Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, Асимптотика вероятности пересечения границы траекторией цепи Маркова. Регулярные хвосты скачков, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 4, 625–653

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3772>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 18:17:28

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 47

Выпуск 4, 2002 год

октябрь, ноябрь, декабрь

© 2002 г.

БОРОВКОВ А. А.*

АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГРАНИЦЫ ТРАЕКТОРИЕЙ ЦЕПИ МАРКОВА. РЕГУЛЯРНЫЕ ХВОСТЫ СКАЧКОВ

Пусть $X(k) = X(u, k)$, $k = 0, 1, \dots$, — однородная во времени вещественнозначная эргодическая цепь Маркова с начальным значением $u \equiv X(u, 0) = X(0)$. Изучается асимптотика вероятности пересечения траекторией $X(k)$ заданной границы $g(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$: $\mathbf{P}\{\max_{k \leq n} (X(k) - g(k)) > 0\}$, где граница g зависит, вообще говоря, от n , а также от некоторого растущего параметра x таким образом, что $\min_{k \leq n} g(k) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Относительно цепи предполагается, что распределения приращений $\xi(u) = X(u, 1) - u$ имеют правильно меняющиеся хвосты или мажорируются такими хвостами.

В работе получены предельные теоремы, описывающие асимптотику изучаемых вероятностей при весьма широких условиях в области как больших, так и нормальных уклонений, в том числе теоремы, действующие «равномерно на всей оси» с правыми частями, найденными в явном виде. Для положительно возвратных по Харрису цепей изучены также асимптотические свойства циклов по возвращению в положительный атом. Установлен аналог закона повторного логарифма.

Ключевые слова и фразы: цепи Маркова, большие уклонения, пересечение границы, регулярные хвосты, закон повторного логарифма, равномерные теоремы.

§ 1. Введение

Пусть $X(k) = X(u, k)$, $k = 0, 1, \dots$, — однородная во времени вещественнозначная эргодическая цепь Маркова (ЦМ) с начальным значе-

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru

нием $u \equiv X(u, 0)$ и переходной вероятностью

$$P(u, B) = \mathbf{P}\{X(u, 1) \in B\}.$$

Вероятности больших отклонений $\mathbf{P}\{X(n) > x\} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ для так называемых асимптотически однородных в пространстве цепей $X(n)$ достаточно полно изучены в [1]–[3]. Асимптотическая однородность в пространстве означает, что приращения цепи $\xi(u) = X(u, 1) - u$ имеют при $u \rightarrow \infty$ свойство сходимости по распределению к некоторой случайной величине ξ . Подробнее это понятие обсуждается в [14].

В настоящей работе изучается в известном смысле более трудная задача об асимптотике вероятности пересечения произвольной границы (последовательности) $g(0) = x, g(1), g(2), \dots$:

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} (X(k) - g(k)) > x\right\}, \quad (1.1)$$

где $g(k)$ зависит, вообще говоря, от n и растущего параметра $x \rightarrow \infty$ таким образом, что $\min_{k \leq n} g(k) > cx, c > 0$. Если $g(k) \equiv x$, то мы приходим к задаче об асимптотике

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(n) > x\}, \quad (1.2)$$

где $\bar{X}(n) = \max_{k \leq n} X(k)$.

В общем случае наибольший интерес, по-видимому, представляют границы $\{g(k)\}$ следующих двух типов:

- 1) $g(k) = x + g_k$, где g_k — фиксированная (не зависящая от x и n) последовательность, $\inf g_k > -\infty$;
- 2) $g(k) = xf(k/n)$, где $f(\cdot)$ — фиксированная функция на $[0, 1]$, $f(0) = 1, \min_{t \in [0, 1]} f(t) > 0$.

Простейшей задачей рассматриваемого типа является задача о распределении $\bar{Y}(n) = \max_{k \leq n} Y(k)$ (соответствующая границе $g(k) \equiv x$), где цепь $\{Y(k)\}$ определяется рекуррентными соотношениями

$$Y(k+1) = \max(0, Y(k) + \xi_{k+1}), \quad k \geq 0, \quad (1.3)$$

ξ_k независимы и распределены как ξ , $\mathbf{E}\xi < 0$. Такие цепи описывают работу целого ряда систем обслуживания. Например, $Y(n)$ можно интерпретировать как время ожидания n -го вызова в системе $G/G/1$, если положить $\xi = s - \tau$, где s — время обслуживания, τ — интервал времени между приходами вызовов. (Для несколько иных систем $Y(n)$ будет описывать длину очереди; цепи (1.3) появляются и во многих других задачах.) Асимптотически однородные цепи могут описывать поведение «управляемых» систем того же вида. Простейшее управление в системе $G/G/1$ может состоять, например, в том, что интенсивность обслуживания (т.е. распределение s) зависит от времени ожидания (или

длины очереди). В этом случае можно уменьшить потери, связанные с долгим ожиданием (при соответствующей постановке задачи), и поставить целый ряд оптимизационных задач.

Вернемся к цепям общего вида и опишем условия на распределение приращений $\xi(u)$ этих цепей, при которых будет происходить изучение асимптотики (1.1), (1.2). Обозначим

$$V_u(t) = \mathbf{P}\{\xi(u) > t\}.$$

Условия (V) будут относиться к «хвостам» $V_u(t)$ распределений $\xi(u)$:

(V) *Предположим, что существуют постоянная c и «правильно меняющаяся» (регулярная) функция*

$$V(t) = t^{-\beta} L(t), \quad \beta > 1, \quad (1.4)$$

где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция при $t \rightarrow \infty$, такие, что

$$(V_1) \quad \begin{aligned} V_u(t) &\leq cV(t) && \text{при } u \geq 0, t > 0, \\ V_u(t-u) &\leq cV(t) && \text{при } u < 0, t > 0; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$(V_2) \quad \text{при любом } u \text{ существует } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V_u(t)}{V(t)} \equiv q(u) \leq 1. \quad (1.6)$$

Так как $q(u) \leq 1$, то $V(t)$ можно интерпретировать как «самый тяжелый хвост» среди $V_u(t)$. Обозначим далее

$$V^*(t) \equiv V^*(t, N) = \sup_{u \geq N} V_u(t), \quad V_*(t) \equiv V_*(t, N) = \inf_{u \geq N} V_u(t), \quad (1.7)$$

ξ^*, ξ_* — случайные величины с распределением, соответственно, V^* и V_* . Тогда, очевидно,

$$\xi(u) \leq_d \xi^*, \quad \xi(u) \geq_d \xi_* \quad (1.8)$$

при $u \geq N$,

$$V^*(t) \leq c_N V(t), \quad c_N \downarrow c_\infty \leq c \quad (1.9)$$

при $N \rightarrow \infty$ и при выполнении (V_1) .

Нам понадобится также следующее условие.

(V₃) *При достаточно больших N*

$$\mathbf{E}\xi^* = a^* < 0, \quad \mathbf{E}\xi_* = a_* > -\infty, \quad (1.10)$$

$$\overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{V^*(t, N)}{V_*(t, N)} < \infty. \quad (1.11)$$

Условие (1.11) является чисто техническим, без него можно обойтись и оно введено нами исключительно для упрощения доказательства (см. лемму 2.3).

Условие, состоящее в выполнении $(V_1)-(V_3)$, мы обозначим через (V) .

Упомянутое выше условие асимптотической однородности (в пространстве) рассматриваемой цепи состоит в следующем:

$$(AH) \quad \xi(u) \Rightarrow \xi \quad \text{при } u \rightarrow \infty,$$

где $\mathbf{E}\xi = a < 0$, знак $\Rightarrow$ означает слабую сходимость по распределению.

Нетрудно видеть, что условия (AH) и (V_1) влекут за собой первое неравенство в (1.10). Второе неравенство будет следовать, например, из равномерной ограниченности $\sup_{u \geq N} \mathbf{E}|\xi(u)|^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Одно из утверждений [3] состоит в следующем. Буквой c с индексами или без мы будем в дальнейшем обозначать различные постоянные, не всегда одни и те же, если они используются в разных формулах. Соотношение $a(x, n) \sim b(x, n)$ будет означать, что $a(x, n)/b(x, n) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ и указанных интервалах значений n .

Теорема 1.1. Пусть цепь X эргодична в смысле сходимости по вариации и π есть стационарное распределение для X :

$$\left\| \mathbf{P}\{X(u, n) \in \bullet\} - \pi(\bullet) \right\|_{\text{Var}} \rightarrow 0 \quad (1.12)$$

при $n \rightarrow \infty$ и всех u , $|u| < c$. Пусть, кроме того, выполнены условия (V_1) , (V_2) , (AH) ,

$$q = \int q(u) \pi(du) > 0,$$

где $q(u)$ определено в (1.6). Тогда при $x \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{X(n) > x\} \sim \frac{q}{a} \int_x^{x+an} V(t) dt \sim \begin{cases} qnV(x) & \text{при } n \ll x, \\ \frac{cx}{a(\beta-1)} V(x) & \text{при } n \gg x. \end{cases} \quad (1.13)$$

Если n фиксировано, $x \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\{X(n) > x\} \sim \sum_{k=1}^n \mathbf{E}q(X(k)). \quad (1.14)$$

Если функция $q(u) \leq 1$ непрерывна, то вместо сходимости (1.12) можно предполагать лишь слабую сходимость.

Вернемся теперь к задаче об асимптотике (1.1), (1.2). Здесь нам известны лишь результаты, относящиеся к цепям специального вида

(см. [4]–[11]). Приведем один из них, представляющий для нас наибольший интерес и относящийся к цепи $Y(n) = Y(u, n)$, определенной в (1.3). Обозначим

$$\bar{\xi}_n = \max_{k \leq n} \xi_k, \quad \bar{Y}(u, n) = \max_{k \leq n} Y(u, k). \quad (1.15)$$

Одно из основных утверждений [4] состоит в следующем.

Теорема 1.2. *Если ξ имеет непрерывное субэкспоненциальное распределение, то*

$$\bar{Y}(0, n) - \bar{\xi}_n \xrightarrow{\text{Var}} Y_1 + Y_2,$$

где Y_1, Y_2 независимы и имеют стационарное распределение π величины $Y(u, \infty)$.

