Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Лебедев, О существовании слабых решений для стохастических дифференциальных уравнений с ведущими L^0 -значными мерами, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 4, 672–685

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3774>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:08:52

© 2002 г.

ЛЕБЕДЕВ В. А.*

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЕДУЩИМИ L^0 -ЗНАЧНЫМИ МЕРАМИ¹⁾

В настоящей статье для стохастического дифференциального уравнения с σ -конечной L^0 -значной случайной мерой θ в смысле Бихтелера и Жакода дается доказательство существования его слабого решения, основанное на подобном результате для частного случая L^2 -значной случайной меры.

Ключевые слова и фразы: σ -конечная L^p -значная случайная мера, стохастическое дифференциальное уравнение, слабое решение, расширение стохастического базиса.

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ есть стохастический базис, состоящий из вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и непрерывной справа фильтрации $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, и пусть $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{F})$ и $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ — соответственно $\mathbb{F}$ -опциональная и $\mathbb{F}$ -предсказуемая σ -алгебры на $\Omega \times \mathbf{R}_+$. Пусть $(E, \mathcal{E})$ есть измеримое пространство.

Напомним определения используемых здесь понятий работы [1], а также [2] и [3]. Прежде всего, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ для $p \geq 1$ означает банахово пространство интегрируемых в степени p случайных величин ξ (точнее, классов их $\mathbf{P}$ -эквивалентности) с нормой $\|\xi\|_p = (\mathbf{E}|\xi|^p)^{1/p}$, а $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ для $0 \leq p < 1$ есть F -пространство интегрируемых в степени p случайных величин ξ с квазинормой $\|\xi\|_p = \mathbf{E}(|\xi| \wedge |\xi|^p)$. В частности, $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ содержит все случайные величины на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, и сходимость в нем совпадает со сходимостью по вероятности.

Основным понятием работ [1]–[3] является σ -конечная L^p -значная для $p \geq 0$ случайная мера на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$, а именно семейство $\theta = (\theta_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) θ_t для каждого $t \in \mathbf{R}_+$ есть σ -конечная мера на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$ со значениями в $L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, т.е. имеется такая строго положительная

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, лаборатория математической статистики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-15-96033.

$\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ -измеримая функция V на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$, что если $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{E})_V = \{\varphi: \varphi \text{ } \mathcal{P} \otimes \mathcal{E}\text{-измеримы, } \varphi/V \text{ ограничены}\}$, то мы имеем:

- (а-1) θ_t — линейное отображение из $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{E})_V$ в $L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$,
- (а-2) если (φ_n) — последовательность в $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{E})_V$ с $|\varphi_n| \leq V$, сходящаяся поточечно к 0, то $\theta_t(\varphi_n) \rightarrow 0$ в $L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$;
- б) $\theta_s(\varphi) = \theta_t(\varphi 1_{[0,s]})$ для всех $\varphi \in (\mathcal{P} \otimes \mathcal{E})_V$ и $s \leq t$;
- в) $\theta_t(\varphi 1_{A \times I \times E}) = 1_A \theta_t(\varphi 1_{\Omega \times I \times E})$ для всех $\varphi \in (\mathcal{P} \otimes \mathcal{E})_V$ и $t \in \mathbf{R}_+$, если $A \in \mathcal{F}_0$ и $I = \mathbf{R}_+$ или если $A \in \mathcal{F}_s$ и $I =]s, s']$ с $s < s'$.

В частности, когда $V \equiv 1$, θ называется *конечной L^p -значной случайной мерой*. Обозначим через $\tilde{\mathcal{S}}_\sigma^p$ (соответственно $\tilde{\mathcal{S}}^p$) пространство всех σ -конечных (конечных) L^p -значных случайных мер на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$.

Мы полагаем для $\theta \in \tilde{\mathcal{S}}_\sigma^p$

$$\|\varphi\|_{L^{1,p}(\theta)} = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \left(1 \wedge \sup_{\substack{\psi \in (\mathcal{P} \otimes \mathcal{E})_V \\ |\psi| \leq |\varphi|}} \|\theta_N(\psi)\|_p \right)$$

и обозначаем через $L^{1,p}(\theta)$ множество $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ -измеримых функций φ , для каждой из которых имеется последовательность $(\varphi_n) \subset (\mathcal{P} \otimes \mathcal{E})_V$ с $\|\varphi_n - \varphi\|_{L^{1,p}(\theta)} \rightarrow 0$. Тогда для каждого $t \in \mathbf{R}_+$ $\theta_t(\varphi_n)$ стремится к пределу в $L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$, который не зависит от выбора (φ_n) для данной φ и обозначается $\theta_t(\varphi)$. При этом если $p \leq q$ и $\theta \in \tilde{\mathcal{S}}_\sigma^q$, то $\theta \in \tilde{\mathcal{S}}_\sigma^p$ и $L^{1,q}(\theta) \subset L^{1,p}(\theta)$. Относительно квазинормы $\|\cdot\|_{L^{1,p}(\theta)}$ пространство $L^{1,p}(\theta)$ полно.

