Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, Формула полной вероятности с интерференционным членом и представление колмогоровской модели в гильбертовом пространстве, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 518–536

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 08:58:18

© 2006 г.

ХРЕННИКОВ А. Ю.*

**ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ С
ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫМ ЧЛЕНОМ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
КОЛМОГОРОВСКОЙ МОДЕЛИ
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹⁾**

В работе сравниваются две модели теории вероятностей: классическая (предложенная А.Н. Колмогоровым) и квантовая. Показано, что различие между этими теориями не так велико, как обычно считают. Оказывается, что основные структуры квантовой теории вероятностей — такие, как интерференция вероятностей, правило Борна, комплексные вероятностные амплитуды, гильбертово пространство состояний, представление наблюдений в виде операторов, — содержатся в скрытой форме в модели Колмогорова. В частности, получена «интерференция вероятностей» без обращения к представлению в гильбертовом пространстве. «Интерференция вероятностей» интерпретируется как возникновение дополнительного члена (cos-член) в обычной формуле полной вероятности. Такая связь между классической теорией вероятностей и квантовым вероятностным формализмом может стимулировать применение квантовых методов вне микромира, например в психологии, биологии, экономике и других науках.

Ключевые слова и фразы: формула полной вероятности, контекстуальная модель Колмогорова, квантовое представление, интерференция вероятностей, правило Борна.

1. Введение. Имеется достаточно общее мнение, что квантовая модель теории вероятностей, т.е. исчисление вероятностей, основанное на комплексном гильбертовом пространстве, существенно отличается от классической теоретико-множественной модели Колмогорова [1], [2] (детали и обсуждение см., например, в [3]–[5]). Упомянем несколько отличительных особенностей квантовой теории вероятностей.

а) Использование комплексных амплитуд вероятностей, или волновых функций, $\psi(x)$.

* International Center for Mathematical Modeling in Physics and Cognitive Sciences, University of Växjö, S-35195, Sweden; e-mail: andrei.khrennikov@vxu.se

¹⁾ Работа выполнена при поддержке: the EU Human Potential Programme, contract HPRN-CT-2002-00279 (Network on Quantum Probability and Applications), Profile Mathematical Modelling in Physics and Cognitive Science of Växjö University.

б) Правило Борна: вероятность события B_x — того, что в точке x находится частица, — задается формулой

$$\mathbf{P}_\psi(B_x) = |\psi(x)|^2. \quad (1)$$

в) интерференция вероятностей. Мы представим этот феномен, связав его с формулой полной вероятности. Рассмотрим простейшее разбиение выборочного пространства $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$. Тогда мы имеем (см., например, [2]):

$$\mathbf{P}(B | C) = \sum \mathbf{P}(A_j | C) \mathbf{P}(B | A_j C). \quad (2)$$

Однако в квантово-вероятностном формализме была получена иная формула:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B | C) = & \sum \mathbf{P}(A_j | C) \mathbf{P}(B | A_j) + 2 \cos \theta(B | \mathcal{A}, C) \\ & \times \sqrt{\mathbf{P}(A_1 | C) \mathbf{P}(B | A_1) \mathbf{P}(A_2 | C) \mathbf{P}(B | A_2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\theta(B | \mathcal{A}, C)$ есть угол (фаза), который зависит от события B , разбиения $\mathcal{A}$ и условия C , при котором событие B происходит. Наличие тригонометрического члена интерпретируется как интерференция вероятностей (см., например, [6]). В [6] было подчеркнуто, что имеющаяся интерференция вероятностей в квантовой механике свидетельствует об отклонении от фундаментальных законов классической теории вероятностей.

г) Представление физических наблюдаемых некоммутативными операторами в комплексном гильбертовом пространстве (в то время как в колмогоровской модели используются случайные величины — измеримые функции на выборочном пространстве).

Цель этой статьи — показать, что в действительности расхождение между квантовой моделью (Дирак–фон Нейман [7], [8]) и классической моделью (Колмогоров [1]) не столь большое, как принято считать. Все упомянутые отличительные особенности — а)–г) квантовой теории вероятностей представлены в скрытой форме и в классической модели Колмогорова. Конечно, мы не утверждаем, что все проблемы тут решены. В этой статье не рассматриваются сложные системы; поэтому мы даже не обсуждаем такие вещи, как неравенство Белла и квантовая нелокальность (детали можно найти в [3], [4]).

Решающим моментом в нашем подходе является то, что все вероятности рассматриваются как *контекстуальные вероятности*. Мы рассматриваем контекст C как комплекс условий: физических, биологических, экономических, финансовых и т.д. Таким образом, бессмысленно говорить об абстрактной вероятности $\mathbf{P}$, которая не связана с конкрет-

ным контекстом; всякая вероятность должна быть связана с некоторым фиксированным контекстом C .²⁾

Главным результатом нашего исследования является *контекстуальный вероятностный анализ* формулы полной вероятности (2) и вывод «*квантовой формулы полной вероятности*» (3) (которую обычно называют интерференцией вероятностей). Отправляясь от формулы полной вероятности, полученной в рамках теоретико-множественного подхода с колмогоровским вероятностным пространством $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, мы воспроизводим другие отличительные особенности квантового вероятностного формализма.

Исходной точкой нашего анализа является контекстуальная интерпретация условных вероятностей. Обычно условная вероятность $\mathbf{P}(A|C)$ понимается как вероятность осуществления *события* A при условии, что произошло *событие* C . Но мы не хотели бы рассматривать условные вероятности по отношению к некоторому событию. В общем случае это и невозможно, нельзя, например, отождествить набор оборудования в лаборатории с некоторым событием. Мы будем рассматривать условные вероятности относительно комплекса, например, физических условий C . Таким образом, мы рассматриваем условные вероятности не относительно событий, а относительно контекста C .

Важным следствием этой новой интерпретации условных вероятностей $\mathbf{P}(A|C)$ в колмогоровской модели является невозможность использования булевой алгебры для множеств C , представляющих контексты — комплексы, например, физических условий. Для двух событий, скажем, C_1 и C_2 , всегда можно рассмотреть событие, соответствующее их одновременному осуществлению. В булевой алгебре это реализуется как $C = C_1 C_2$. Это естественная операция на алгебре событий. Но для двух контекстов не всегда возможно определить их совместную реализацию. Таким образом, даже если такие контексты представлены множествами C_1 и C_2 , принадлежащими σ -алгебре $\mathcal{F}$ колмогоровского пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, мы, рассматривая множество $C = C_1 C_2$, не можем быть уверены, что оно представляет физически осмысленный контекст.

Итак, мы не можем рассматривать всю σ -алгебру $\mathcal{F}$ колмогоровского пространства как набор множеств, представляющих контексты. В зависимости от решаемой задачи условные вероятности $\mathbf{P}(A|C)$ могут рассматриваться только для контекстов C , принадлежащих некоторому

²⁾ Конечно, тут нет ничего нового. Например, А. Н. Колмогоров указывал на роль комплекса экспериментальных условий для определения вероятностей в его знаменитой книге [1] и, особенно, в [9]. Подобная точка зрения также представлена в книгах Б. В. Гнеденко [10] и А. Реньи [11]. Частотную теорию вероятностей Р. фон Мизеса [12] также можно считать контекстуальной, так как «коллектив» у Мизеса определен комплексом экспериментальных условий.

специальному набору множеств $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. (Событие A по-прежнему представляется произвольным элементом σ -алгебры $\mathcal{F}$.)