Обозначим $N(n) = V^{(-1)}(1/n)$, где $V^{(-1)}$ — функция, обратная к V , так что $N(n) = n^{1/\beta} L_1(n)$, где L_1 , так же, как L , является медленно меняющейся функцией. Так как предельное распределение $\bar{\xi}_n$ хорошо известно (см. также § 3), то из теоремы 1.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Пусть ξ имеет непрерывное распределение вида (1.4). Тогда при любом фиксированном t*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{\bar{Y}(0, n)}{N(n)} < t\right\} &\sim \mathbf{P}\{\bar{\xi}_n < tN(n)\} = [1 - V(tN(n))]^n \\ &\sim \left(1 - \frac{t^{-\beta}}{n}\right)^n \sim e^{-t^{-\beta}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Из (1.16) вытекает, что $\mathbf{P}\{\bar{Y}(0, n) > tN(n)\} \sim t^{-\beta}$, если $t \rightarrow \infty$ достаточно медленно. Однако изучать с помощью утверждений типа теоремы 1.2 асимптотику (1.2) для $Y(u, n)$ при произвольных $x \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ невозможно.

Доказательство теоремы 1.2 в [4] основано на изучении асимптотических свойств циклов цепи $Y(0, k)$ по попаданию в 0 (см. об этом также § 3). Оказывается, что можно двигаться и «в обратном направлении». Ниже в § 3 с помощью результатов об асимптотике (1.2) в области больших отклонений мы восстановим асимптотическую природу циклов по возвращению цепи в положительный атом и, как следствие, получим предельные теоремы для $\bar{X}(u, n)$ в области нормальных отклонений. Для общих регенерирующих процессов $Y(k)$ (и, в частности, для положительно возвратных харрисовых цепей) асимптотика распределений $\bar{Y}(n) = \max_{k \leq n} Y(k)$ в терминах распределений максимумов по циклам получена в [11] (аналог теоремы 3.1; см. ниже).

В § 2 будут получены утверждения, описывающие асимптотику вероятностей (1.1), (1.2) в области больших отклонений для широкого класса границ g .

В § 3 задачи об асимптотике (1.1), (1.2) решаются для эргодических харрисовых цепей с помощью циклов по возвращению в положительный (возможно, искусственный) атом. Сопоставление с результатами § 2 позволяет изучить в нужной мере асимптотическую природу этих циклов и найти, как уже отмечалось выше, предельное распределение $\bar{X}(n)$ для рассматриваемых произвольных харрисовых эргодических цепей в области нормальных уклонений.

Параграф 4 посвящен доказательству «закона повторного логарифма» для траектории $X(n)$.

§ 2. Асимптотика вероятности пересечения произвольной границы

В этом параграфе мы изучим асимптотику (1.1) для границ g , которые удовлетворяют некоторым весьма широким условиям регулярности.

Неубывающую последовательность $h(k) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, мы будем называть *подстепенной*, если она растет не быстрее некоторой степенной функции; более точно, для любого фиксированного $b > 0$ и всех достаточно больших k выполняется

$$h((1+b)k) \leq c(b)h(k), \quad (2.1)$$

где $c(b)$ зависит лишь от b и последовательности $\{h(k)\}$. Очевидно, что все функции вида $h(k) = k^\alpha L_h(k)$, где L_h — медленно меняющаяся функция, являются подстепенными.

Нам понадобятся следующие условия на границу g .

(G₁) Существует подстепенная функция $h(\cdot)$ и постоянные $0 < b_1 < b_2 < \infty$ такие, что при всех k

$$(x + h(k))b_1 < g(k) < (x + h(k))b_2. \quad (2.2)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $h(0) = 0$, $b_1 < 1 < b_2$.

(G₂) При всех k

$$g(k+1) - g(k) > a^* = \mathbf{E}\xi^*,$$

где ξ^* определена после (1.7), $a^* < 0$.

Условие (G₂) является в известном смысле техническим и введено нами исключительно ради упрощения формулировок утверждений и их доказательств. Утверждение приведенной ниже теоремы 2.1 сохранится и без условия (G₂), но в измененном виде; см. об этом замечание 2.2.

Теорема 2.1. Пусть цепь X эргодична в смысле сходимости по вариации и π есть ее стационарное распределение. Пусть далее выполнены условия (V), (G₁), (G₂),

$$q = \int q(v) \pi(dv) > 0.$$

Тогда при $|u| < c$, $x \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{k=1}^n V(g(k)) \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

выполняется

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} (X(u, n) - g(k)) > 0\right\} \sim q \sum_{k=1}^n V(g(k)). \quad (2.4)$$

Значение $n = \infty$ в (2.3), (2.4) не исключается.

Если эргодичность X имеет место лишь в смысле слабой сходимости, то (2.4) сохранится при дополнительном условии непрерывности $q(v)$ на множестве скачков распределения π .

Если $x \rightarrow \infty$, а n фиксированно, то

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} (X(u, k) - g(k)) > 0\right\} \sim \sum_{k=1}^n V(g(k)) \int q(v) \mathbf{P}\{X(k-1) \in dv\}. \quad (2.5)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Если процесс $X(k)$ есть цепь $Y(k)$ вида (1.3), $\mathbf{E}\xi < 0$, $\mathbf{P}\{\xi > t\}$ имеет вид (1.4), то, очевидно, все условия теоремы выполнены, $q = 1$.

Если $X(k)$ есть осциллирующая цепь Маркова, то $\xi(u) = {}_d\xi^{(+)}$ для $u > 0$, $\xi(u) = {}_d\xi^{(-)}$ для $u < 0$; $V_u(t) = V^{(+)}(t)$ для $u > 0$, $V_u(t) = V^{(-)}(t)$ для $u < 0$. Для простоты будем считать, что существует «максимальный» из трех хвостов $V^{(+)}(t)$, $V_0(t)$, $V^{(-)}(t)$. Пусть для определенности это будет $V^{(+)}(t)$. Тогда условие (V_2) предполагает существование $q(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} [V_0(t)/V^{(+)}(t)]$, $q^{(-)} = \lim_{t \rightarrow \infty} [V^{(-)}(t)/V^{(+)}(t)]$. Условия (V_1) , (V_2) будут выполнены при $\mathbf{E}(\xi^{(+)}) < 0$, $\mathbf{E}(\xi^{(-)}) > 0$, $\mathbf{E}|\xi(0)| < \infty$. Если обозначить $\pi^{(+)} = \pi((0, \infty))$, $\pi^{(-)} = \pi((-\infty, 0))$, то

$$q = \pi^{(+)} + q(0) \pi(\{0\}) + q^{(-)} \pi^{(-)}.$$

Условие эргодичности в смысле сходимости по вариации будут выполнены, если дополнительно потребовать, либо чтобы распределения $\xi^{(+)}$, $\xi(0)$, $\xi^{(-)}$ были решетчатыми с н.о.д. возможных значений, равным 1 (тогда каждая целочисленная точка будет положительным атомом), либо чтобы распределение хотя бы одной из случайных величин $\xi^{(+)}$, $\xi^{(-)}$ содержало абсолютно непрерывную компоненту (в этом случае будет существовать «искусственный положительный атом»; см., например, [15, гл. 12]).

З а м е ч а н и е 2.2. Если условие (G_2) не выполнено, а цепь является асимптотически однородной в пространстве (удовлетворяющей (АН)), то правая часть в (2.4) будет иметь вид $q \sum_{k=1}^n V(g(k, a))$, где $g(k, a) = \min[g(k), g(k+1) - a, \dots, g(n) - a(n-k)]$. Изменения в доказательстве при этом не очень существенны и относятся лишь к заключительной его части (см. оценку (2.29)).

З а м е ч а н и е 2.3. Условия, обеспечивающие эргодичность X в смысле сходимости по вариации (для этого нужна возвратность цепи по Харрису, см. также §3) и в смысле слабой сходимости, можно найти, например, в [14].

З а м е ч а н и е 2.4. Нет сомнений, что утверждение теоремы 2.1 останется справедливым и для функций g , растущих более быстрым образом, например, для функций $g(k) = x + h(k)$, $h(k) = e^{x^\gamma L(x)}$, где $\gamma > 0$, $L(\cdot)$ — медленно меняющаяся функция. Однако техника доказательства при этом изменится.

Следствие 2.1. Если $f(t)$ — кусочно-гладкая на $[0, 1]$ функция, $f(0) = 1$, $\min f(t) > 0$ и в точках гладкости выполняется $f'(t) > a^*n/x$, то для $g(k) = xf(k/n)$ условия (G_1) , (G_2) будут выполнены при $h(k) \equiv 0$ и правая часть в (2.4) будет иметь вид

$$qnV(x) \int_0^1 f^{-\beta}(t) dt.$$

Следствие 2.2. Если $g(k) \equiv x$, то из (2.4) вытекает, что при $|u| < c$, $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} \sim qnV(x). \quad (2.6)$$

Повторяя рассуждения приведенного ниже доказательства, можно получить также, что для величины $\eta(x) = \min\{k: X(u, k) > x\}$ выполняется

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta(x)}{n} < t\right\} \rightarrow t, \quad t \in [0, 1],$$

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x, X(u, \eta(x)) - x > y\} \sim qnV(x + y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.1. Здесь, как и при изучении вероятностей больших отклонений сумм независимых случайных величин с регулярными хвостами, основная идея доказательства состоит в выделении траекторий, имеющих один большой скачок.

Обозначим через $\xi^{(j)} = \xi(X(j-1))$ величину j -го скачка цепи и положим при $y_j = \delta g(j)$, $j = 1, 2, \dots$, $\delta \in (0, 1)$

$$A = \left\{ \max_{k \leq n} (X(k) - g(k)) > 0 \right\},$$

$$B_j = \left\{ \xi^{(j)} \leq y_j; X(j-1) \geq 0 \right\} \cup \left\{ X(j-1) + \xi^{(j)} \leq y_j; X(j-1) < 0 \right\},$$

$$B_k^j = \bigcap_{i=k}^j B_i, \quad B^j = B_1^j, \quad B = B^n.$$

Нетрудно видеть, что дополнительное к B_j событие $\bar{B}_j$ имеет вид

$$\bar{B}_j = \left\{ \xi^{(j)} > y_j, X(j-1) \geq 0 \right\} \cup \left\{ X(j-1) + \xi^{(j)} > y_j; X(j-1) < 0 \right\}.$$

В основе доказательства лежит представление

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\bar{B}) + \mathbf{P}(AB), \quad (2.7)$$

и наша первая задача состоит в оценке $\mathbf{P}(AB)$.