Аналогично на пространстве $\tilde{\mathcal{S}}^p$ конечных случайных мер можно ввести квазинорму

$$\|\theta\|_{\tilde{\mathcal{S}}^p} = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \left(1 \wedge \sup_{\substack{\varphi \in (\mathcal{P} \otimes \mathcal{E})_1 \\ |\varphi| \leq 1}} \|\theta_N(\varphi)\|_p \right),$$

и тогда $\tilde{\mathcal{S}}^p$ полно относительно этой квазинормы.

Приведем теперь пример, важный для дальнейшего развития теории в целом. Именно, пусть $E = \{1\}$, т.е. состоит из одной точки, так что мы рассматриваем случайные меры на $(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{P})$. Тогда по теореме Деллашери–Мокободского–Бихтелера (см. [1, теорема 1.1]) имеется взаимно однозначное соответствие между множеством конечных L^0 -значных случайных мер на $(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{P})$ и множеством семимартингалов, определяемых, с точностью до неотличимости, по формуле

$$\theta_t(H) = H \cdot X_t \quad (1)$$

для всякого ограниченного предсказуемого H при каждом $t \in \mathbf{R}_+$. Что касается σ -конечных L^0 -значных случайных мер, то они обычно называются формальными семимартингалами. Обозначая через $\mathcal{S}^p$ и $\mathcal{S}_\sigma^p$ соответственно $\tilde{\mathcal{S}}^p$ и $\tilde{\mathcal{S}}_\sigma^p$ для $E = \{1\}$, заметим, что относительно соответствующей квазинормы топология на $\mathcal{S}^0$ совпадает с топологией

Эмери [4] на пространстве семимартингалов, а на $\mathcal{S}^p$ для $p \geq 1$ — с топологией сходимости в $\mathcal{H}^p$ из [4] на каждом конечном интервале.

Пусть $\theta \in \widetilde{\mathcal{S}}_\sigma^p$ и $\varphi \in L^{1,p}(\theta)$. Тогда равенство

$$(\varphi \times \theta)_t(H) = \theta_t(H\varphi) \quad (2)$$

для $H \in \mathcal{P}_1$ определяет семейство $\varphi \times \theta$ как конечную L^p -значную меру на $(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{P})$, для которой в силу предыдущего имеется семимартингал, обозначаемый также $\varphi \times \theta$ и называемый *процессом стохастического интеграла для φ относительно θ* , и в силу (1)

$$\varphi \times \theta_t = (\varphi \times \theta)_t(1) = \theta_t(\varphi).$$

Можно определить интегралы относительно $\theta \in \widetilde{\mathcal{S}}_\sigma^p$ для более широкого класса $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ -измеримых функций, чем $L^{1,p}(\theta)$. Введем множество $L_\sigma^p(\theta) = \{\varphi: \varphi \text{ } \mathcal{P} \otimes \mathcal{E}\text{-измеримы и имеется строго положительный предсказуемый процесс } K \text{ такой, что } K\varphi \in L^{1,p}(\theta)\}$. Тогда равенство (2) для предсказуемых H с ограниченными H/K определяет $\varphi \times \theta$ как σ -конечную L^p -значную случайную меру на $(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{P})$, т.е. как формальный семимартингал. Теперь выделим множество $\widehat{L}^p(\theta) \subset L_\sigma^p(\theta)$ таких φ , для которых $\varphi \times \theta$ — конечная L^p -значная случайная мера на $(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{P})$, т.е. семимартингал. Очевидно, $L^{1,p}(\theta) \subset \widehat{L}^p(\theta)$ и $\widehat{L}^q(\theta) \subset \widehat{L}^p(\theta)$ для $p \leq q$.