Мы покажем, что на такой «усеченной» колмогоровской σ -алгебре $\mathcal{F}$ можно вести квантово-вероятностный формализм. В таком подходе квантовый формализм появляется как специальное представление *контекстуальной колмогоровской модели*: $\mathcal{P}_{\text{cont}} = (\Omega, \mathcal{F} | \mathcal{C}, \mathbf{P})$ для специального выбора множества контекстов $\mathcal{C}$.

Заметим, что наша конструкция — контекстуальная модель Колмогорова — очень близка к модели А. Реньи [11]. Реньи также рассматривал специальные множества, обозначим их $\mathcal{C}_{\text{REN}}$, представляющие условия. Но наше контекстуальное множество $\mathcal{C}$ не удовлетворяет условиям модели Реньи. Это дает нам возможность воспроизвести квантовый вероятностный формализм, чего не позволяет модель Реньи. Последняя модель является более общей с теоретико-множественной точки зрения. В принципе, мы могли бы использовать это обобщение даже в нашем контекстуальном подходе. Но мы не делаем этого здесь. Мы хотим показать, что даже колмогоровская модель содержит в скрытой форме основные квантово-вероятностные структуры. Подчеркнем снова, что обычно наличие таких структур рассматривается как проявление «неколмогоровости».

Применяя контекстуальный подход к формуле полной вероятности, видим, что использование вероятностей типа $\mathbf{P}(B | A_j C)$, являющихся условными по отношению к пересечению контекстов, в общем случае бессмысленно. Также видно, что в квантовой формуле полной вероятности (3) такие вероятности были исключены из рассмотрения. Вероятности $\mathbf{P}(B | AC)$ не определены в физическом смысле. Поэтому в (3) вместо $\mathbf{P}(B | AC)$ были рассмотрены «экспериментальные условные вероятности» $\mathbf{P}(B | A_j)$. Однако в общем случае имеет место неравенство:

$$\mathbf{P}(B | C) \neq \sum \mathbf{P}(A_j | C) \mathbf{P}(B | A_j), \quad (4)$$

которое можно представить в виде равенства

$$\mathbf{P}(B | C) = \sum \mathbf{P}(A_j | C) \mathbf{P}(B | A_j) + \delta(B | \mathcal{A}, C). \quad (5)$$

Очевидно, дополнительный член $\delta(B | \mathcal{A}, C)$ есть разность между левой и правой частью (4). Таким образом для специальной системы контекстов $\mathcal{C}^{\text{tr}}$ (см. п. 2) мы получим «квантовую формулу полной вероятности» (3), а с помощью этой формулы мы конструируем представление набора контекстов $\mathcal{C}^{\text{tr}}$ в единичной сфере комплексного гильбертова пространства. Это есть решающий шаг для обнаружения особенностей а)–г) квантовой теории вероятностей в классической теории вероятностей, но в рамках контекстуального подхода.

Какова главная цель такой конструкции? С одной стороны, мы готовы демистифицировать квантовую вероятность и связать ее доста-

точно простым путем с классической моделью Колмогорова. С другой стороны, воспроизведя квантовое вероятностное исчисление, в частности «интерференцию вероятностей», в теоретико-множественной теории вероятностей, мы не видим причин к ограничению применения этого исчисления только для описания процессов микромира. Используя контекстуальный подход, мы можем построить квантовое представление для статистических моделей в различных областях знаний, например, в биологии, психологии, экономике.

Естественно спросить, почему такой подход может быть плодотворным? В нашем подходе квантовое представление есть *проекция классической модели теории вероятностей*. Оно является существенным упрощением классического вероятностного описания. Такое упрощенное описание может быть полезно для моделей, в которых детальное классическое описание крайне затруднено. Например, применение в когнитивных науках и психологии [13]–[15], в теории игр [16], в финансовой математике [17], в классической теории неупорядоченных систем [18].

Заметим, что впервые «квантовая формула полной вероятности» (3), без обращения к гильбертову пространству, была получена в [19], [20] в рамках *частотной теории фон Мизеса*. В [5] дано применение закона больших чисел для этой цели.

В последние годы было несколько попыток использования неколмогоровского, но теоретико-множественного подхода для вывода некоторых положений квантовой механики (см., например, [4] и [22]).

2. Интерференционная формула полной вероятности. Мы рассмотрим формулу полной вероятности (2) в частном случае, когда a и b — двузначные случайные величины, $a = a_1, a_2$ и $b = b_1, b_2$. Тогда мы имеем

$$\mathbf{P}(b = b_i | C) = \sum_n \mathbf{P}(a = a_n | C) \mathbf{P}(b = b_i | a = a_n, C).$$

Если измерение случайной величины a существенно возмущает контекст C , то мы не в состоянии создать контекст, соответствующий невозмущающему измерению величины a при комплексе экспериментальных условий C . Поэтому следовало бы изменить эту формулу и исключить вероятности $\mathbf{P}(b = b_i | a = a_n, C)$.

Следующее понятие хорошо известно в теории измерений квантовой механики (см. [3], [4]). Обозначим через A_j некоторый контекст выбора по отношению к значению $a = a_j$ случайной величины a . Например, в квантовой механике рассматриваются измерения, когда выбираются все частицы с фиксированным значением импульса a . Эти контексты (в нашем случае $j = 1, 2$) в теоретико-множественном подходе представлены множествами $A_j = \{\omega \in \Omega: a(\omega) = a_j\}$. Мы также введем контексты выбора по отношению к фиксированным значениям случайных величин b ,

которые будут представлены множествами $B_i = \{\omega \in \Omega : b(\omega) = b_i\}$. Мы рассмотрим разбиения $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$ выборочного пространства Ω .

Множество C , принадлежащее $\mathcal{F}$, будем называть невырожденным контекстом относительно разбиения $\mathcal{A}$, если $\mathbf{P}(A_n C) \neq 0$ для всех n . Мы обозначим множество всех $\mathcal{A}$ -невырожденных контекстов символом $\mathcal{C}_{\mathcal{A}, \text{nd}}$. Разбиения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ мы будем называть взаимно дополнительными, если $\mathbf{P}(B_n A_k) \neq 0$ для всех n и k . Таким образом, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ являются взаимно дополнительными тогда и только тогда, когда B_n есть невырожденный контекст относительно $\mathcal{A}$ и обратно. Если случайные величины a и b индуцируют взаимно дополнительные разбиения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то они также будут называться взаимно дополнительными. Таким образом, взаимная дополнительность определена в теоретико-множественной теории.