Для этой оценки нам понадобится ряд дополнительных утверждений. Введем в рассмотрение последовательности z_i, n_i , определенные следующим образом. Пусть сначала $g(k)$ определены для всех k . Положим

$$\begin{aligned} \theta &= \max \{k: g(k) \leq 2b_2x\} \quad (\theta = \infty, \text{ если все } g(k) \leq 2b_2x), \\ n_0 &= 0, \quad n_1 = z_1 = b \min(x, \theta), \\ z_2 &= b \min(n_1, g(n_1)), \quad n_2 = n_1 + z_2, \dots; \\ z_{k+1} &= b \min(n_k, g(n_k)), \quad n_{k+1} = n_k + z_{k+1}, \dots \end{aligned}$$

Из условия (G_1) следует, что $\theta \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Если $g(k)$ определены лишь для $k \leq n$, то мы полагаем $\theta = n$, при условии, что $g(k) \leq 2b_2x$, $k = 1, \dots, n$. В этом случае процесс построения z_i, n_i происходит как и прежде, но лишь до момента $l = \max\{k: n_k < n\}$, так что $n_l < n$, $n_{l+1} \geq n$. На этом процесс построения заканчивается.

Лемма 2.1. Положим $\bar{g}(k) = \max_{i \leq k} g(i)$. Справедливы неравенства

$$1) \quad g(n_k) \geq \frac{z_{k+1}}{b}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Если выполнено (G_1) , то

$$2) \quad g(0) > c\bar{g}(n_1), g(n_k) > c\bar{g}(n_{k+1}), k = 1, \dots, l-1; g(n_l) > c\bar{g}(n).$$

Доказательство. Первое неравенство очевидным образом вытекает из определения z_k , так как при $k \geq 1$

$$z_{k+1} = b \min(n_k, g(n_k)) \leq bg(n_k), \quad z_1 = b \min(x, \theta) \leq bx = bg(0).$$

Второе неравенство при $k \geq 1$, $n_{k+1} < n$ вытекает из (G_1) и соотношений

$$\begin{aligned} \bar{g}(n_{k+1}) &\leq b_2(x + h(n_{k+1})) = b_2(x + h(n_k + z_{k+1})) \leq b_2(x + h(n_k + bn_k)) \\ &\leq b_2(x + c(b)h(n_k)) \leq b_2c(b)(x + h(n_k)) \leq \frac{b_2}{b_1}c(b)g(n_k). \end{aligned} \quad (2.8)$$

При $k = 0$ имеем

$$\bar{g}(n_1) \leq b_2(x + h(\theta)) \leq b_2x(1 + 2b_2) = b_2(1 + 2b_2)g(0).$$

При $k = l$ и $\Delta = n - n_l \leq z_{l+1}$ выполняется

$$\bar{g}(n) \leq b_2(x + h(n_l + \Delta)) \leq b_2(x + h(n_l + z_{l+1})),$$

что в силу (2.8) приводит к последнему неравенству леммы 2.1. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к оценке вероятности $\mathbf{P}(AB)$ в (2.7).

Лемма 2.2. *При выполнении (V), $(G_1), (G_2)$ и $h < 1/2$*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(AB) \leqslant (1 + o(1)) \bigg[\sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{P}\{X(n_{j+1}) > hg(n_j); B^{n_j}\} \\ + \mathbf{P}\{x(n) > hg(n_l); B^n\} \bigg]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Доказательство. Положим $\eta = \eta(g(\cdot)) = \min\{k: X(k) \geqslant g(k)\}$. Тогда $A = \{\eta \leqslant n\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta \leqslant n; B^n\} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{\eta = i, B^n\} \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \mathbf{P}\{\eta = i, B^n\} + \sum_{i=n_l}^n \mathbf{P}\{\eta = i, B^n\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Оценим $\sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \mathbf{P}\{\eta = i, B^n\}$. Пусть $\mathfrak{F}^k = \sigma(X(0), \dots, X(k))$ и $\mathfrak{F}_k = \sigma(X(k))$ суть σ -алгебры, порожденные $X(0), \dots, X(k)$ и $X(k)$ соответственно. При $m = n_j, z = z_{j+1}, h < 1$ в силу марковости имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X(m+z) > hg(m), B^n\} \\ \geqslant \sum_{k=m+1}^{m+z} \mathbf{E} \Big[I(\eta = k, B^k) \\ \times \mathbf{P}\{\tilde{X}(g(k) + \chi, m+z-k) > hg(m); B_{k+1}^n \mid \mathfrak{F}^k\} \Big], \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $I(\eta = k)\chi \geqslant 0$ есть $\mathfrak{F}^k$ -измеримая величина первого перескока через границу $g(\cdot)$, $\tilde{X}$ — цепь Маркова, не зависящая от $\mathfrak{F}^k$ и устроенная так же, как X , B_{k+1}^n может быть очевидным образом переписано как событие $\tilde{B}^{n-k}$, соответствующее цепи $\tilde{X}$ и новой (сдвинутой) границе. Очевидно, что на множестве $\{\eta = k, B^k\}$

$$\mathbf{P}\{B_{k+1}^n \mid \mathfrak{F}^k\} \geqslant \mathbf{P}(B^n), \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\Big\{ \tilde{X}(g(k) + \chi, m+z-k) > hg(m) \mid \mathfrak{F}^k \Big\} \\ \geqslant \mathbf{P}\Big\{ X(g(k), m+z-k) > hg(m) \Big\}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Покажем, что правые части этих неравенств сходятся к 1 при $x \rightarrow \infty$ и, стало быть, вторые множители в (2.11) тоже сходятся к 1. Если это

так, то из (2.11) получаем

$$\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \mathbf{P}\{\eta = k, B^k\} \leq \mathbf{P}\{X(n_{j+1}) > hg(n_j), B^n\} (1 + o(1)).$$

Аналогичная оценка справедлива для последней суммы в (2.10). Поэтому в силу (2.10)

$$\mathbf{P}\{\eta \leq n; B^n\} \leq \sum_{j=0}^l \mathbf{P}\{X(n_{j+1}) > hg(n_j), B^n\}$$

при замене n_{l+1} на n , что доказывает (2.9).

Осталось убедиться в справедливости (2.12), (2.13). Очевидно, что в силу условия (V_1)

$$\mathbf{P}\{\bar{B}_j \mid \mathfrak{F}^{j-1}\} = \mathbf{P}\{\bar{B}_j \mid \mathfrak{F}_{j-1}\} \leq cV(y_j).$$

Для $B^j = \bigcap_{k=1}^j B_k$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B^j) &= \mathbf{P}(B^{j-1}B_j) \\ &= \mathbf{E}\left\{\left[(1 - V_{X(j-1)}(y_j)) I\{X(j-1) \geq 0\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - V_{X(j-1)}(y_j - X(j-1))) I\{X(j-1) < 0\}\right]; B^{j-1}\right\} \\ &\geq (1 - cV(y_j)) \mathbf{P}(B^{j-1}) \geq \prod_{k=1}^j (1 - cV(y_k)) = \exp\left\{\sum_{k=1}^j \ln(1 - cV(y_k))\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $\sum_{j=1}^n V(y_j) \rightarrow 0$ выполняется $\mathbf{P}(\bar{B}^n) \leq c \sum_{j=1}^n V(y_j)$, $\mathbf{P}(B^n) \rightarrow 1$, и сходимости к 1 в (2.12) доказана.

Докажем теперь сходимости к 1 вероятностей (2.13). Для этого нам понадобятся оценки значений $X(u, k)$ сверху и снизу. Наряду с цепью $X(u, k)$ построим на одном с ней вероятностном пространстве миноризирующую и мажорирующую цепи X_* и X^* . Пусть $\{w_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность независимых случайных величин, распределенных равномерно на $[0, 1]$. Тогда для цепи $X(u, k)$ можно положить

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= \xi(u) = V_u^{(-1)}(w_1), & X(u, 1) &= u + \xi^{(1)}; \\ \xi^{(2)} &= \xi(X(u, 1)) = V_{X(u, 1)}^{(-1)}(w_2), & X(u, 2) &= X(u, 1) + \xi^{(2)}; \end{aligned}$$

и т.д., где $V_u^{(-1)}(\cdot)$ есть функция, обратная к $V_u(\cdot)$. Положим теперь $X^*(u, 0) = u \geq N$,

$$\begin{aligned} \xi^{(1)*} &= V^{*(-1)}(w_1), & X^*(u, 1) &= u + \xi^{(1)*}; \\ \xi^{(2)*} &= V^{*(-1)}(w_2), & X^*(u, 2) &= X^*(u, 1) + \xi^{(2)*}; \end{aligned}$$

и т.д., где функция V^* определена в (1.7), $V^{*(-1)}$ есть функция, обратная к V^* . Аналогично определим приращения $\xi_*^{(i)}$ цепи $X_*(u, k)$ с помощью функции V_* (см. (1.7)). Ясно, что при $u \geq N$ (см. (1.8))

$$\xi_* \leq_d \xi(u) \leq_d \xi^*$$

и траектория $\{X^*(u, k), k = 0, \dots, n\}$ в области $X(u, k) \geq N$, $k = 0, 1, \dots, n$, мажорирует траекторию $\{X(u, k), k = 0, \dots, n\}$. Аналогично, траектория $\{X_*(u, k), k = 0, \dots, n\}$ в области $X_*(u, k) \geq N$, $k = 0, 1, \dots, n$, минорирует траекторию $\{X(u, k), k = 0, 1, \dots, n\}$.