В частности, если $p = 2$, а $(E, \mathcal{E})$ — лузинское пространство с борелевской σ -алгеброй, то, согласно теореме 1 из [2], существуют предсказуемый возрастающий процесс X^1 , начинающиеся в 0 квадратично интегрируемые мартингалы X^i для $i \geq 2$ с $\langle X^i, X^j \rangle \equiv 0$ для $i \neq j$ и регулярные (знакопеременные) переходные меры ρ^i из $(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{P})$ в $(E, \mathcal{E})$ такие, что для всякой $\varphi \in \widehat{L}^2(\theta)$ ее сечения ρ^i -интегрируемы почти всюду соответственно по мерам $\mathbf{P} \times dX^1$ и $\mathbf{P} \times d\langle X^i, X^i \rangle$ для $i \geq 2$, и тогда

$$\varphi \times \theta = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E \varphi \rho_s^i(\omega, du) \cdot X^i, \quad (3)$$

где в правой части стоит ряд из процессов стохастических интегралов по семимартингалам X^i , сходящийся безусловно в $\mathcal{S}^2$. Кроме того, мы выбираем мартингалы X^i для $i = 3k - 1$ непрерывными, для $i = 3k$ — чисто разрывными и квазинепрерывными слева, а для $i = 3k + 1$ — чисто разрывными и достижимыми. Пусть B есть некоторый предсказуемый возрастающий процесс, относительно которого абсолютно непрерывны X^1 и $\langle X^i, X^i \rangle$ для всех $i \geq 2$. Именно в этих терминах формулируется результат о существовании слабого решения уравнения с мерой θ для $p = 2$.

Заметим также, что к этому случаю сводится и более общий случай, когда $(E, \mathcal{E})$ — сепарабельное метрическое пространство, универсально измеримое в своем пополнении, с борелевской σ -алгеброй.

Именно, согласно предложению 1 из [5], существует неотрицательная доминирующая мера μ для θ на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$, и тогда существует σ -компактное множество $\tilde{E} \subset E$, на котором сосредоточен E -маргинал меры μ . Сама мера μ тогда сосредоточена на множестве $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times \tilde{E}, \mathcal{P} \otimes \tilde{\mathcal{E}})$, где $\tilde{\mathcal{E}}$ — след σ -алгебры $\mathcal{E}$ на $\tilde{E}$, и θ можно рассматривать как σ -конечную L^2 -значную случайную меру на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times \tilde{E}, \mathcal{P} \otimes \tilde{\mathcal{E}})$, так как для любой $\varphi \in \hat{L}^2(\theta)$ стохастический интеграл $\varphi \times \theta$ не зависит от значений функции φ на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times (E \setminus \tilde{E})$.

Для формулировки более общего результата с L^0 -значной случайной мерой понадобятся следующие определения, обозначения и факты. Именно, пусть W есть $\mathcal{O} \otimes \mathcal{E}$ -измеримая функция на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$ вида $W = W_1 + W_2 1_{D \times E}$, где W_1 и W_2 — $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ -измеримые функции, а D — дискретное опциональное случайное множество. Если $\theta \in \mathcal{S}_\sigma^0$, то можно определить меру $W \cdot \theta \in \widetilde{\mathcal{S}}_\sigma^0$ следующим образом. Именно, для $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ -измеримой функции φ на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$ такой, что $W_1 \varphi$ и $W_2 \varphi$ принадлежат $L^{1,0}(\theta)$, определим

$$(W \cdot \theta)_t(\varphi) = \theta_t(W_1 \varphi) + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta(W_2 \varphi \times \theta)_{\tau_i} 1_{\{\tau_i \leq t\}},$$

где $(\tau_i)_{i \in \mathbf{N}}$ — возрастающая последовательность моментов остановки, графики которых составляют множество D . В силу предложения 4.18 из [1] это не зависит от выбора представления функции W . В частности, если $\theta \in \mathcal{S}_\sigma^p$ для некоторого $p \geq 1$, а $W_1, W_2 \in L^{1,p}(\theta)$, то $W \cdot \theta \in \mathcal{S}_\sigma^p$. В этих терминах оказывается верным следующий результат, представляющий собой теорему 2 из [6], для которого мы дадим более краткое и точное доказательство.