Везде далее мы предполагаем, что a и b — взаимно дополнительные случайные величины. Пусть $B \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}, \text{nd}}$. Определим коэффициент интерференции случайных величин a и b следующей формулой:

$$\lambda(B | \mathcal{A}, C) = \frac{\delta(B | \mathcal{A}, C)}{2\sqrt{\mathbf{P}(A_1 | C) \mathbf{P}(B | A_1) \mathbf{P}(A_2 | C) \mathbf{P}(B | A_2)}}, \quad (6)$$

где $\delta(B | \mathcal{A}, C) = \mathbf{P}(B | C) - \sum_{j=1}^2 \mathbf{P}(B | A_j) \mathbf{P}(A_j | C)$. Мы увидим, что «формула полной вероятности с дополнительным членом» (5) имеет интересные следствия, если дополнительный член δ (возмущение) представлен в виде

$$\delta(B | \mathcal{A}, C) = \lambda(B | \mathcal{A}, C) \sqrt{\mathbf{P}(A_1 | C) \mathbf{P}(B | A_1) \mathbf{P}(A_2 | C) \mathbf{P}(B | A_2)}. \quad (7)$$

Положим

$$\mathcal{C}^{\text{tr}} = \{C \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}, \text{nd}} : |\lambda(B_j | \mathcal{A}, C)| \leq 1\}$$

и будем называть элементы множества $\mathcal{C}^{\text{tr}}$ тригонометрическими контекстами. Мы будем рассматривать контекстуальную колмогоровскую модель с таким набором контекстов:

$$\mathcal{P}_{\text{cont}, \text{tr}} = (\Omega, \mathcal{F} | \mathcal{C}^{\text{tr}}, \mathbf{P}). \quad (8)$$

Заметим, что в общем случае система множеств $\mathcal{C}^{\text{tr}}$ не является алгеброй, так как из условия $C_1, C_2 \in \mathcal{C}^{\text{tr}}$ не следует, что $C = C_1 C_2 \in \mathcal{C}^{\text{tr}}$. Наш основной результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы, доказательство которой будет проведено в несколько этапов.

Теорема 2.1. «Квантовая формула полной вероятности» (3) может быть получена в рамках колмогоровской теории вероятностей. На основании этой формулы можно построить отображение множества тригонометрических контекстов $\mathcal{C}^{\text{tr}}$ в единичную сферу S комплексного гильбертова пространства H (пространство комплексных

амплитуд). Такое отображение определяется парой a, b взаимно дополнительных случайных величин (базовые случайные величины), которые представлены некоммутативными операторами $\hat{a}, \hat{b}$. Унитарность матрицы $V^b|_a$ перехода от базиса $\{e_i^a\}$ к базису $\{e_i^b\}$ (эти базисы определенным образом соответствуют случайным величинам a и b) эквивалентна правилу Борна для этих случайных величин. Такая конструкция может быть реализована только для бистохастических матриц переходных вероятностей.

Используем сначала соотношение (7) для преобразования формулы полной вероятности с дополнительным членом (5) к виду

$$\mathbf{P}(B|C) = \sum \mathbf{P}(A_j|C) \mathbf{P}(B|A_j) + 2\lambda(B|\mathcal{A}, C) \sqrt{\mathbf{P}(A_1|C) \mathbf{P}(B|A_1) \mathbf{P}(A_2|C) \mathbf{P}(B|A_2)}. \quad (9)$$

1) Пусть интерференционные коэффициенты $|\lambda(B|\mathcal{A}, C)| \leq 1$ для каждого $B \in \mathcal{B}$. Мы введем новый статистический параметр $\theta(B|\mathcal{A}, C) \in [0, 2\pi]$ и представим коэффициенты в тригонометрической форме:

$$\lambda(B|\mathcal{A}, C) = \cos \theta(B|\mathcal{A}, C).$$

Параметр $\theta(B|\mathcal{A}, C)$ называется *относительной фазой* события B относительно разбиения $\mathcal{A}$ в контексте C . В этом случае формула полной вероятности с дополнительным членом в форме (9) совпадает с «квантовой формулой полной вероятности» (3) и есть не что иное, как знаменитая формула «интерференции вероятностей». Обычно эта формула получается использованием *унитарных преобразований* в гильбертовом пространстве, соответствующих переходу от одного ортонормированного базиса к другому, и вероятностного постулата Борна. В квантовых рассуждениях ортонормированный базис состоит из собственных векторов некоммутативных операторов, соответствующих квантовым наблюдаемым a и b .

2) Предположим, что $|\lambda(B|\mathcal{A}, C)| \geq 1$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Тогда $\theta(B|\mathcal{A}, C) \in (-\infty, +\infty)$ и мы представим коэффициенты в гиперболической форме:

$$\lambda(B|\mathcal{A}, C) = \pm \operatorname{ch} \theta(B|\mathcal{A}, C).$$

В этом случае (9) имеет форму «гиперболической интерференции вероятностей»:

$$\mathbf{P}(B|C) = \sum \mathbf{P}(A_j|C) \mathbf{P}(B|A_j) \pm 2 \operatorname{ch} \theta(B|\mathcal{A}, C) \sqrt{\mathbf{P}(A_1|C) \mathbf{P}(B|A_1) \mathbf{P}(A_2|C) \mathbf{P}(B|A_2)}. \quad (10)$$

В этой статье наши рассуждения относятся к первому случаю.³⁾

Везде ниже $B = B_x$, $x = b_1, b_2$ и мы будем часто использовать символы $\lambda(b = x | a, C)$ вместо $\lambda(B_x | \mathcal{A}, C)$.

3. Извлечение комплексных вероятностных амплитуд и правила Борна из колмогоровской модели. Напомним, что мы изучаем случай несравнимых двузначных случайных величин: $a = a_1, a_2$, $b = b_1, b_2$. Эта пара случайных величин фиксирована в дальнейших рассуждениях. Будем называть такие случайные величины *базовыми*. Для каждой фиксированной пары a, b базовых величин мы построим представление контекстуальной колмогоровской модели $\mathcal{P}_{\text{cont, tr}} = (\Omega, \mathcal{F} | \mathcal{C}^{\text{tr}}, \mathbf{P})$ в комплексном гильбертовом пространстве. Положим $Y = \{a_1, a_2\}$, $X = \{b_1, b_2\}$ («спектры» случайных величин a и b). Пусть $C \in \mathcal{C}^{\text{tr}}$. Тогда положим

$p_C^a(y) = \mathbf{P}(a = y | C)$, $p_C^b(x) = \mathbf{P}(b = x | C)$, $p(x | y) = \mathbf{P}(b = x | a = y)$, $x \in X, y \in Y$. Формула (3) может быть записана в виде

$$p_C^b(x) = \sum_{y \in Y} p_C^a(y) p(x | y) + 2 \cos \theta_C(x) \sqrt{\prod_{y \in Y} p_C^a(y) p(x | y)}, \quad (11)$$

где $\delta_C(x) = \theta(b = x | a, C) = \pm \arccos \lambda(b = x | a, C)$, $x \in X$. Здесь

$$\delta(b = x | a, C) = p_C^b(x) - \sum_{y \in Y} p_C^a(y) p(x | y),$$

$$\lambda(b = x | a, C) = \frac{\delta(b = x | a, C)}{2 \sqrt{\prod_{y \in Y} p_C^a(y) p(x | y)}}.$$

Используя элементарную формулу $D = A + B + 2\sqrt{AB} \cos \theta = |\sqrt{A} + e^{i\theta} \sqrt{B}|^2$ для $A, B > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, мы можем представить вероятность $p_C^b(x)$ как квадрат комплексных амплитуд (*правило Борна*):

$$p_C^b(x) = |\varphi_C(x)|^2, \quad (12)$$

где

$$\varphi(x) \equiv \varphi_C(x) = \sqrt{p_C^a(a_1) p(x | a_1)} + e^{i\theta_C(x)} \sqrt{p_C^a(a_2) p(x | a_2)}. \quad (13)$$

³⁾ Мы только упомянем, что во втором случае мы можем получить представление контекстуальной колмогоровской модели $\mathcal{P}_{\text{cont, hyp}} = (\Omega, \mathcal{F} | \mathcal{C}^{\text{hyp}}, \mathbf{P})$, где $\mathcal{C}^{\text{hyp}} = \{C \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}, \text{nd}} : |\lambda(B_j | \mathcal{A}, C)| \geq 1\}$, в так называемом гиперболическом гильбертовом пространстве — гильбертовом модуле над двумерной клиффордовой алгеброй, т.е. коммутативной алгеброй с базисом $e_1 = 1$ и $e_2 = j$, $j^2 = -1$ (см. [21]). Таким образом, невозможно представить всю колмогоровскую σ -алгебру $\mathcal{F}$ в комплексном гильбертовом пространстве. Более того, $\mathcal{C}^{\text{tr}} \cup \mathcal{C}^{\text{hyp}}$ есть собственная подсистема $\mathcal{F}$. Например, существуют смешанные гипер-тригонометрические контексты: одно $\lambda \leq 1$, другое $\lambda \geq 1$. Также существуют вырожденные контексты C , для которых интерференционные коэффициенты не определены вообще.

