Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Черный, Рецензия на книгу: Hida T., Karandikar R. L., Kunita H., Rajput B. S., Watanabe S., Xiong J. (Eds). “Stochastics in Finite and Infinite Dimensions”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 3, 613–615

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:14:28

© 2002 г.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Hida T., Karandikar R. L., Kunita H., Rajput B. S., Watanabe S., Xiong J. (Eds). **Stochastics in Finite and Infinite Dimensions**. In Honor of Gopinath Kallianpur. Boston: Birkhäuser, 2001, xxxvi+410 p.

Данная книга представляет собой сборник статей, посвященный 75-летию юбилею Гопината Каллианпура.

Г. Каллианпур является признанным специалистом в области стохастического анализа. Круг его научных интересов включает, в частности, теорию фильтрации случайных процессов, стохастические дифференциальные уравнения, интегралы Фейнмана, бесконечномерные диффузионные процессы, фрактальное броуновское движение, а также приложения стохастического анализа в экологии и в финансовой математике. Им написан ряд монографий, в том числе «Стохастическая теория фильтрации» (М.: Наука, 1987) и вышедшая недавно «Introduction to Option Pricing Theory» (совм. с Р. Л. Карандикаром; Boston: Birkhäuser, 1999).

Опишем некоторые из результатов, полученных Г. Каллианпуром.

Пусть $(B_t)_{t \geq 0}$ — двумерное броуновское движение, выходящее из нуля. Положим $A(t) = \int_0^t f(B_s) ds$, где f — ограниченная функция с $(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = 1$. Закон Каллианпура–Роббинса утверждает, что тогда $A(t)/\ln t$ сходится по распределению при $t \rightarrow \infty$ к экспоненциальной случайной величине с параметром 1.

Другим известным результатом является формула Каллианпура–Стрибела, относящаяся к теории фильтрации. Пусть $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ — наблюдаемый процесс, имеющий вид

$$Z_t = \int_0^t X_s ds + W_t,$$

где $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ — процесс сигнала, а $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ — броуновское движение, играющее роль «шума». При этом X и W предполагаются независимыми. Пусть $g = g(X)$ — функционал от процесса X . Задача состоит в том, чтобы оценить g по наблюдениям за процессом Z . Оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой служит условное математическое ожидание $\mathbf{E}[g(X) | Z]$. Возникает проблема дать явную формулу для вычисления $\mathbf{E}[g(X) | Z]$. Для описания этой формулы будем предполагать, что $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1) \times (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2)$, причем процесс X задан на Ω_1 , а процесс W задан на Ω_2 . Рассмотрим функционал

$$q(X, Z) = \exp \left\{ \int_0^T X_s dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^T X_s^2 ds \right\}.$$

Формула Каллианпура–Стрибела утверждает, что

$$\mathbf{E}[g(X) | Z] = \frac{\int_{\Omega_1} g(X) q(X, Z) \mathbf{P}_1(dX)}{\int_{\Omega_1} q(X, Z) \mathbf{P}_1(dX)}.$$

Г. Каллианпуру принадлежат также многие другие результаты, описание которых можно найти в очерке Б. Рао, помещенном в начале данной книги. Большую же часть сборника составляют статьи, написанные друзьями, учениками и коллегами Г. Каллианпура.

Кратко рассмотрим содержание некоторых из этих работ.

Статья К. Б. Атрейа и Р. Н. Бхаттачария «Random iteration of i.i.d. quadratic maps» посвящена случайным итерациям логистического отображения. Это отображение имеет вид

$$F_\theta: [0, 1] \ni x \mapsto \theta x(1 - x) \in [0, 1],$$

где $\theta \in [0, 4]$ — параметр отображения. Логистическое отображение играет важную роль в теории динамических систем, а последовательность его итераций $x_{n+1} = F_\theta(x_n)$ служит классическим примером хаотической последовательности. В статье рассмотрена последовательность случайных итераций $X_{n+1} = F_{C_{n+1}}(X_n)$, где $C_1, C_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в $[0, 4]$. Для этой марковской последовательности в статье даются достаточные условия существования инвариантной меры, а также приведен пример неединственности инвариантной меры.

В работе Р. Эллиота и Э. Платена «Hidden Markov chain filtering for generalized Bessel processes» рассматривается процесс $R = (R_t)_{t \in [0, T]}$, заданный стохастическим дифференциальным уравнением

$$dR_t = \left[\frac{\alpha_t}{R_t} + (\beta_t + \eta_t)R_t \right] dt + c_t dW_t, \quad (*)$$

где α_t, β_t, c_t — заданные детерминированные функции, а η_t — марковская цепь с конечным числом состояний $\{\eta^1, \dots, \eta^N\}$. Процесс вида (*) можно назвать обобщенным процессом Бесселя. Процессы Бесселя, а также их обобщения, играют значительную роль как в теоретических областях стохастического анализа (они служат удобным «модельным» примером регулярных непрерывных строго марковских процессов), так и в приложениях (например, в биологии при моделировании размера популяции). В работе Р. Эллиота и Э. Платена рассмотрена проблема оценивания значений марковской цепи η_t по наблюдениям за процессом R_t . Построенная оценка выражается через решение некоторого вспомогательного стохастического дифференциального уравнения.