Обратимся к оценке (2.13). Обозначим при $m = n_j$, $z = z_{j+1}$, $g(m+i) \geq N$

$$D_{z-i} = \{X_*(g(m+i), s) \geq N \text{ при } s = 1, \dots, z-i\} \quad (2.14)$$

и положим $S_*(i) = \sum_{s=1}^i \xi_{*s}$, $S_*^0(i) = S_*(i) - a_*i$, где ξ_{*s} — независимые копии ξ_* . Тогда, полагая в (2.13) $k = m+i$, $i = 1, \dots, z$, получим $m+z-k = z-i$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X(g(k), m+z-k) > hg(m)\} &\geq \mathbf{P}\{X(g(m+i), z-i) > hg(m); D_{z-i}\} \\ &\geq \mathbf{P}\{g(m+i) + S_*(z-i) > hg(m); D_{z-i}\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь в силу (G_2) и леммы 1

$$\begin{aligned} g(m+i) + S_*(z-i) &\geq g(m) + a_*i + S_*^0(z-i) + a_*(z-i) \\ &\geq g(m)(1 + a_*b) + S_*^0(z-i). \end{aligned}$$

Поэтому при $b < h/|a_*|$, $h < \frac{1}{2}$ выполняется $1 + a_*b - h > \frac{1}{3}$ и правая часть в (2.15) превосходит

$$\mathbf{P}\{S_*^0(z-i) > -g(m)(1-2h); D_{z-i}\}, \quad (2.16)$$

где $g(m) > b_1x \rightarrow \infty$, $z \leq bg(m)$. Поэтому в силу закона больших чисел

$$\mathbf{P}\{S_*^0(z-i) > -g(m)(1-2h)\} \rightarrow 1$$

равномерно по $i \leq z$. Заметим, далее, что событие D_{z-i} при $g(m+i) \geq N$ можно записать при выбранном $b < h/|a_*|$ в виде

$$\begin{aligned} D_{z-i} &= \{g(m+i) + S_*(s) \geq N \text{ при } s = 1, \dots, z-i\} \\ &\supset \{g(m) + S_*^0(s) \geq N - a_*(s+i), s = 1, \dots, z-i\} \\ &\supset \{S_*^0(s) \geq N - g(m)(1-h), s = 1, \dots, z-i\}. \end{aligned}$$

По усиленному закону больших чисел $\mathbf{P}(D_{z-i}) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $i \leq z$. Из сказанного следует, что вероятности (2.15), (2.16) сходятся к 1 равномерно по $i \leq z$.

Это заканчивает доказательство леммы 2.2.

Нам надо теперь оценить сверху слагаемые в правой части (2.9) (см. лемму 2.2), т.е. оценить вероятности

$$\mathbf{P}\{X(u, n_{j+1}) > hg(n_j); B^{n_j}\} = \mathbf{P}\{X(u, m+z) > hg(m), B^{m+z}\}.$$

Обозначим $y = \max_{i \leq m+z} y_i = \delta \max_{i \leq m+z} g(i)$ и положим для краткости $hg(m) = H$.

Лемма 2.3. При выполнении условий (V), (G_1) , $u \leq y + N$ и достаточно малом δ

$$\mathbf{P}\{X(u, m+z) > H, B^{m+z}\} \leq c[\min(g(m), m)V(g(m))]^2.$$

Доказательство. Построим для цепи $X(u, k)$ мажоранту $Y(k)$ следующего специального вида:

$$Y(0) = y + M, \quad Y(k+1) = \max(y + N, Y(k) + \xi_{k+1}^*), \quad (2.17)$$

где ξ_k^* — независимые копии величин ξ^* , определенных после (1.7). Более точно, при всех $u \leq y + N$, $k \leq m+z$ будет выполняться

$$\mathbf{P}\{X(u, k) > H, B^{m+z}\} \leq \mathbf{P}\{Y(k) > H, \hat{B}^{m+z}\}, \quad (2.18)$$

где $\hat{B}^{m+z} = \bigcap_{k=1}^{m+z} \{\xi_k^* \leq cy\}$, c будет выбрано позже. Приращения $\xi^{(j+1)} = \xi(u_j)$ цепи X на $(j+1)$ -м шаге при $X(j) = u_j \geq N$ и «приращения» ξ_{j+1}^* зададим на одном вероятностном пространстве с помощью соотношений

$$\xi^{(j+1)} = V_{u_j}^{(-1)}(w_{j+1}) \leq \xi_{j+1}^* = V^{*(-1)}(w_{j+1}), \quad (2.19)$$

где w_j , $j = 1, 2, \dots$, независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$, V^* определено в (1.7). Заметим, что в силу условия (V_3) (см. (1.11)) при $u \geq N$ и всех достаточно больших N и t выполняется $V_u(t) \geq c_1 V^*(t)$. Поэтому из соотношений $\xi^{(j+1)} \leq y_{j+1}$, $u_j \geq N$ будет следовать $w_{j+1} \geq V_{u_j}(y_{j+1}) \geq c_1 V^*(y_{j+1})$, $\xi_{j+1}^* \leq cy_{j+1} \leq cy$ при некотором $c < \infty$. Если $u_j < N$, то приращения $\xi^{(j+1)}$ и ξ_{j+1}^* будем определять как функции от w_{j+1} любым способом, но так, чтобы неравенство $u_j + \xi^{(j+1)} < y_j$ влекло за собой $\xi_{j+1}^* \leq cy$. В этом случае $B^{z+m} \subset \hat{B}^{m+z}$.

Убедимся теперь в справедливости (2.18). Для этого покажем, что на множестве B^{m+z} при $u \leq y + N$ выполняется

$$X(u, k) \leq Y(k), \quad k \leq m+z.$$

Действительно, $X(u, 0) = u \leq y + N = Y(0)$. Если выполнено $X(u, j) \leq Y(j)$, $X(u, j) = u_j \geq N$, $j < m+z$, то в силу (2.19) будет выполняться $X(u, j+1) \leq Y(j+1)$. Если же $X(u, j) = u_j < N$, то на множестве B^{m+z}

$$X(u, j+1) \leq N + y_{j+1} \leq N + y = Y(j+1).$$

Сказанное доказывает (2.18).

Положим теперь

$$Y^0(k) = Y(k) - y - N.$$

Тогда $Y^0(0) = 0$, $Y^0(k+1) = \max(0, Y^0(k) + \xi_{k+1}^*)$, так что

$$Y^0(k) = \bar{S}^*(k) = \max_{j \leq k} S^*(j), \quad S^*(j) = \sum_{i=1}^j \xi_i^*.$$

Поэтому из (2.18) вытекает

$$\mathbf{P}\{X(u, m+z) > H; B^{m+z}\} \leq \mathbf{P}\{\bar{S}^*(m+z) > H - y - N, \hat{B}^{m+z}\}. \quad (2.20)$$

Здесь в силу леммы 2.1

$$H - y - N = hg(m) - \delta \bar{g}(m+z) - N > \frac{h}{2} g(m),$$

$$r \equiv \frac{cy}{H - y - N} < \frac{2c\delta \bar{g}(m+z)}{hg(m)} \leq \frac{1}{2}$$

при достаточно малом δ . Кроме того, в силу условий (V_1) , (V_3) выполняется $V^*(t) \leq c_N V(t)$, $a^* = \mathbf{E}\xi^* < 0$. Остается воспользоваться теоремами 3.2, 4.2 в [12], в силу которых правая часть в (2.20) не превосходит

$$c[\min(H - y - N, m+z)V(H - y - N)]^2 \leq c_1[\min(g(m), m+z)V(g(m))]^2.$$

Лемма 2.3 доказана.

Из лемм 2.2, 2.3 вытекает следующее следствие.

Следствие 2.3. При $l \geq 1$ и достаточно малом δ

$$\mathbf{P}(AB) \leq c \left\{ \sum_{j=0}^{l-1} \left[\min(n_{j+1}, g(n_j)) V(g(n_j)) \right]^2 + \left[\min(n, g(n_l)) V(g(n_l)) \right]^2 \right\}.$$

Если $n_1 > n$ ($l = 0$), то $\mathbf{P}(AB) \leq c[\min(n, x)V(x)]^2$.

Лемма 2.4. $\mathbf{P}(AB) = o(\sum_{k=1}^n V(g(k)))$.

Доказательство. Если $g(n_j) \leq n_j$, $j \geq 1$, то $z_{j+1} = bg(n_j)$, $n_{j+1} = (1+b)g(n_j)$. Отсюда и из условия (G_1) следует, что все значения $V(g(k))$, $k = n_j + 1, \dots, n_{j+1}$, сравнимы, и

$$\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} V(g(k)) \geq cV(g(n_j)) z_{j+1} = cbg(n_j) V(g(n_j)).$$

Если $g(n_j) > n_j$, то $z_{j+1} = bn_j$, $n_{j+1} = (1+b)n_j$ и вновь все значения $V(g(k))$, $k = n_j + 1, \dots, n_{j+1}$, сравнимы,

$$\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} V(g(k)) \geq cV(g(n_j)) z_{j+1} \geq \frac{cb}{1+b} n_{j+1} V(g(n_j)).$$

Сказанное означает, что

$$\min(n_{j+1}, g(n_j)) V(g(n_j)) \leq c_1 \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} V(g(k)).$$

Аналогичным образом оцениваются $\sum_{k=1}^{n_1} V(g(k))$ и $\sum_{n_{l-1}}^n V(g(k))$.

Остается заметить, что $g(n_j) \rightarrow \infty$,

$$\varepsilon_j \equiv \min(n_{j+1}, g(n_j)) V(g(n_j)) \rightarrow 0, \quad \bar{\varepsilon} = \max_{1 \leq j \leq l} \varepsilon_j \rightarrow 0,$$

$$\sum_{j=0}^l \varepsilon_j^2 \leq \bar{\varepsilon} \sum_{j=0}^l \varepsilon_j = o\left(\sum_{k=1}^n V(g(k))\right).$$

Лемма доказана.

Следствие 2.4. $\mathbf{P}(A) \leq c \sum_{k=1}^n V(g(k))$.