Важно подчеркнуть, что так как для каждого $x \in X$ фазы $\theta_C(x)$ могут быть выбраны двумя способами (выбирая знаки $+$ или $-$), то представление контекстов комплексных амплитуд определено неоднозначно.

Чтобы зафиксировать представление колмогоровского пространства $\mathcal{P}_{\text{cont, tr}}$, мы должны зафиксировать фазы. Ниже будет видно, что для получения «хорошего представления» надо выбирать фазы специальным образом.

Мы обозначим пространство функций $\varphi: X \rightarrow \mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ есть поле комплексных чисел, символом $E = \Phi(X, \mathbf{C})$. Так как $X = \{b_1, b_2\}$, то E есть двумерное комплексное пространство. Функции Дирака $\{\delta(b_1 - x), \delta(b_2 - x)\}$ являются каноническим базисом в этом пространстве. Мы увидим (предложение 5.1), что при естественных предположениях на матрицы переходных вероятностей справедливо представление $\varphi_{B_j}(x) = \delta(b_j - x)$. Для каждого $\varphi \in E$ мы имеем $\varphi(x) = \varphi(b_j) \delta(b_j - x) + \varphi(b_2) \delta(b_2 - x)$. Используя представление (13), построим отображение

$$J^{b|a}: \mathcal{C}^{\text{tr}} \rightarrow \Phi(X, \mathbf{C}). \quad (14)$$

$J^{b|a}$ отображает контексты (комплексы, например, физических условий) в комплексы амплитуд. Представление (12) вероятности $p_C^b(x)$ как квадрата абсолютного значения комплексной $(b|a)$ -амплитуды есть не что иное, как знаменитое *правило Борна*. Комплексная амплитуда $\varphi_C(x)$ может быть названа *волновой функцией* комплекса физических условий (контекст C) или чистым *состоянием*. Положим $e_x^b(\cdot) = \delta(x - \cdot)$. Тогда правило Борна для комплексных амплитуд (12) может быть переписано в следующем виде:

$$p_C^b(x) = |(\varphi_C, e_x^b)|^2, \quad (15)$$

где скалярное произведение в пространстве $E = \Phi(X, \mathbf{C})$ определено стандартным образом: $(\varphi, \psi) = \sum_{x \in X} \varphi(x) \bar{\psi}(x)$. Система функций $\{e_x^b\}_{x \in X}$ образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $H = (E, (\cdot, \cdot))$. Пусть $X \subset \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ есть поле действительных чисел. Используя представление (15), идущее от правила Борна, мы получаем представление в этом гильбертовом пространстве среднего для колмогоровской случайной величины b :

$$\begin{aligned} E(b|C) &= \sum_{x \in X} x p_C^b(x) = \sum_{x \in X} x |\varphi_C(x)|^2 = \sum_{x \in X} x (\varphi_C, e_x^b) \overline{(\varphi_C, e_x^b)} \\ &= (\hat{b} \varphi_C, \varphi_C), \end{aligned} \quad (16)$$

где самосопряженный оператор $\hat{b}: E \rightarrow E$ определяется его собственными векторами: $\hat{b} e_x^b = x e_x^b$, $x \in X$, оператор $\hat{b}$ есть оператор умножения в пространстве комплексных функций $\Phi(X, \mathbf{C})$: $\hat{b} \varphi(x) = x \varphi(x)$. Таким

образом, с помощью (16) условное среднее колмогоровской случайной величины представляется в гильбертовом пространстве с помощью самосопряженного оператора $\hat{b}$. Введем следующие обозначения:

$$u_j^a = \sqrt{p_C^a(a_j)}, \quad u_j^b = \sqrt{p_C^b(b_j)}, \quad p_{ij} = p(b_j | a_i), \quad (17)$$

$$u_{ij} = \sqrt{p_{ij}}, \quad \theta_j = \theta_C(b_j).$$

Заметим, что коэффициенты u_j^a, u_j^b зависят от контекста C , т.е. $u_j^a = u_j^a(C)$, $u_j^b = u_j^b(C)$. Рассмотрим матрицу переходных вероятностей $\mathbf{P}^{b|a} = (p_{ij})$. Это всегда стохастическая матрица. Поскольку $\varphi_C = v_1^b e_1^b + v_2^b e_2^b$, где $v_j^b = u_1^a u_{1j} + u_2^a u_{2j} e^{i\theta_j}$, мы имеем

$$p_C^b(b_j) = |v_j^b|^2 = |u_1^a u_{1j} + u_2^a u_{2j} e^{i\theta_j}|^2. \quad (18)$$

Это дает интерференционное представление вероятностей, которое используется, например, в квантовом формализме. Напомним, что формула (18) получена из интерференционной формулы полной вероятности (11).

Мы хотели бы получить правило Борна не только для величины b , но и для случайной величины a . Как мы увидим, мы не можем получить это в общем случае. Отправляясь от двух произвольных взаимно дополнительных обычных случайных величин a и b , мы получили представление вероятностной модели в комплексном линейном пространстве. Эта модель существенно более общая, чем стандартное квантовомеханическое представление. В нашем (более общем) линейном представлении «сопряженная случайная величина» a не обязательно представляется симметричным оператором (матрицей) в гильбертовом пространстве H , порожденном b . Напомним, что в квантовой механике обе базовые величины (координата и импульс) представлены в одном и том же гильбертовом пространстве.

Для всякого контекста C_0 мы можем представить соответствующую волновую функцию $\varphi = \varphi_{C_0}$ в виде

$$\varphi = u_1^a e_1^a + u_2^a e_2^a, \quad (19)$$

где

$$e_1^a = (u_{11}, u_{12}), \quad e_2^a = (e^{i\theta_1} u_{21}, e^{i\theta_2} u_{22}). \quad (20)$$

Здесь $\{e_i^a\}$ есть система векторов в E , соответствующая a -наблюдаемой. Мы предполагаем, что векторы $\{e_i^a\}$ линейно независимы и поэтому являются базисом в E . Мы имеем $e_1^a = v_{11} e_1^b + v_{12} e_2^b$, $e_2^a = v_{21} e_1^b + v_{22} e_2^b$, где $V = (v_{ij})$ есть матрица, соответствующая преобразованию комплексных амплитуд: $v_{11} = u_{11}$, $v_{21} = u_{21}$, $v_{12} = e^{i\theta_1} u_{21}$, $v_{22} = e^{i\theta_2} u_{22}$. Найдем теперь класс матриц V такой, что правило Борна (15) справедливо и для a -базиса:

$$p_C^a(a_j) = |(\varphi, e_j^a)|^2. \quad (21)$$

В силу (19) правило Борна (21) справедливо тогда и только тогда, когда $\{e_i^a\}$ есть ортонормированный базис, т.е. когда V есть унитарная матрица.