Статья Я. Ху «Prediction and translation of fractional Brownian motions» содержит аналог теоремы Гирсанова для фрактального броуновского движения. Этот процесс был впервые рассмотрен А. Н. Колмогоровым в 1940 г. под названием «спираль Винера» и получил известность (а также свое современное название) благодаря работе Б. Мандельброта и Дж. Ван Несса в 1968 году. В последние годы наблюдается значительный интерес к фрактальному броуновскому движению в финансовой математике, поскольку этот процесс очень удобен для моделирования долгосрочной зависимости цен. В статье Я. Ху дается вид плотности

$$\frac{d \text{Law}(B_t^H + \int_0^t g(s) ds; t \in [0, T])}{d \text{Law}(B_t^H; t \in [0, T])}, \quad (**)$$

где B_t^H — фрактальное броуновское движение с параметром автомодельности H , а $g(t)$ — некоторая детерминированная функция. При этом в формуле для плотности (**) фигурирует функция, являющаяся решением дифференциального уравнения с дробными производными, что открывает интересную взаимосвязь с теорией дробного интегрирования и дифференцирования.

В работе Р. Микулявичуса и Б. Розовского «On equations of stochastic fluid mechanics» рассматривается стохастическое уравнение Навье–Стокса для моделирования турбулентного потока со случайным возмущением. Это уравнение имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t, x) = u(t, \eta(t, x)) + \sigma(t, \eta(t, x)) \circ \dot{W}, \\ \eta(0, x) = x, \end{cases} \quad (***)$$

где $\eta(t, x)$ — случайное поле, имеющее смысл положения в момент времени t частицы, находящейся в момент $t = 0$ в точке $x \in \mathbb{R}^d$. Для коэффициентов $u(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ в статье выводятся с использованием второго закона Ньютона уравнения в частных производных. (В частном случае, при $\sigma = 0$, для $u(t, x)$ получается классическое детерминированное уравнение Навье–Стокса.) Для полученного таким образом уравнения (***) в работе доказываются существование решения при $d = 2, 3$ и единственность решения при $d = 2$, где d — размерность фазового пространства.

Без сомнения, настоящий сборник привлечет внимание специалистов в области случайных процессов. Статьи, включенные в сборник, дают прекрасное представление о современном состоянии многих активно развивающихся в настоящее время ветвей стохастического анализа.

9.VII.2001

А. С. Черный

Shafar G., Vovk V. **Probability and Finance. It's Only a Game.** Chichester: Wiley, 2001, xii+414 p.

Это монография, излагающая ряд замечательных и совершенно неожиданных результатов авторов, которые частью являются чисто математическими, а частью относятся к той области математического естествознания, которая занимается исследованием финансового рынка. Речь идет о новом понимании вероятности, которое авторы называют «теоретико-игровым» (game-theoretical probability), но я бы предпочел называть «рыночным» (market probability). (Как всегда при образовании нового научного подхода, речь идет о вещах, в глубине своей несколько мистических, и поэтому название — важно, а почему название «рыночная вероятность» мне кажется более правильным — будет ясно из дальнейшего.) В основе этого нового подхода к вероятности лежит не предположение о существовании некоторого датчика случайности вроде бросания монеты, а всего лишь предположение о возможности делать денежные ставки на будущий ход событий (чем испокон века и занимаются рыночные спекулянты).

Существуют два стиля научных публикаций. Один стиль — современный — на первый план выдвигает научную новизну открытий авторов. Но этот стиль плохой, так как новизна является делом неуловимым, и вообще нет ничего хуже, чем затеять приоритетный спор (классический пример — Лейбниц и Ньютон). Другой стиль — древний, при котором подчеркивается преемственность. В Средние века хорошим тоном считалось бы сказать сначала, что, вот, Гермес Трисмегист (он же египетский бог Тот) и Альбертус Магнус, как оказывается, думали об обсуждаемых вещах примерно то же самое, что и ныне пишущий автор. Такой стиль для монографии очень хорош, и именно ему следуют авторы рецензируемой книги. Правда, они начинают не с самого Гермеса Трисмегиста, а лишь с Паскаля и Ферма и следуют от них к Мизесу и Колмогорову, особенно отмечая как идейно близкие работы Ж. Вилля (Jean Ville, 1910–1988), который является автором вероятностного понятия мартингала. (Оказывается, Дж. Л. Дуб написал в 1939 г. рецензию на книгу Вилля.) Но в рецензии такому стилю следовать невозможно из-за необходимой краткости. Я пользуюсь правом рецензента, чтобы заявить о том, что, по моему мнению, подход авторов является абсолютно оригинальным, а их замечательные и заслуженно знаменитые предшественники все-таки, как мне кажется, ни о чем подобном не думали.

Чтобы доказать такое утверждение, следует привести демонстрационный пример подхода авторов. Я позволю себе слегка отредактировать их рассуждения из главы 3 книги. Рассмотрим финансовый рынок, работающий в дискретные моменты времени (скажем, раз в день), и пусть S_n обозначает цену некоторого актива в день n , а эволюция цены описывается простой и естественной формулой $S_{n+1} = S_n(1 + x_n)$. Когда мы подходим с обычных вероятностных позиций к исследованию динамики