Это утверждение вытекает из леммы 2.4 и неравенства $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(\bar{B}) + \mathbf{P}(AB)$, где в силу неравенств

$$\mathbf{P}(\bar{B}_k) \leq c_1 V(y_k) \leq c V(g(k)) \quad (2.21)$$

выполняется

$$\mathbf{P}(\bar{B}) \leq \sum \mathbf{P}(\bar{B}_k) \leq c \sum_{k=1}^n V(g(k)).$$

Вернемся к доказательству теоремы 2.1 и лежащему в его основе соотношению (2.7). Второе слагаемое в правой части (2.7) мы оценили. Рассмотрим первое слагаемое

$$\mathbf{P}(A\bar{B}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A\bar{B}_k) - r_n, \quad (2.22)$$

где в силу (2.21) $0 \leq r_n \leq 2 \sum_{i < j} \mathbf{P}(\bar{B}_i \bar{B}_j) \leq c(\sum_{k=1}^n V(g(k)))^2$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A\bar{B}_k) &= \int_{-\infty}^{g(k)/2} \mathbf{P}\left\{A, \eta\left(\frac{g(\cdot)}{2}\right) \geq k, X(k-1) \in dv, \bar{B}_k\right\} \\ &\quad + \mathbf{P}\left\{A, \eta\left(\frac{g(\cdot)}{2}\right) < k, \bar{B}_k\right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Второе слагаемое не превосходит $c(\sum_{i=1}^k V(g(i))) V(g(k))$ в силу следствия 2.4, а их сумма по k не превосходит $c(\sum_{k=1}^n V(g(k)))^2$. Первое слагаемое в (2.23) имеет вид

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{g(k)/2} \mathbf{P}\left\{\eta\left(\frac{g(\cdot)}{2}\right) \geq k, X(k-1) \in dv\right\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq j \leq n-k} (X(v + \xi(v), j) - g(k+j)) > 0, \bar{B}_k\right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь первый множитель, который мы обозначим $P_k(dv)$, сходится при $k \rightarrow \infty$ (как мера) к $\pi(dv)$. Второй множитель представим при $v \in (0, g(k)/2)$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$ в виде суммы

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{v + \xi(v) > g(k)\} + \left(\int_{g(k)(1-\varepsilon)}^{g(k)} + \int_{v+\delta g(k)}^{g(k)(1-\varepsilon)} \right) \mathbf{P}\{v + \xi(v) \in dv\} \\ & \quad \times \mathbf{P}\left\{ \max_{1 \leq j \leq n-k} X(u, j) - g(k+j) > 0 \right\} \\ & \equiv V_v(g(k) - v) + r^{(1)} + r^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} r^{(1)} & \leq V_v(g(k)(1-\varepsilon) - v) - V_v(g(k) - v) \\ & \sim q(v) (V(g(k)(1-\varepsilon) - v) - V(g(k) - v)) = o(V(g(k))) \end{aligned} \quad (2.26)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$;

$$r^{(2)} \leq c \int_{\delta g(k)}^{g(k)(1-\varepsilon)-v} V_v(dw) \mathbf{P}\left\{ \max_{1 \leq j \leq n-k} (X(v+w, j) - g(k+j)) > 0 \right\}. \quad (2.27)$$

Обозначим

$$\nu = \min \{j \geq 0: X(v+w, j) \leq N\}.$$

Тогда второй множитель под интегралом в (2.27) не превосходит при $v+w \in (v+\delta g(k), g(k)(1-\varepsilon))$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{ \max_{1 \leq j \leq \nu-1} (X(v+w, j) - g(k+j)) > 0 \right\} \\ & \quad + \mathbf{P}\left\{ \max_{1 \leq j \leq n-k-\nu} \left(\tilde{X}(X(v+w, \nu), j) - g(k+\nu+j) \right) > 0; \right. \\ & \quad \left. X(v+w, \nu) \geq -M \right\} + \mathbf{P}\{X(v+w, \nu) < -M\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где цепь $\tilde{X}$ устроена так же, как X , и не зависит от нее. В силу (G_2) $g(k+j) \geq g(k) - gj$, $g < -a^*$, и при $j < \nu$

$$X(v+w, j) < v+w + S^*(j), \quad S^*(j) = \sum_{i=1}^j \xi_i^*, \quad \mathbf{E}\xi^* = a^* < 0.$$

Поэтому первое слагаемое в (2.28) не превосходит равномерно по $v+w \leq g(k)(1-\varepsilon)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{ \max_{1 \leq j \leq \nu-1} (v+w + S^*(j) - g(k) + gj) > 0 \right\} \\ & \leq \mathbf{P}\left\{ \max_{1 \leq j \leq \nu-1} (S^*(j) + gj) > \varepsilon g(k) \right\} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

при $\varepsilon = g(k)^{-1/2}$, так как $\mathbf{E}(\xi^* + g) < 0$, $g(k) \rightarrow \infty$.

Второе слагаемое в (2.28) сходится к 0 в силу следствия 2.4 и того, что начальное значение $X(u + w, \nu)$ цепи $\tilde{X}$ лежит в ограниченном интервале $[-M, N]$.

Последнее слагаемое в (2.28) (являющееся весьма грубой оценкой соответствующей вероятности) есть вероятность того, что первый перескок вниз уровня N превзойдет по абсолютной величине $N + M$. Так как при $u > N, t > 0$

$$\mathbf{P}\{\xi(u) < -t\} \leq \mathbf{P}\{\xi_* < -t\},$$

то в силу теоремы 2.1 в [13] эта вероятность не превосходит $c\mathbf{E}(|\xi_*|; \xi_* < -M - N)$ и выбором M может быть сделана сколь угодно малой.

Резюмируя сказанное относительно $r^{(2)}$ (см. (2.27)–(2.29)), мы получим $r^{(2)} = o(1) V(\delta g(k)) = o(V(g(k)))$. Учитывая оценки (2.26), (2.25), мы получим, что часть $\int_0^{g(k)/2}$ интеграла (2.24) равна

$$\int_0^{g(k)/2} P_k(dv) V_v(g(k)) (1 + o(1)). \quad (2.30)$$

Пусть сначала $P_k(0)$ сходится при $k \rightarrow \infty$ к $\pi(0)$ по вариации. Так как $c \geq V_v(g(k))/V(g(k)) \rightarrow q(v)$ при $g(k) \rightarrow \infty$, то отношение интеграла (2.30) к $V(g(k))$, очевидно, будет сходиться к

$$\int_0^\infty \pi(dv) q(v). \quad (2.31)$$

Если же имеет место лишь слабая сходимость $P_k(0)$ к мере $\pi(\cdot)$, то сходимость к (2.31) сохранится, если потребовать дополнительно, чтобы функция $q(v)$ была непрерывна на множестве скачков распределения π .

Часть $\int_{-\infty}^0$ интеграла (2.24) рассматривается совершенно аналогично. Возвращаясь к (2.22), (2.23), мы получим

$$\mathbf{P}(A \bar{B}_k) = (1 + o(1)) qV(g(k)).$$

Вместе с леммой 2.4 это доказывает теорему 2.1 в случае $n \rightarrow \infty$. Если $x \rightarrow \infty$, а n фиксировано, то распределение

$$\mathbf{P}\left\{\eta\left(\frac{g(\cdot)}{2}\right) \geq k, X(k-1) \in dv\right\}$$

при каждом k сходится по вариации к $\mathbf{P}\{X(k-1) \in dv\}$, и мы аналогичным образом получаем (2.5).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.5. Повторяя доказательство теоремы 2.1 и обращая внимание на характер использованных оценок, легко заметить, что

все они являются равномерными в том смысле, что обеспечивают равномерную сходимость в (2.4) в следующем понимании: существует функция $\psi(\gamma, n) \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, такая, что

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} (X(u, k) - g(k)) > 0\right\} = (1 + \varepsilon(g(\cdot), x, n)) q \sum_{k=1}^n V(g(k)), \quad (2.32)$$

где $|\varepsilon(g(\cdot), x, n)| \leq \psi(\gamma, n)$ при $\gamma = \sum_{k=1}^n V(g(k))$.

§ 3. Изучение граничных задач с помощью циклов.

Равномерные предельные теоремы, действующие на всей оси

3.1. Рассматриваемые цепи. В этом параграфе мы будем изучать харрисовы эргодические цепи Маркова, т.е. цепи, удовлетворяющие следующим условиям эргодичности (см., например, [14], [15]). Через $\mathcal{B}$ мы будем обозначать σ -алгебру борелевских множеств на прямой $\mathbf{R}$. Пусть существуют множество $U \in \mathcal{B}$, вероятностная мера φ на $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ и числа $0 < p < 1$, $n_0 \geq 0$ такие, что

(I) $\mathbf{P}\{\tau^{(u)} < \infty\} = 1 \quad \forall u \in \mathbf{R}$, $\sup_{u \in U} \mathbf{E}\tau^{(u)} < \infty$, где $\tau^{(u)} = \min\{k \geq 1: X(u, k) \in U\}$;

(II) $P(u, n_0, B) \equiv \mathbf{P}\{X(u, n_0) \in B\} > p\varphi(B)$ для всех $u \in U$, $B \in \mathcal{B}$.

Условие (I) есть условие неприводимости цепи и положительной возвратности U (равномерной по $u \in U$); условие (II) есть условие «перемешивания». Условия (I), (II) можно называть также условиями положительной возвратности по Харрису. Известно (см., например, [14], там же см. более полную библиографию), что при выполнении (I), (II) цепь обладает *положительным атомом*, возможно, искусственным (в расширенном фазовом пространстве). Простоты ради мы будем считать, что этот атом является «обычным», и отождествлять его с точкой $\{0\}$. В этом случае можно положить $U = \{0\}$. Условие (II) тогда выполнено автоматически, а условие (I) принимает вид $\mathbf{E}\tau^{(0)} < \infty$. Кроме того, мы будем предполагать, что цепь не периодична, т.е. н.о.д. значений n_i , для которых $\mathbf{P}\{\tau^{(0)} = n_i\} > 0$, равен 1. При выполнении описанных условий цепь $X(u, n)$ будет эргодической в смысле сходимости по вариации и, наоборот, эргодичность по вариации влечет за собой свойства (I), (II) (см. теорему 2, § 2, гл. I в [14]).

3.2. Теоремы о распределении $\bar{X}(u, n)$ в терминах циклов. Равномерная предельная теорема. Положим для краткости $\tau = \tau^{(0)}$, $h = \bar{X}(0, \tau)$ — соответственно «длина» и «высота» цикла, и обозначим

$$W(t) = \mathbf{P}\{h > t\}.$$

В этом параграфе нам понадобится более простая версия условий (V), именно, мы будем предполагать, что выполнено следующее условие.