Так как мы изучаем двумерный случай, возникающий из-за двузначности случайных величин, то матрица $V \equiv V^{b|a}$ является унитарной тогда и только тогда, когда матрица переходных вероятностей $\mathbf{P}^{b|a}$ является бистохастической и $e^{i\theta_1} = -e^{i\theta_2}$, или

$$\theta_{C_0}(b_1) - \theta_{C_0}(b_2) = \pi \pmod{2\pi}. \quad (22)$$

Следует заметить, что условия (22) на фазы и условие бистохастичности не являются независимыми, как показывает следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть матрица переходных вероятностей $\mathbf{P}^{b|a}$ является бистохастической. Тогда

$$\cos \theta_C(b_2) = -\cos \theta_C(b_1) \quad (23)$$

для любого контекста $C \in \mathcal{C}^{\text{tr}}$.

В силу леммы 3.1 мы имеем две различные возможности выбора фаз:

$$\theta_{C_0}(b_1) + \theta_{C_0}(b_2) = \pi \quad \text{или} \quad \theta_{C_0}(b_1) - \theta_{C_0}(b_2) = \pi \pmod{2\pi}.$$

В силу (22), чтобы получить правило Борна для случайной величины a , нужно выбрать фазы $\theta_{C_0}(b_i)$, $i = 1, 2$, таким образом, чтобы

$$\theta_{C_0}(b_2) = \theta_{C_0}(b_1) + \pi. \quad (24)$$

Если $\theta_{C_0}(b_1) \in [0, \pi]$, то $\theta_{C_0}(b_2) \in [\pi, 2\pi]$, и наоборот. Эта лемма очень важна, так как с ее помощью мы всегда можем выбрать $\theta_{C_0}(b_j)$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие (24). Очевидно, что это возможно только для случая, когда базовые наблюдаемые выбраны так, что матрица переходных вероятностей является бистохастической.

Специфической особенностью представленной конструкции a -представления является то, что базис $\{e_j^a\}$ зависит от контекста C_0 : $e_j^a = e_j^a(C_0)$. А правило Борна в действительности имеет вид $p_{C_0}^a(a_j) = |(\varphi_{C_0}, e_j^a(C_0))|^2$. Однако, в соответствии с условием квантового формализма, нам нужен фиксированный a -базис для всех контекстов $C \in \mathcal{C}^{\text{tr}}$.

Лемма 3.2. Пусть матрица переходных вероятностей $\mathbf{P}^{b|a}$ является бистохастической и для каждого контекста $C \in \mathcal{C}^{\text{tr}}$ фазы $\theta_C(b_j)$ выбраны из условия

$$\theta_C(b_2) = \theta_C(b_1) + \pi \pmod{2\pi}, \quad (25)$$

тогда для каждого контекста $C \in \mathcal{C}^{\text{tr}}$ правило Борна справедливо в базисе $e_j^a \equiv e_j^a(C_0)$, построенном для фиксированного контекста C_0 :

$$p_C^a(a_j) = |(\varphi_C, e_j^a)|^2. \quad (26)$$

Доказательство. Пусть C_0 есть некоторый фиксированный контекст. Рассмотрим базис $\{e_j^a(C_0)\}$ и матрицу $V(C_0)$ соответствующую этому контексту. Для каждого $C \in \mathcal{C}^{\text{tr}}$ представим волновую функцию как $\phi_C = v_1^a(C) e_1^a(C_0) + v_2^a(C) e_2^a(C_0)$, где $|v_j^a(C)|^2 = p_C^a(a_j)$. Очевидно, что для каждого $C \in \mathcal{C}^{\text{tr}}$ мы можем представить волновую функцию как

$$\begin{aligned}\phi_C(b_1) &= u_1^a(C) v_{11}(C_0) + e^{i[\theta_C(b_1) - \theta_{C_0}(b_1)]} u_2^a(C) v_{12}(C_0), \\ \phi_C(b_2) &= u_1^a(C) v_{21}(C_0) + e^{i[\theta_C(b_2) - \theta_{C_0}(b_2)]} u_2^a(C) v_{22}(C_0).\end{aligned}$$

Таким образом, мы должны иметь $\theta_C(b_1) - \theta_{C_0}(b_1) = (\theta_C(b_2) - \theta_{C_0}(b_2)) \bmod 2\pi$ для всякой пары контекстов C_0 и C_1 . Используя соотношение (25) между фазами $\theta_C(b_1), \theta_C(b_2)$ и $\theta_{C_0}(b_1), \theta_{C_0}(b_2)$, мы получаем: $\theta_C(b_2) - \theta_{C_0}(b_2) = (\theta_C(b_1) + \pi) - (\theta_{C_0}(b_1) - \pi) = (\theta_C(b_1) - \theta_{C_0}(b_1)) \bmod 2\pi$.

Условия (25) существенно ограничивают класс комплексных амплитуд, которые могут быть использованы для представления контекста $C \in \mathcal{C}^{\text{tr}}$. Всякое C может быть представлено только двумя амплитудами $\varphi(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$, соответствующими двум возможным выборам $\theta_C(b_1)$ (в интервале $[0, \pi]$ или $[\pi, 2\pi]$).

Из леммы 3.2 мы получаем следующую часть теоремы 2.1: *можно построить представление контекстуальной колмогоровской модели $\mathcal{P}_{\text{cont, tr}}$ в гильбертовом пространстве так, что правило Борна справедливо для обеих базовых случайных величин тогда и только тогда, когда матрица переходных вероятностей $\mathbf{P}^{b|a}$ является бистохастической.*

Если $\mathbf{P}^{b|a}$ является бистохастической матрицей, то мы имеем квантоподобное представление не только для условного среднего случайной величины в (см. (16)), но также и для случайной величины a :

$$\mathbf{E}(a | C) = \sum_{y \in Y} y p_C^a(y) = \sum_{y \in Y} y |(\varphi_C, e_y^a)|^2 = (\hat{a} \varphi_C, \varphi_C), \quad (27)$$

где самосопряженный оператор $\hat{a}: E \rightarrow E$ с симметрической матрицей определен собственными векторами: $\hat{a} e_j^a = a_j e_j^a$. Из (27) следует, что случайную величину a можно естественно представить оператором $\hat{a}$.

Обозначим символом S единичную сферу гильбертова пространства $E = \Phi(X, \mathbf{C})$. Отображение $J^{b|a}: \mathcal{C}^{\text{tr}} \rightarrow S$ не обязательно сюръективно или инъективно. В общем случае множество (чистых) состояний, соответствующее колмогоровскому контекстуальному пространству

$$S_{\mathcal{C}^{\text{tr}}} \equiv S_{\mathcal{C}^{\text{tr}}}^{b|a} = J^{b|a}(\mathcal{C}^{\text{tr}}),$$

является собственным подмножеством сферы S . Структура множества чистых состояний $S_{\mathcal{C}^{\text{tr}}}$ определяется колмогоровским пространством и базовыми случайными величинами a и b .

