разным представлениям (пара контраградиентных представлений считается за одно), т.е. коэффициенты a_n, b_n, c_n, d_n — действительные числа, для которых $(a_n^2 + b_n^2)(c_n^2 + d_n^2) = 0$ и все координаты векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ неотрицательны.

Симметрическая группа S_3 . Эта группа имеет три неприводимых представления: два одномерных и одно двумерное. Выпишем эти представления (см. [6, с. 364]):

$$\begin{array}{cccccc} & \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \rho_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \rho_2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ \rho_3 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \end{array}$$

где $\varepsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

По этим представлениям построим систему векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{11}^1 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1), \\ \mathbf{x}_{11}^2 &= (1, -1, -1, -1, 1, 1), \\ \mathbf{x}_{11}^3 &= (1, 0, 0, 0, \varepsilon^{-1}, \varepsilon), \\ \mathbf{x}_{12}^3 &= (0, 1, \varepsilon^{-1}, \varepsilon, 0, 0), \\ \mathbf{x}_{21}^3 &= (0, 1, \varepsilon, \varepsilon^{-1}, 0, 0) = \bar{\mathbf{x}}_{12}^3, \\ \mathbf{x}_{22}^3 &= (1, 0, 0, 0, \varepsilon, \varepsilon^{-1}) = \bar{\mathbf{x}}_{11}^3. \end{aligned}$$

По теореме 1 для того чтобы свертка двух распределений была равномерным распределением, необходимо и достаточно, чтобы в разложениях этих распределений вида

$$\frac{1}{6} \mathbf{x}_{11}^1 + a \mathbf{x}_{11}^2 + (v_{11} \mathbf{x}_{11}^3 + \bar{v}_{11} \mathbf{x}_{22}^3 + v_{12} \mathbf{x}_{12}^3 + \bar{v}_{12} \mathbf{x}_{21}^3)$$

второе слагаемое присутствовало не более чем в одном из двух распределений, а произведение матриц, построенных по коэффициентам v , было нулевым (и, конечно, должны быть неотрицательными вероятности). Заметим, что из равенства нулю произведения матриц, соответствующих двумерному представлению, для распределений, дающих разложение равномерного распределения, следует, что все элементы этих матриц должны иметь одинаковый модуль.

Данный результат позволяет построить пример неравномерного вероятностного распределения, свертка которого с самим собой является равномерным распределением. Для построения такого распределения достаточно найти нильпотентную матрицу размера 2×2 . В качестве такой матрицы можно взять, например, матрицу $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. То есть «квадратным корнем» из равномерного распределения является любое распределение вида

$$\frac{1}{6} \mathbf{x}_{11}^1 + v(i \mathbf{x}_{11}^3 + \mathbf{x}_{12}^3 + \mathbf{x}_{21}^3 - i \mathbf{x}_{22}^3) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6} + 2v, \frac{1}{6} - v, \frac{1}{6} - v, \frac{1}{6} + v\sqrt{3}, \frac{1}{6} - v\sqrt{3} \right).$$

Для неотрицательности вероятностей значения коэффициента v должны находиться в диапазоне $-\frac{1}{12} \leq v \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$.

Группа кватернионов Q_8 . Группа кватернионов

$$Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = e, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

имеет пять неприводимых представлений: четыре одномерных и одно двумерное. Эти представления описаны, например, в [6, с. 397].

$$\begin{array}{ccccccccc} & e & a^2 & a & b & ab & a^3 & a^2b & a^3b \\ \rho_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \rho_2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \rho_3 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ \rho_4 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ \rho_5 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

По этим представлениям построим систему векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{11}^1 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \\ \mathbf{x}_{11}^2 &= (1, 1, -1, -1, 1, -1, 1), \\ \mathbf{x}_{11}^3 &= (1, 1, -1, 1, -1, -1, 1), \\ \mathbf{x}_{11}^4 &= (1, 1, 1, -1, -1, 1, -1), \\ \mathbf{x}_{11}^5 &= (1, -1, -i, 0, 0, i, 0), \\ \mathbf{x}_{12}^5 &= (0, 0, 0, 1, -i, 0, -i), \\ \mathbf{x}_{21}^5 &= (0, 0, 0, -1, -i, 0, i) = -\overline{\mathbf{x}}_{12}^5, \\ \mathbf{x}_{22}^5 &= (1, -1, i, 0, 0, -i, 0) = \overline{\mathbf{x}}_{11}^5. \end{aligned}$$

Разложение действительных векторов по данной системе имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{1}{8} \mathbf{x}_{11}^1 + a \mathbf{x}_{11}^2 + b \mathbf{x}_{11}^3 + c \mathbf{x}_{11}^4 + (v_{11} \mathbf{x}_{11}^5 + \overline{v}_{11} \mathbf{x}_{22}^5 + v_{12} \mathbf{x}_{12}^5 - \overline{v}_{12} \mathbf{x}_{21}^5), \\ \mathbf{q} &= \frac{1}{8} \mathbf{x}_{11}^1 + f \mathbf{x}_{11}^2 + g \mathbf{x}_{11}^3 + h \mathbf{x}_{11}^4 + (w_{11} \mathbf{x}_{11}^5 + \overline{w}_{11} \mathbf{x}_{22}^5 + w_{12} \mathbf{x}_{12}^5 - \overline{w}_{12} \mathbf{x}_{21}^5), \end{aligned}$$

где коэффициенты a, b, c, f, g, h являются действительными числами.

Для того чтобы свертка двух распределений была равномерным распределением, необходимо и достаточно, чтобы второй, третий и четвертый член не присутствовали в разложениях обоих распределений одновременно, произведение матриц V^{ρ^5} и W^{ρ^5} , соответствующих двумерному представлению, равнялось нулю и координаты векторов распределений были неотрицательны.

Нетрудно видеть, что произведение матриц V^{ρ^5} и W^{ρ^5} равно нулю тогда и только тогда, когда выполняются равенства $v_{11}w_{11} = v_{12}\overline{w}_{12}$, $v_{11}w_{12} = -v_{12}\overline{w}_{11}$. Но эти равенства означают, что одна из рассматриваемых матриц является нулевой.

Поэтому свертка будет равномерным распределением тогда и только тогда, когда каждый из пяти членов разложения, кроме первого, присутствует не более чем в одном распределении и координаты векторов распределений неотрицательны. Отсюда, в частности, следует, что неравномерных «квадратных корней» равномерного распределения на группе кватернионов нет.

В заключение автор выражает благодарность А. М. Зубкову за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шерстнев В. И.* Случайная величина, равномерно распределенная на конечной абелевой группе, как сумма независимых слагаемых. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 2, с. 397–403.
2. *Diaconis P.* Applications of non-commutative Fourier analysis to probability problems. — Lecture Notes in Math., 1988, v. 1362, p. 51–100.
3. *Diaconis P., Shahshahani M.* On square roots of the uniform distribution on compact groups. — Proc. Amer. Math. Soc., 1986, v. 98, № 1, p. 341–348.
4. *Turnwald G.* Roots of Haar measure and topological Hamiltonian groups. — Lecture Notes in Math., 1989, v. 1379, p. 364–375.
5. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1. М.: Мир, 1991, 360 с.
6. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977, 496 с.

Поступила в редакцию
13.IX.2001