(V*) Либо $X(\cdot) \geq -M$ при некотором $M \geq 0$ и

$$\sup_u \mathbf{P}\{\xi(u) > t\} \leq cV(t), \quad (3.1)$$

где V имеет вид (1.4); либо

$$\sup_u \mathbf{P}\{|\xi(u)| > t\} \leq cV(t) \quad (3.2)$$

(в том случае, если фазовое пространство цепи совпадает с $(-\infty, \infty)$).

Очевидно, что первое альтернативное условие (V*) вытекает из (V₁).

Теорема 3.1. Пусть цепь возвратна по Харрису, асимптотически однородна (удовлетворяет (АН)), $\mathbf{E}\xi < 0$ и выполнено (V*). Пусть, далее, $|u| < c$, $nV(x) < c$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} \leq 1 - (1 - W(x))^{n/\mathbf{E}\tau} + o(nV(x)), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} &\geq 1 - (1 - W(x))^{n/\mathbf{E}\tau} + o(nW(x)) \\ &\quad + l(x, n) nV(n), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $l(x, n) \rightarrow \infty$ можно выбрать растущей сколь угодно медленно.

Утверждение аналогичного вида получено в [11] (теорема 3.1).

З а м е ч а н и е 3.1. Как показывает доказательство теоремы, при $u = 0$, $nW(x) < c$ справедлива оценка сверху

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(0, n) > x\} \leq 1 - (1 - W(x))^{n/\mathbf{E}\tau} + o(nW(x))$$

без каких-либо условий на $\xi(u)$ (т.е. без условий (АН) и (V)).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3.1. Предположим сначала, что выполнено первое альтернативное условие в (V*), и положим, не ограничивая общности, $M = 0$. Кроме того, в соответствии со сказанным выше будем считать для простоты, что положительный атом отождествлен с точкой $\{0\}$.

1. **О ц е н к а с н и з у.** Обозначим

$$h^{(u)} = \bar{X}(u, \tau(u)), \quad W^{(u)}(t) = \mathbf{P}\{h^{(u)} > t\},$$

τ_k и h_k — соответственно длину и высоту k -го цикла $h_k = \bar{X}(0, \tau_k)$,

$$\bar{h}_k^{(u)} = \max_{i \leq k} (h_i, h^{(u)}).$$

Положим, далее,

$$T_k^{(u)} = \tau^{(u)} + \tau_1 + \dots + \tau_{k-1}, \quad \eta^{(u)}(n) = \min\{k: T_k^{(u)} > n\}.$$

Ясно, что во введенных обозначениях

$$h_d^{(0)} = h_1, \quad W^{(0)}(t) = W(t), \quad T_k^{(0)} \equiv T_k = \tau_1 + \dots + \tau_k,$$

$\eta^{(0)}(n) \equiv \eta(n)$ есть время первого прохождения уровня n блужданием T_k ; величина $\bar{h}_{\eta(n)} = \bar{h}_{\eta^{(0)}(n)}^{(0)}$ есть максимальная высота цикла за это время.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда

$$1) \quad \mathbf{P}\{\tau^{(u)} > k\} < cV(k), \quad (3.5)$$

$$W^{(u)}(t) \equiv \mathbf{P}\{h^{(u)} > t\} < cV(t), \quad (3.6)$$

в частности, $W(t) < cV(t)$;

$$2) \quad \mathbf{P}\{\bar{h}_{\eta(n)} > x\} \leq 1 - (1 - W(x))^n = O(\min(1, nW(x))). \quad (3.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (3.5) следует из доказательства теоремы 1 § 25 в [14]; неравенство (3.6) — из неравенств

$$\bar{X}(u, \tau^{(u)}) \leq u + \xi_1^* + \dots + \xi_{\tau^{(u)}}^*,$$

где $\xi_i^* \geq 0$, $\mathbf{P}\{\xi_i^* > t\} = \sup_u \mathbf{P}\{\xi(u) > t\}$ при $t > 0$, и результатов [16] или [14] (см. теорему 2 § 42 в [14]), относящихся к суммам случайного числа случайных величин.

Второе утверждение леммы очевидно, так как $\tau_k \geq 1$ и, стало быть, $\eta(n) \leq n$, $\bar{h}(\eta(n)) \leq \bar{h}(n) = \max_{k \leq n} h_k$,

$$\mathbf{P}\{\bar{h}(\eta(n)) > x\} \leq 1 - (1 - W(x))^n.$$

Лемма доказана.

Положим для краткости $\eta^{(u)}(n) = \eta$, $s = n(1 - \varepsilon)/\mathbf{E}\tau$ при некотором $\varepsilon > 0$ и вернемся к доказательству теоремы и оценке снизу для

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} &\geq \mathbf{P}\{\bar{h}_{\eta-1}^{(u)} > x, \eta - 1 \geq s\} \\ &\geq \mathbf{P}\{\bar{h}_s^{(u)} > x\} - \mathbf{P}\{\bar{h}_s^{(u)} > x; \eta \leq s\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь в силу леммы 3.1 и результатов работ [17], [13]

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta \leq s\} &= \mathbf{P}\{T_s^{(u)} \geq n\} = \mathbf{P}\{\tau^{(u)} + T_{s-1} - s\mathbf{E}\tau \geq n - s\mathbf{E}\tau\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\tau^{(u)} + T_{s-1} - s\mathbf{E}\tau \geq \frac{\varepsilon n}{\mathbf{E}\tau}\right\} \leq c(\varepsilon) nV(n), \end{aligned}$$

где $c(\varepsilon)$ — постоянная, зависящая от ε .

Рассмотрим теперь главную часть в (3.8), равную

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\bar{h}_s^{(u)} > x\} &= 1 - (1 - W^{(u)}(x))(1 - W(x))^s \\ &\geq 1 - (1 - W(x))^s = 1 - (1 - W(x))^{n/\mathbf{E}\tau} + r_n,\end{aligned}$$

где $r_n < \varepsilon c_1 nW(x)$, если $nW(x) < c$. Так как ε произвольно, то мы в итоге получаем

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} \geq 1 - (1 - W(x))^{n/\mathbf{E}\tau} + l(x, n) nV(n) + o(nW(x)), \quad (3.9)$$

где $l(x, n)$ можно выбрать растущей сколь угодно медленно.

Это доказывает (3.4).

2. Оценка сверху. Положим здесь $s = n(1 + \varepsilon)/\mathbf{E}\tau$. Пусть, как и прежде, $\eta = \eta^{(u)}(n)$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} &\leq \mathbf{P}\{\bar{h}_\eta^{(u)} > x, \eta < s\} + \mathbf{P}\{\bar{h}_\eta^{(u)} > x, \eta \geq s\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\bar{h}_s^{(u)} > x\} + \mathbf{P}\{\bar{h}_\eta^{(u)} > x, \eta \geq s\} - \mathbf{P}\{\bar{h}_s^{(u)} > x, \eta \geq s\}.\end{aligned} \quad (3.10)$$

Последняя разность здесь равна

$$\Delta = \mathbf{P}\{\bar{h}_\eta^{(u)} > x, \bar{h}_s^{(u)} \leq x, \eta \geq s\} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\{T_s^{(u)} = k\} \mathbf{P}\{\bar{h}_{\eta^{(0)}(n-k)} > x\},$$

где $\eta^{(0)}(n-k)$ соответствует начальному значению $u = 0$. В силу (3.7)

$$\mathbf{P}\{\bar{h}_{\eta^{(0)}(n-k)} > x\} = O(\min(1, (n-k)W(x))),$$

$$\Delta \leq cnW(x) \mathbf{P}\{T_s^{(u)} < n\} = o(nW(x)) = o(nV(x)).$$

Главная часть в (3.10) (ср. с (3.8)) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\bar{h}_s^{(u)} > x\} &= 1 - (1 - W^{(u)}(x))(1 - W(x))^s \\ &\leq 1 - (1 - W(x))^{n/\mathbf{E}\tau} + W^{(u)}(x) + r_n,\end{aligned}$$

где $r_n < \varepsilon c_1 nW(x)$ при $nW(x) < c$. Так как ε произвольно, то в итоге в силу леммы 3.1 мы получаем

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} \leq 1 - (1 - W(x))^{n/\mathbf{E}\tau} + o(nV(x)).$$

Это доказывает (3.3). Утверждение теоремы в случае $X(\cdot) \geq -M$ доказано.

Если фазовое пространство цепи совпадает с $(-\infty, \infty)$, то все рассмотрения полностью сохраняются за исключением доказательства первого утверждения леммы 3.1. В новых условиях ссылку в доказательстве леммы 3.1 на теорему 1 § 25 в [14] надо заменить ссылкой на теорему 1

§ 26 той же монографии, где получены требуемые результаты при выполнении второго альтернативного условия (3.2) в (V^*) . Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда если $x \rightarrow \infty$, $x \ll n$, но $nV(x) < c$, то

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} = 1 - (1 - W(x))^{n/\mathbf{E}\tau} + o(nV(x)) \quad (3.11)$$

и, стало быть, при $nV(x) \rightarrow 0$ справедливо

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} = \frac{nW(x)}{\mathbf{E}\tau} + o(nV(x)). \quad (3.12)$$

Доказательство. При $x \ll n$, $nV(x) < c$ из (3.3), (3.4) следует

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} = 1 - (1 - W(x))^{n/\mathbf{E}\tau} + o(nW(x)) + l(x, n)nV(n), \quad (3.13)$$

где при заданных $x \ll n$ можно выбрать $l(x, n) \rightarrow \infty$ столь медленно, что остаточный член в (3.13) будет $o(nV(x))$. Теорема доказана.

К сожалению, теорема 3.1 из-за грубости оценки (3.8) не позволяет получить соотношение (3.12) при $x \geq cn$. В этом случае из теоремы 3.1 вытекает лишь, что левая часть в (3.12) есть $O(nV(x))$; это вытекает и из леммы 3.1.

Теорема 3.3. Пусть цепь является возвратной по Харрису, асимптотически однородной и удовлетворяющей условиям (V) , (V^*) . Тогда

$$W(x) \sim q\mathbf{E}\tau V(x).$$

Доказательство очевидным образом вытекает из сравнения утверждений теоремы 3.2 и следствия 2.2 при $x \ll n$, $nV(x) \rightarrow 0$.