4. Представление колмогоровских случайных величин некоммутативными операторами. Пусть матрица переходных вероятностей $\mathbf{P}^{b|a}$ является бистохастической. В этом пункте мы рассматриваем случай действительнозначных случайных величин. Здесь спектры случайных величин b и a являются подмножествами $\mathbf{R}$. Положим $q_1 = \sqrt{p_{11}} = \sqrt{p_{22}}$ и $q_2 = \sqrt{p_{12}} = \sqrt{p_{21}}$. Таким образом, векторы a -базиса (см. (20)) имеют следующий вид: $e_1^a = (q_1, q_2)$, $e_2^a = (e^{i\theta_1}q_2, e^{i\theta_2}q_1)$. Так как $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, мы имеем $e_2^a = e^{i\theta_2}(-q_2, q_1)$. Найдем теперь матрицы операторов $\hat{a}$ и $\hat{b}$ в b -представлении. Очевидно, b -представление является диагональным. Для $\hat{a}$ имеем: $\hat{a} = V \text{diag}(a_1, a_2) V^*$, где $v_{11} = v_{22} = q_1$, $v_{21} = -v_{12} = q_2$. Таким образом, $a_{11} = a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2$, $a_{22} = a_1 q_2^2 + a_2 q_1^2$, $a_{12} = a_{21} = (a_1 - a_2) q_1 q_2$. Отсюда $[\hat{b}, \hat{a}] = \hat{m}$, где $m_{11} = m_{22} = 0$ и $m_{12} = -m_{21} = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1) q_1 q_2$. Так как $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$ и $q_j \neq 0$, мы получаем, что $\hat{m} \neq 0$.

5. Роль одновременной бистохастичности матриц $\mathbf{P}^{b|a}$ и $\mathbf{P}^{a|b}$. Отправляясь от b -представления, т.е. комплексных амплитуд $\varphi_C(x)$, определенных на спектре случайной величины b , мы построили a -представление. Это естественная конструкция, так как она продуцирует вероятностное правило Борна только тогда, когда матрица $\mathbf{P}^{b|a}$ бистохастична. Нам нужно иметь симметрическую модель. Отправляясь от a -представления, т.е. от комплексных амплитуд $\varphi_C(y)$, определенных на спектре случайной величины a , мы хотим построить естественное b -представление. Обе эти матрицы переходных вероятностей $\mathbf{P}^{b|a}$ и $\mathbf{P}^{a|b}$ должны быть бистохастическими.

Теорема 5.1. Пусть матрица $\mathbf{P}^{b|a}$ является бистохастической. Тогда контексты B_1, B_2 принадлежат $\mathcal{C}^{\text{tr}}$ тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{P}^{a|b}$ является бистохастической.

Лемма 5.1. Матрицы переходных вероятностей $\mathbf{P}^{b|a}$ и $\mathbf{P}^{a|b}$ являются бистохастическими тогда и только тогда, когда имеет место симметричность, т.е.

$$p(b_i | a_j) = p(a_j | b_i), \quad i, j = 1, 2. \quad (28)$$

Это эквивалентно тому, что случайные величины a и b являются равнономерно распределенными, т.е. $p^a(a_i) = p^b(b_i) = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$.

Эта лемма имеет важные физические следствия. Нормальное (борновское) гильбертово представление контекстов может быть построено только для пары взаимно дополнительных одинаково распределенных случайных величин a и b .

Лемма 5.2. Пусть обе матрицы $\mathbf{P}^{b|a}$ и $\mathbf{P}^{a|b}$ являются бистохастическими. Тогда

$$\lambda(B_i | a, B_i) = 1. \quad (29)$$

Предложение 5.1. Пусть обе матрицы переходных вероятностей $\mathbf{P}^{b|a}$ и $\mathbf{P}^{a|b}$ бистохастические. Тогда

$$J^{b|a}(B_j)(x) = \delta(b_j - x), \quad x \in X, \quad \text{и} \quad J^{a|b}(A_j)(y) = \delta(a_j - y), \quad y \in Y.$$

Таким образом, когда матрицы $\mathbf{P}^{a|b}$ и $\mathbf{P}^{b|a}$ бистохастические, т.е. когда обе базовые случайные величины a и b равномерно распределены, правило Борна имеет вид: $p_C^b(x) = |(\phi_C, \phi_{B_x})|^2$.

6. Комплексные амплитуды вероятностей в случае многозначных базовых переменных. Общий случай величин, принимающих более двух различных значений, индуктивно сводится к случаю двухзначных величин. Мы рассмотрим две взаимно дополнительные случайные величины, a и b , принимающие по n значений: $a = a_1, \dots, a_n$ и $b = b_1, \dots, b_n$. Начнем с некоторых очевидных обобщений результатов п. 2.

Лемма 6.1. Пусть $B, C, D_1, D_2 \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(C) \neq 0$ и $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Тогда

$$\mathbf{P}(B(D_1 \cup D_2) | C) = \mathbf{P}(BD_1 | C) + \mathbf{P}(BD_2 | C). \quad (30)$$

Предложение 6.1 (формула полной вероятности). Пусть выполнены условия леммы 6.1, и пусть $\mathbf{P}(D_j C) \neq 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(B(D_1 \cup D_2) | C) = \mathbf{P}(B | D_1 C) \mathbf{P}(D_1 | C) + \mathbf{P}(B | D_2 C) \mathbf{P}(D_2 | C). \quad (31)$$

Предложение 6.2 (контекстуальная формула полной вероятности). Пусть выполнены условия предложения 6.1 и $\mathbf{P}(BD_j) \neq 0$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B(D_1 \cup D_2) | C) &= \mathbf{P}(B | D_1) \mathbf{P}(D_1 | C) + \mathbf{P}(B | D_2) \mathbf{P}(D_2 | C) \\ &\quad + 2\lambda(B | \{D_1, D_2\}, C) \\ &\quad \times \sqrt{\mathbf{P}(B | D_1) \mathbf{P}(D_1 | C) \mathbf{P}(B | D_2) \mathbf{P}(D_2 | C)}, \end{aligned} \quad (32)$$

где интерференционный коэффициент

$$\lambda(B | \{D_1, D_2\}, C) = \frac{\delta(B | \{D_1, D_2\}, C)}{2\sqrt{\mathbf{P}(B | D_1) \mathbf{P}(D_1 | C) \mathbf{P}(B | D_2) \mathbf{P}(D_2 | C)}}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \delta(B | \{D_1, D_2\}, C) &= \mathbf{P}(B(D_1 \cup D_2) | C) - \sum_{j=1}^2 \mathbf{P}(B | D_j) \mathbf{P}(D_j | C) \\ &= \sum_{j=1}^2 \mathbf{P}(D_j | C) (\mathbf{P}(B | D_j C) - \mathbf{P}(B | D_j)). \end{aligned}$$

Заметим, что если $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$ есть разбиение выборочного пространства, то формула (32) совпадает с интерференционной формулой полной вероятности (см. п. 2).

Для представления контекстов в случае многозначных наблюдаемых будут использованы следующие комбинации формул (30) и (32).

Лемма 6.2. Пусть выполнены условия леммы 6.1 и значения $\mathbf{P}(BD_1)$, $\mathbf{P}(CD_1)$ и $\mathbf{P}(BD_2C)$ строго положительны. Тогда

$$\mathbf{P}(B(D_1 \cup D_2) | C) = \mathbf{P}(B | D_1) \mathbf{P}(D_1 | C) + \mathbf{P}(BD_2 | C) + 2\mu(B | \{D_1, D_2\}, C) \sqrt{\mathbf{P}(B | D_1) \mathbf{P}(D_1 | C) \mathbf{P}(BD_2 | C)}, \quad (34)$$

где

$$\mu(B | \{D_1, D_2\}, C) = \mathbf{P}(B(D_1 \cup D_2) | C) - \mathbf{P}(B | D_1) \mathbf{P}(D_1 | C) - \mathbf{P}(BD_2 | C) \left[2\sqrt{\mathbf{P}(B | D_1) \mathbf{P}(D_1 | C) \mathbf{P}(BD_2 | C)} \right]^{-1}.$$

Предположим, что коэффициенты μ и λ ограничены единицей. Тогда их можно представить в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} \lambda(B | \{D_1, D_2\}, C) &= \cos \theta(B | \{D_1, D_2\}, C), \\ \mu(B | \{D_1, D_2\}, C) &= \cos \gamma(B | \{D_1, D_2\}, C). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (32) и (34), мы получаем преобразование вероятностей в тригонометрическую форму. Из леммы 6.2 мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_x | C) &= \mathbf{P}(B_x(A_1 \cup \dots \cup A_n) | C) \\ &= \mathbf{P}(B_x | A_1) \mathbf{P}(A_1 | C) + \mathbf{P}(B_x(A_2 \cup \dots \cup A_n) | C) \\ &\quad + 2\mu(B_x | \{A_1, A_2 \cup \dots \cup A_n\}, C) \\ &\quad \times \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_1) \mathbf{P}(A_1 | C) \mathbf{P}(B_x(A_2 \cup \dots \cup A_n) | C)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu(B_x | \{A_1, A_2 \cup \dots \cup A_n\}, C) &= \left[\mathbf{P}(B_x(A_1 \cup \dots \cup A_n) | C) - \mathbf{P}(B_x | A_1) \mathbf{P}(A_1 | C) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P}(B_x(A_2 \cup \dots \cup A_n) | C) \right] \\ &\quad \times \left[2\sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_1) \mathbf{P}(A_1 | C) \mathbf{P}(B_x(A_2 \cup \dots \cup A_n) | C)} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Предположим, что коэффициенты относительно малы для всех $x \in X$: $|\mu(B_x | \{A_1, A_2 \cup \dots \cup A_n\}, C)| \leq 1$. Тогда мы можем представить эти коэффициенты как $\mu(B_x | \{A_1, A_2 \cup \dots \cup A_n\}, C) = \cos \gamma(B_x | \{A_1, A_2 \cup \dots \cup A_n\}, C)$. Таким образом, вероятность $\mathbf{P}(B_x | C) \equiv \mathbf{P}(B_x(A_1 \cup \dots \cup A_n) | C)$ может быть представлена как квадрат абсолютного значения комплексной амплитуды

$$\begin{aligned} \varphi_C(x) &\equiv \varphi_C^{(1)}(x) \\ &= \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_1) \mathbf{P}(A_1 | C)} + e^{i\gamma_C^{(1)}(x)} \sqrt{\mathbf{P}(B_x(A_2 \cup \dots \cup A_n) | C)}, \end{aligned}$$

где фаза $\gamma_C^{(1)}(x)$ равна $\gamma(B_x | \{A_1, A_2 \cup \dots \cup A_n\}, C)$. Таким же путем вероятность во втором слагаемом может быть представлена как

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(B_x(A_2 \cup \dots \cup A_n) | C) \\ &= \mathbf{P}(B_x | A_2) \mathbf{P}(A_2 | C) + \mathbf{P}(B_x(A_3 \cup \dots \cup A_n) | C) \\ & \quad + 2\mu(B_x | \{A_2, A_3 \cup \dots \cup A_n\}, C) \\ & \quad \times \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_2) \mathbf{P}(A_2 | C) \mathbf{P}(B_x(A_3 \cup \dots \cup A_n) | C)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & \mu(B_x | \{A_2, A_3 \cup \dots \cup A_n\}, C) \\ &= \left[\mathbf{P}(B_x(A_2 \cup \dots \cup A_n) | C) - \mathbf{P}(B_x | A_2) \mathbf{P}(A_2 | C) \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{P}(B_x(A_3 \cup \dots \cup A_n) | C) \right] \\ & \quad \times \left[2\sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_2) \mathbf{P}(A_2 | C) \mathbf{P}(B_x(A_3 \cup \dots \cup A_n) | C)} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Предполагая, что эти коэффициенты «статистического отклонения» ограничены единицей, мы можем представить вероятность как квадрат абсолютного значения комплексной амплитуды

$$\varphi_C^{(2)}(x) = \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_2) \mathbf{P}(A_2 | C)} + e^{i\gamma_C^{(2)}(x)} \sqrt{\mathbf{P}(B_x(A_3 \cup \dots \cup A_n) | C)},$$

где $\gamma_C^{(2)}(x) = \pm \arccos \mu(B_x | \{A_2, A_3 \cup \dots \cup A_n\}, C)$. На j -м шаге мы представим $\mathbf{P}(B_x(A_j \cup \dots \cup A_n) | C)$ как квадрат абсолютного значения комплексной амплитуды:

$$\varphi_C^{(j)}(x) = \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_j) \mathbf{P}(A_j | C)} + e^{i\gamma_C^{(j)}(x)} \sqrt{\mathbf{P}(B_x(A_{j+1} \cup \dots \cup A_n) | C)},$$

где $\gamma_C^{(j)}(x)$ есть фаза коэффициента

$$\begin{aligned} & \mu(B_x | \{A_j, A_{j+1} \cup \dots \cup A_n\}, C) \\ &= \left[\mathbf{P}(B_x(A_j \cup \dots \cup A_n) | C) - \mathbf{P}(B_x | A_j) \mathbf{P}(A_j | C) \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{P}(B_x(A_{j+1} \cup \dots \cup A_n) | C) \right] \\ & \quad \times \left[2\sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_j) \mathbf{P}(A_j | C) \mathbf{P}(B_x(A_{j+1} \cup \dots \cup A_n) | C)} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Предполагается, что на каждом шаге коэффициенты $|\mu|$ ограничены единицей. На шаге $j = n - 1$ мы должны получить представление для вероятности $\mathbf{P}(B_x(A_{n-1} \cup A_n) | C)$. Здесь уже можно вообще исключить C -контекстуальность для B_x :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(B_x(A_{n-1} \cup A_n) | C) = \mathbf{P}(B_x | A_{n-1}) \mathbf{P}(A_{n-1} | C) + \mathbf{P}(B_x | A_n) \mathbf{P}(A_n | C) \\ & \quad + 2\lambda(B_x | \{A_{n-1}, A_n\}) \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_{n-1}) \mathbf{P}(A_{n-1} | C) \mathbf{P}(B_x | A_n) \mathbf{P}(A_n | C)}, \end{aligned}$$

где коэффициент статистического отклонения λ определен в (33). И если $|\lambda|$ ограничено единицей, то мы можем представить эту вероятность как квадрат абсолютного значения комплексной амплитуды

$$\varphi_C^{(n-1)}(x) = \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_{n-1}) \mathbf{P}(A_{n-1} | C)} + e^{i\theta_C(x)} \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_n) \mathbf{P}(A_n | C)},$$

где $\theta_C(x) = \pm \arccos \lambda(x | \{A_{n-1}, A_n\}, C)$.