Из следствия 2.2 и теоремы 3.3 вытекает, что соотношение (3.12) справедливо при всех $n \rightarrow \infty$ таких, что $nV(x) \rightarrow 0$.

Пусть $V^{(-1)}$ — функция, обратная к V , $N(n) = V^{(-1)}(1/n)$. Ясно, что $N(n)$ имеет вид $N(n) = n^{1/\beta}L_1(n)$, где L_1 является вместе с L медленно меняющейся функцией.

Теорема 3.4. Пусть выполнены условия теоремы 3.3. Тогда при $|u| < c$, $n \rightarrow \infty$ и любом фиксированном t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\bar{X}(u, n)}{N(n)} < t\right\} = e^{-qt^{-\beta}}. \quad (3.14)$$

Доказательство вытекает из теорем 3.3 и 3.2, из которых в силу $nV(x) < c$ при $x = tN(n)$, $t < t_0 < \infty$, следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{\bar{X}(u, n)}{N(n)} < t\right\} &= (1 - W(tN(n)))^{n/\mathbf{E}\tau} + o(1) \\ &= \left(1 - \frac{t^{-\beta} q \mathbf{E}\tau (1 + o(1))}{n}\right)^{n/\mathbf{E}\tau} + o(1) = e^{-qt^{-\beta}} + o(1). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теоремы 2.1, 3.1–3.4 дают интересный пример того, как с помощью теорем о больших отклонениях можно найти предельное распределение изучаемого функционала в области нормальных отклонений.

З а м е ч а н и е 3.2. Соотношение (3.14) можно записать в виде

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} \sim 1 - e^{-qnV(x)} \quad (3.15)$$

при $x = tN(n)$. Как показывают следствие 2.1 и соотношение $1 - e^{-v} \sim v$ при $v \rightarrow 0$, асимптотическая эквивалентность (3.15) справедлива при всех x (или $t = x/N(n)$).

З а м е ч а н и е 3.3. Как и в теореме 2.1 (см. замечание 2.4), сходимость в теореме 3.4 является равномерной на любом конечном интервале значений t , а значит, и при $t \leq M_n$, где $M_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ достаточно медленно.

Вместе с замечаниями 2.4, 3.2 и 3.3 это позволяет получить следующую равномерную предельную теорему для $\bar{X}(u, n)$, действующую на всей оси.

Теорема 3.5. При выполнении условий теоремы 3.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} \left| \frac{\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\}}{1 - e^{-qnV(x)}} - 1 \right| = 0.$$

Такого вида утверждения, с явным видом аппроксимирующего распределения, — весьма редкий случай в предельных теоремах теории вероятностей.

3.3. Предельная теорема о пересечении произвольной границы. Рассмотрим теперь границу $g(\cdot)$ вида

$$g(k) = xf\left(\frac{k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

где f — непрерывная функция на $[0, 1]$, $f(0) = 1$, $\min_{[0,1]} f(t) > 0$.

Теорема 3.6. Пусть выполнены условия теорем 3.1, 3.3. Тогда при $x = tN(n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} \left(X(u, k) - xf\left(\frac{k}{n}\right)\right) < 0\right\} = \exp\left\{-qt^{-\beta} \int_0^1 f^{-\beta}(v) dv\right\}. \quad (3.16)$$

Доказательство. Мы видели в предыдущих доказательствах, что отличное от нуля начальное значение цепи u , $|u| < c$, не вносит по сути никаких изменений в эти доказательства по сравнению со случаем $u = 0$. Поэтому для простоты мы будем считать в дальнейшем, что $u = 0$. Читатель может без труда перенести все, сказанное ниже, на случай произвольного фиксированного u .

Число циклов $\eta(n)$ за время n согласно усиленному закону больших чисел обладает свойством

$$\frac{\eta(n)}{n} \xrightarrow{p} \frac{1}{\mathbf{E}\tau} \quad (3.17)$$

при $n \rightarrow \infty$. Пусть K — большое целое фиксированное число. Разобьем $\eta(n)$ циклов на группы по $M = [n\Delta/\mathbf{E}\tau]$ штук в каждой, где $\Delta = 1/K$, так что с вероятностью, близкой к единице, при $n \rightarrow \infty$ объем последней группы будет $\eta(n) - M(K-1) \sim M$. Пусть $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots$ — интервалы *времени*, образованные соответственно первой, второй и т.д. группами циклов. Обозначим через D событие

$$D = \bigcap_{k=1}^K \{(t_{k-1}, t_k) \in n\Delta_k\},$$

где $t_0 = 0$, $\Delta_k = ((k-1)\Delta(1-\varepsilon(n)), k\Delta(1+\varepsilon(n)))$, $k = 1, \dots, K$. Тогда из (3.17) следует, что найдется последовательность $\varepsilon(n) \rightarrow 0$, убывающая достаточно медленно при $n \rightarrow \infty$ такая, что $\mathbf{P}(D) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим далее $\hat{f}_k = \max_{t \in \Delta_k} f(t)$, $\check{f}_k = \min_{t \in \Delta_k} f(t)$, $A = \{\max_{j \leq n} (X(0, j) - xf(\frac{j}{n})) < 0\}$. Тогда в силу независимости циклов и теоремы 3.2

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &\leq o(1) + \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{K-1} \left\{ \max_{M(k-1) \leq j \leq Mk} h_j < x\hat{f}_k \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \bar{X}(0, n - T_{M(K-1)}) < x\hat{f}_K \right\}, D\right) \\ &\leq o(1) + \prod_{k=1}^{K-1} \mathbf{P}\{\bar{h}_M < x\hat{f}_k\} \mathbf{P}\{\bar{X}(0, n - T_{M(K-1)}) < x\hat{f}_K\} \\ &= o(1) + \exp\left\{M \sum_{k=1}^{K-1} \ln(1 - W(x\hat{f}_k)) \right. \\ &\quad \left. + M \ln(1 - W(x\hat{f}_K)) + o(1)\right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Полагая $x = tN(n)$ и учитывая, что

$$W(x) \sim q\mathbf{E}\tau V(x), \quad \ln(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &\leq o(1) + \exp \left\{ - \sum_{k=1}^K \frac{nq}{K} V(t\hat{f}_k N(n))(1 + o(1)) \right\} \\ &= o(1) + \exp \left\{ - qt^{-\beta} \int_0^1 f^{-\beta}(v) dv (1 + o(1)) \right\}. \end{aligned}$$

Последнее соотношение вытекает из того, что в силу непрерывности $f(\cdot)$ сумма $K^{-1} \sum_{k=1}^K (\hat{f}_k)^{-\beta}$ может быть выбором K и n сделана сколь угодно близкой к $\int_0^1 f^{-\beta}(v) dv$. Совершенно аналогично происходит оценка снизу с использованием значений $\hat{f}_k$.

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3.6 видно (см. (3.18)), что утверждение теоремы можно записать также в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \max_{k \leq n} \left(X(u, k) - xf \left(\frac{k}{n} \right) \right) > 0 \right\} \\ \sim 1 - \exp \left\{ -qnV(x) \int_0^1 f^{-\beta}(v) dv \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Замечая опять, что все оценки сходимости, полученные выше, являются при фиксированной функции f равномерными, и сравнивая представление (3.19) со следствием 2.1, мы приходим к следующему аналогу теоремы 3.5, дающему явный вид асимптотики вероятности в левой части (3.19) в равномерной предельной теореме, действующей на всей оси.

Теорема 3.7. При выполнении условий теорем 3.1, 3.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} \left| \frac{\mathbf{P}\{\max_{k \leq n} (X(u, k) - xf(k/n)) > 0\}}{1 - \exp\{-qnV(x) \int_0^1 f^{-\beta}(v) dv\}} - 1 \right| = 0.$$

Здесь ситуация существенно отличается от граничных задач для случайных блужданий, т.е. для сумм $S(n)$ независимых случайных величин ξ_k , $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = 1$, где аналогичная вероятность $\mathbf{P}\{\max_{k \leq n} (S(k) - xf(k/n)) > 0\}$ в области нормальных отклонений (при $x = t\sqrt{n}$) описывается лишь неявно, как решение соответствующей граничной задачи (с границей f) для уравнения теплопроводности (теорема Колмогорова–Петровского). Если «хвосты» $V(t) = \mathbf{P}\{\xi_k > t\}$ регулярны и имеют вид (1.4), то в области больших отклонений аналогия с полученными выше результатами сохраняется: при $x \gg \sqrt{n \ln n}$

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{k \leq n} \left(S_k - xf \left(\frac{k}{n} \right) \right) > 0 \right\} \sim nV(x) \int_0^1 f^{-\beta}(v) dv$$

(см., например, [18]).

§ 4. Аналог закона повторного логарифма

Если в теореме 2.1 взять фиксированную последовательность $\{g_i\}$ и $n = \infty$, то асимптотика вероятности пересечения границы $g(k) = x + g_k$, согласно этой теореме, будет определяться рядом $\sum_{k=1}^{\infty} V(x + g_k)$. Поэтому естественно ожидать, что те последовательности $\{g_k\}$, для которых $\sum V(g_k) < \infty$, относятся к «верхним функциям» для цепи $\{X(k)\}$, а те $\{g_k\}$, для которых $\sum V(g_k) = \infty$, — к «нижним». В силу теоремы 3.4 естественно ожидать также, что нижняя граница верхних функций должна быть близка к $\{N(k)\}$.

В этом параграфе мы получим аналог закона повторного логарифма для $X(u, k)$, подтверждающий эту гипотезу.

Теорема 4.1. Пусть $\{X(k)\}$ — возвратная по Харрису цепь Маркова.

I. Пусть, кроме того, цепь асимптотически однородна и выполнены либо условия (V^*) , либо (V) . Тогда при $|u| < c$ и любом $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X(u, n)}{N(n)(\ln n)^{(1+\varepsilon)/\beta}} \leq 1 \quad \text{п.н.} \quad (4.1)$$

II. Пусть $q > 0$. Тогда при $|u| < c$ и любом $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X(u, n)}{N(n)(\ln n)^{(1-\varepsilon)/\beta}} \geq 1 \quad \text{п.н.} \quad (4.2)$$

Утверждения (4.1), (4.2) теоремы можно записать также в виде

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln X(u, n))^+ - \ln N(n)}{\ln \ln n} = \frac{1}{\beta} \quad \text{п.н.} \quad (4.3)$$

или

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X(u, n)^+}{N(n)} \right)^{1/\ln \ln n} = e^{1/\beta} \quad \text{п.н.,} \quad (4.4)$$

где $x^+ = \max(0, x)$.

Формулировка (4.3) в какой-то мере оправдывает термин «закон повторного логарифма», так как в ней присутствует нормирующий множитель $\ln \ln$ (в утверждениях (4.1), (4.2) для *самых* процессов $X(u, n)$ он отсутствует). Нам не известны другие результаты, относящиеся к законам повторного логарифма для эргодических цепей Маркова или других близких к ним последовательностей *зависимых* испытаний (как и к граничным задачам, изложенным в §§ 2, 3). Наличие зависимости вносит коррективы в доказательство оценки (4.2), хотя в целом все удастся свести к случаю независимых испытаний.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть сначала $u = 0$. Положим

$$T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i, \quad n_k = [d^k], \quad d > 1, \quad \text{так что } n_k = n_{k-1}d + O(1),$$

где τ_i , как и прежде, — длины циклов. Обозначим через C событие, состоящее в том, что для всех k , начиная с некоторого, выполняется

$$T_{n_k} < n_k(1 + \delta) \mathbf{E}\tau \equiv N_k^{(+)}, \quad T_{n_k} > n_k(1 - \delta) \mathbf{E}\tau \equiv N_k^{(-)}.$$

Тогда в силу усиленного закона больших чисел $\mathbf{P}(C) = 1$ для любого $\delta > 0$.

1. Оценка сверху. Утверждение (4.1) означает, что с вероятностью единица траектория $X(u, k)$ пересекает границу $g_k = N(k)(\ln k)^{(1+\varepsilon)/\beta}$ лишь конечное число раз (событие A). Пусть событие B состоит в том, что траектория $\{X(0, k)\}$ пересекает «ступенчатую» границу с уровнями

$$G_k = \min_{N_{k-1}^{(-)} \leq j \leq N_k^{(+)}} g_j = N(n_{k-1}(1 - \delta) \mathbf{E}\tau) \left[\ln \left(\ln(n_{k-1}(1 - \delta) \mathbf{E}\tau) \right) \right]^{(1+\varepsilon)/\beta}$$

на интервалах времени $[T_{n_{k-1}}, T_{n_k}]$, $k = 1, 2, \dots$, лишь конечное число раз. Тогда $BC \subset AC$, так что $\mathbf{P}(AC) \geq \mathbf{P}(BC)$. Нам достаточно доказать, что $\mathbf{P}(B) = 1$. Если обозначить через B_k событие, состоящее в том, что произойдет хотя бы одно пересечение уровня G_k на интервале $[T_{n_{k-1}}, T_{n_k}]$, то для доказательства равенства $\mathbf{P}(B) = 1$ (или, что то же, $\mathbf{P}(\bar{B}) = 0$), нам в силу критерия Бореля–Кантелли достаточно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_k) < \infty. \quad (4.5)$$

Но в силу леммы 3.1 и условий теоремы выполняется $W(t) < cV(t)$, что позволяет записать

$$\mathbf{P}(B_k) = 1 - [1 - W(G_k)]^{n_k - n_{k-1}} \leq 1 - \left[1 - c_1 V \left(N(n_k) k^{(1+\varepsilon)/\beta} \right) \right]^{n_k(d-1)/d}.$$

В силу свойств медленно меняющихся функций при любом $\gamma > 0$ и всех достаточно больших k

$$V \left(N(n_k) k^{(1+\varepsilon)/\beta} \right) \leq k^{-(1+\varepsilon)(1-\gamma)} V(N(n_k)) = n_k^{-1} k^{-(1+\varepsilon)(1-\gamma)},$$

где $(1 + \varepsilon)(1 - \gamma) > 1 + \varepsilon/2$ при $\gamma = \varepsilon/3$ и достаточно малых ε . При таких γ и k

$$\mathbf{P}(B_k) \leq 1 - \left[1 - \frac{c_1}{n_k} k^{-(1+\varepsilon/2)} \right]^{n_k(d-1)/d} \leq \frac{2c_1(d-1)}{d} k^{-(1+\varepsilon/2)},$$

и, стало быть, выполнено (4.5), $\mathbf{P}(B) = 1$, $\mathbf{P}(AC) = 1$, $\mathbf{P}(A) = 1$.

Если $u \neq 0$ фиксировано, то все рассмотрения сохраняются; надо лишь везде T_{n_k} заменить на $\tau^{(u)} + T_{n_k}$.

Первое утверждение теоремы доказано.

2. Оценка снизу происходит аналогично. Надо доказать, что $\mathbf{P}(D) = 1$, где D событие, состоящее в том, что траектория $\{X(0, k)\}$ пересекает границу $g_k = N(k)(\ln k)^{(1-\varepsilon)/\beta}$ бесконечное число раз. Пусть событие E состоит в том, что траектория $\{X(0, k)\}$ пересекает ступенчатую границу с уровнями

$$G_k^* = \max_{N_{k-1}^{(-)} \leq j \leq N_k^{(+)}} g_j = N(n_k(1 + \delta) \mathbf{E}\tau) [\ln(n_k(1 + \delta) \mathbf{E}\tau)]^{(1-\varepsilon)/\beta}$$

на интервалах времени $[T_{n_{k-1}}, T_{n_k}]$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечное число раз. Тогда очевидно $EC \subset DC$, $\mathbf{P}(DC) \geq \mathbf{P}(EC)$, и нам достаточно убедиться, что $\mathbf{P}(E) = 1$.

Обозначим E_k событие, состоящее в том, что траектория $X(0, k)$ хоть раз пересечет уровень G_k^* на интервале $[T_{n_{k-1}}, T_{n_k}]$. Для доказательства равенства $\mathbf{P}(E) = 1$ в силу критерия Бореля–Кантелли и независимости групп циклов на интервалах $[T_{n_{k-1}}, T_{n_k}]$ нам достаточно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_k) = \infty. \quad (4.6)$$

Так как $q > 0$, то найдется борелевское множество Q такое, что $\pi(Q) > 0$, $\inf_{u \in Q} V_u(t) \geq cV(t)$. Так как $\pi(Q) > 0$, то существует положительная вероятность за конечное время попасть из $\{0\}$ в множество Q , не заходя в $\{0\}$. Отсюда следует, что $W(t) \geq c_1 V(t)$ при некотором $c_1 > 0$ и $t \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\mathbf{P}(E_k) = 1 - [1 - W(G_k^*)]^{n_k - n_{k-1}} \geq 1 - \left[1 - c_2 V(N(n_k) k^{(1-\varepsilon)/\beta})\right]^{n_k(d-1)/d}.$$

В силу свойств медленно меняющихся функций при любом $\gamma > 0$ и всех достаточно больших k

$$V\left(N(n_k) k^{(1-\varepsilon)/\beta}\right) \geq k^{-(1-\varepsilon)(1+\gamma)} n_k^{-1},$$

где $(1 - \varepsilon)(1 + \gamma) < 1 - \varepsilon/2$ при $\gamma = \varepsilon/3$ и достаточно малых ε . При таких γ и k

$$\mathbf{P}(E_k) \geq 1 - \left[1 - \frac{c_2}{n_k} k^{-(1-\varepsilon/2)}\right]^{n_k(d-1)/d} \geq \frac{c_2(d-1)}{d} k^{-(1-\varepsilon/2)},$$

так что (4.6) выполнено, $\mathbf{P}(E) = 1$, $\mathbf{P}(DC) = 1$, $\mathbf{P}(D) = 1$.

Относительно случая $u \neq 0$ остается справедливым замечание в конце раздела об оценке сверху.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Ч. 1: Стационарные распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 3–30.
2. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Ч. 2: Дастационарные распределения в экспоненциальном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 437–468.
3. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Ч. 3: Дастационарные распределения в субэкспоненциальном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 4, с. 640–657.
4. Asmussen S. Subexponential asymptotics for stochastic processes: extremal behavior, stationary distributions and first passage probabilities. — Ann. Appl. Probab., 1998, v. 8, № 2, p. 354–374.
5. Asmussen S., Klüppelberg C. Large deviations results for subexponential tails, with applications to insurance risk. — Stochastic Process. Appl., 1996, v. 64, № 1, p. 103–125.
6. Durrett R. Conditioned limit theorems for random walks with negative drift. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1980, v. 52, p. 277–287.
7. Iglehart D. L. Extreme values in the GI/G/1 queue. — Ann. Math. Statist., 1972, v. 43, p. 627–635.
8. Keilson J. Markov Chain Models — Rarity and Exponentiality. New York: Springer-Verlag, 1998, 184 p.
9. Klüppelberg C. Subexponential distributions and integral tails. — J. Appl. Probab., 1988, v. 25, № 1, p. 132–141.
10. Leadbetter M. R., Lindgren G., Rootzén H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. New York: Springer-Verlag, 1987, 336 p.
11. Rootzén H. Maxima and exceedances of stationary Markov chains. — Adv. Appl. Probab., 1988, v. 20, № 2, p. 371–390.
12. Боровков А. А. Оценки для распределения сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера. — Сиб. матем. журн., 2000, т. 41, № 5, с. 997–1038.
13. Боровков А. А., Фосс С. Г. Оценки для перескока случайного блуждания через произвольную границу и их применения. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 2, с. 249–277.
14. Боровков А. А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М./Новосибирск: Эдиториал УРСС/Изд-во ИМ СО РАН, 1999, 450 с.
15. Боровков А. А. Теория вероятностей. М./Новосибирск: Эдиториал УРСС/Изд-во ИМ СО РАН, 1999, 470 с.
16. Боровков А. А., Утев С. А. Оценки для распределений сумм, остановленных в марковский момент времени. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 259–272.
17. Боровков А. А. Большие уклонения сумм случайных величин двух типов. — Матем. труды, 2001, т. 4, № 2, с. 3–26.
18. Боровков А. А., Боровков К. А. О вероятностях больших уклонений случайных блужданий. I: Распределения с правильно меняющимися хвостами. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 209–232.

Поступила в редакцию
17.XII.2001