Мы имеем

$$\varphi_C^{(j)}(x) = \sqrt{\mathbf{P}(B_x(A_j \cup \dots \cup A_n) | C)} e^{i\alpha_C^{(j)}(x)},$$

где

$$\alpha_C^{(j)}(x) = \arg \varphi_C^{(j)}(x) = \arccos \frac{M_j}{N_j},$$

$$M_j = \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_j) \mathbf{P}(A_j | C)} + \mu(B_x | \{A_j, A_{j+1} \cup \dots \cup A_n\}, C) \\ \times \sqrt{\mathbf{P}(B_x(A_{j+1} \cup \dots \cup A_n) | C)},$$

$$N_j = \sqrt{\mathbf{P}(B_x(A_j \cup \dots \cup A_n) | C)}.$$

Наконец, мы имеем

$$\alpha_C^{(n-1)}(x) = \arg \varphi_C^{(n-1)}(x) \\ = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{\mathbf{P}(B_x(A_{n-1} \cup A_n) | C)}} \right. \\ \times \left[\sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_{n-1}) \mathbf{P}(A_{n-1} | C)} + \lambda(B_x | \{A_{n-1}, A_n\}, C) \right. \\ \left. \times \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_n) \mathbf{P}(A_n | C)} \right] \Bigg].$$

Таким образом,

$$\varphi_C(x) = \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_1) \mathbf{P}(A_1 | C)} + e^{i[\gamma_C^{(1)}(x) - \alpha_C^{(2)}(x)]} \varphi_C^{(2)}(x) \\ = \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_1) \mathbf{P}(A_1 | C)} + e^{i\beta_C^{(2)}(x)} \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_2) \mathbf{P}(A_2 | C)} \\ + e^{i\beta_C^{(3)}(x)} \varphi_C^{(3)}(x),$$

где

$$\beta_C^{(2)}(x) = \gamma_C^{(1)}(x) - \alpha_C^{(2)}(x), \quad \beta_C^{(3)}(x) = \beta_C^{(2)}(x) + \gamma_C^{(2)}(x) - \alpha_C^{(3)}(x).$$

Наконец, мы получаем

$$\varphi_C(x) = \sum_{j=1}^n e^{i\beta_C^{(j)}(x)} \sqrt{\mathbf{P}(B_x | A_j) \mathbf{P}(A_j | C)}$$

с $\beta_C^{(1)}(x) = 0$ (благодаря нашему специальному выбору представления) и $\beta_C^{(n)}(x) = \beta_C^{(n-1)}(x) + \theta_C(x)$.

Таким образом, индуктивно расщепляя многозначные величины в двухзначные, мы представили контекстуальные вероятности комплексными амплитудами $\varphi_C(x)$. Здесь правило Борна справедливо.

Используя стандартные в этой работе обозначения $p(x|y) = \mathbf{P}(B_x|A_y)$ и $p_C^b(x) = \mathbf{P}(B_x|C)$, $p_C^a(y) = \mathbf{P}(A_y|C)$, мы пишем

$$\varphi_C(x) = \sum_y e^{i\beta_C^{(y)}(x)} \sqrt{p_C^a(y) p(x|y)}.$$

В частности, для $n = 3$ мы имеем

$$\begin{aligned} \varphi_C(x) = & \sqrt{p_C^a(a_1) p(x|a_1)} + e^{i\beta_C^{(2)}(x)} \sqrt{p_C^a(a_2) p(x|a_2)} \\ & + e^{i\beta_C^{(3)}(x)} \sqrt{p_C^a(a_3) p(x|a_3)}, \end{aligned}$$

где

$$\beta_C^{(2)}(x) = \gamma_C^{(1)}(x) - \alpha_C^{(2)}(x), \quad \beta_C^{(3)}(x) = \beta_C^{(2)}(x) + \theta_C(x).$$

Заметим, что каждая фаза $\beta_C^{(j)}(x)$ зависит от всех трех a -контекстов A_1, A_2, A_3 . Следовательно, мы можем использовать символ $\beta_C(x|y)$. В $\beta_C^{(y)}(x)$ символ y обозначает индекс суммирования. В самом деле, $\beta_C^{(y)}(x) \equiv \beta_C^{(y)}(x|A_1, A_2, A_3)$. Заметим, что вероятности $p_C^b(x)$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} p_C^b(x) = & |\varphi_C(x)|^2 = \sum_y p_C^a(y) p(x|y) \\ & + 2 \sum_{y_1 < y_2} \cos [\beta_C^{(y_2)}(x) - \beta_C^{(y_1)}(x)] \sqrt{p_C^a(y_1) p_C^a(y_2) p(x|y_1) p(x|y_2)}. \end{aligned}$$

Далее, мы можем продолжить тем же путем как и в случае двузначных случайных величин (см. пп. 2 и 3).

Я хотел бы выразить благодарность А. В. Булинскому, А. Н. Ширяеву, А. С. Холево и В. М. Максимова за дискуссии по основаниям теории вероятностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kolmogoroff A. N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer-Verlag, 1933, 62 p. Рус. перев.: Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974, 119 с.
2. Ширяев А. Н. Вероятность. Т. 1. М.: МЦНМО, 2004, 520 с.
3. Холево А. С. Статистическая структура квантовой теории. М.–Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003, 191 с.
4. Хренников А. Ю., Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика. М.: Физматлит, 2003, 208 с.
5. Bulinskii A. V., Khrennikov A. Yu. Nonclassical total probability formula and quantum interference of probabilities. — Statist. Probab. Lett., 2004, v. 70, № 1, p. 49–58.

6. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968, 382 с.
7. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960, 434 с.
8. фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964, 367 с.
9. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей. — Математика, ее содержание, методы и значение, т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 252–284.
10. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961, 406 с.
11. Rényi A. On a new axiomatic theory of probability. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1955, v. 6, p. 285–335.
12. von Mises R. Mathematical Theory of Probability and Statistics. — New York–London: Academic Press, 1964, 694 p.
13. Conte E., Todarello O., Federici A., Vitiello F., Lopane M., Khrennikov Yu A. A preliminar evidence of quantum-like behaviour in measurements of mental states. — *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations*. Ed. by A. Yu. Khrennikov. Växjö: Växjö Univ. Press, 2004, p. 441–454. (Math. Model. Phys. Eng. Cogn. Sci., v. 10.)
14. Khrennikov A. Yu. Quantum-like formalism for cognitive measurements. — Biosystems, 2003, v. 70, p. 211–233.
15. Khrennikov A. Yu. Information Dynamics in Cognitive, Psychological, Social and Anomalous Phenomena. Dordrecht: Kluwer, 2004, 235 p.
16. Grib A. A., Khrennikov A. Yu., Starkov K. Probability amplitude in quantum like games. — *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations*. Ed. by A. Yu. Khrennikov. Växjö: Växjö Univ. Press, 2004, p. 703–721. (Math. Model. Phys. Eng. Cogn. Sci., v. 10.)
17. Choustova O. A. Bohmian mechanics for financial processes. — J. Modern Opt., 2004, v. 51, № 6–7, p. 1111–1112.
18. Khrennikov A. Yu., Kozyrev S. V. Noncommutative probability in classical disordered systems. — Phys. A, 2003, v. 326, № 3–4, p. 456–463.
19. Khrennikov A. Yu. Linear representations of probabilistic transformations induced by context transitions. — J. Phys. A, 2001, v. 34, № 47, p. 9965–9981.
20. Khrennikov A. Yu. Contextual viewpoint to quantum statistics. — J. Math. Phys., 2003, v. 44, № 6, p. 2471–2478.
21. Khrennikov A. Yu. Interference of probabilities and number field structure of quantum models. — Ann. Phys., 2003, v. 12, № 10, p. 575–585.
22. Maximov V. M. Abstract models of probability. — *Foundations of Probability and Physics*. River Edge: World Scientific, 2001, p. 257–273. (QP–PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., v. 13.)

Поступила в редакцию
30.04.2004