Предложение. Пусть θ — σ -конечная L^0 -значная случайная мера на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$. Тогда θ является L^2 -значной случайной мерой предлокально, т.е. для всякой функции $\varphi \in \hat{L}^0(\theta)$ существует $\mathbf{P}$ -н.н. возрастающая к бесконечности последовательность $(\tau_n)_{n \in \mathbf{N}}$ моментов остановки такая, что $\varphi \in \hat{L}^2(1_{[0, \tau_n] \times E} \cdot \theta)$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \hat{L}^0(\theta)$. Тогда существует строго положительный $\mathcal{P}$ -измеримый процесс K такой, что $K\varphi$ принадлежит $L^{1,0}(\theta)$, и если V — некоторая строго положительная $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ -измеримая функция на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$, принадлежащая $L^{1,0}(\theta)$, то, согласно теореме 2 из [2], существует вероятностная мера $\mathbf{Q}$ на $(\Omega, \mathcal{F})$, эквивалентная $\mathbf{P}$, с ограниченной производной $Z_\infty = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$, такая, что $W = K|\varphi| + V$ принадлежит $L^{1,2}(\theta, \mathbf{Q})$.

Теперь определим моменты остановки

$$\tau_n = \inf \left\{ t \in \mathbf{R}_+ : Z_t \leq \frac{1}{n} \right\},$$

где Z — càdlàg (т.е. с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями) мартингал, $Z_t = \mathbf{E}(Z_\infty | \mathcal{F}_t)$. Для фиксированного n заметим прежде всего, что если B — согласованный неотрицательный возрастающий процесс, не имеющий скачка в момент τ_n , то

$$\mathbf{E}B_{\tau_n} \leq n\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}B_{\tau_n}, \quad (4)$$

где $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}$ — математическое ожидание по мере $\mathbf{Q}$. Действительно, по теореме 47 из [7, гл. IV] имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}B_{\tau_n} &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \frac{B_{\tau_n}}{Z_{\tau_n}} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \int_{[0, \tau_n]} \frac{dB_t}{Z_t} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \int_{[0, \tau_n]} \frac{1_{\{t < \tau_n\}} dB_t}{Z_t} \\ &\leq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \int_{[0, \tau_n]} n dB_t = n\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}B_{\tau_n}. \end{aligned}$$

Пусть $|\psi| \leq W$. Тогда в силу (4)

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leq s \leq t} [(\psi \times \theta)_s^{\tau_n-}]^2 \leq n\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sup_{0 \leq s \leq t} [(\psi \times \theta)_s^{\tau_n-}]^2 \leq n\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \sup_{0 \leq s \leq t} [(\psi \times \theta)_s]^2,$$

так что $1_{[0, \tau_n] \times E} \cdot \theta \in \widetilde{\mathcal{S}}_\sigma^2$, $W \in L^{1,2}(1_{[0, \tau_n] \times E} \cdot \theta)$ и $\varphi \in \widehat{L}^2(1_{[0, \tau_n] \times E} \cdot \theta)$ для любого $n \in \mathbf{N}$, что и требовалось.

Следствие. Пусть $\theta \in \widetilde{\mathcal{S}}_\sigma^0$ и $\varphi \in \widehat{L}^0(\theta)$. Тогда существует дискретное опциональное случайное множество D_0 такое, что мера $\tilde{\theta} = 1_{D^c \times E} \cdot \theta$ принадлежит $\widetilde{\mathcal{S}}_\sigma^2$ для любого дискретного опционального множества D , $D \supset D_0$, и тогда $\varphi \in L_\sigma^2(\tilde{\theta})$.

Доказательство. Применим предложение к θ и φ , и пусть $D_0 = \bigcup_{n=1}^\infty \llbracket \tau_n \rrbracket$. Так как D есть объединение графиков моментов останова, также удовлетворяющих заключению предложения, то можно считать, что $D = D_0$. Применяя предложение 4.18 из [1], легко видеть, что для каждого $n \in \mathbf{N}$ имеет место $1_{([0, \tau_n] \cap D^c) \times E} \cdot \theta \in \mathcal{S}_\sigma^2$ и

$$\varphi \in \widehat{L}^2(1_{([0, \tau_n] \cap D^c) \times E} \cdot \theta).$$

Но $\llbracket 0, \tau_n \rrbracket \cap D^c = \llbracket 0, \tau_n \rrbracket \cap D^c$, откуда легко получается требуемое.

2. Основные результаты. Пусть теперь $\check{\Omega}$ есть множество всех $\mathbf{R}^d$ -значных функций на $\mathbf{R}_+$, $\check{\mathcal{F}}$ — его борелевская σ -алгебра для тихоновской топологии, $\check{\mathcal{F}}$ — фильтрация из σ -алгебр $\check{\mathcal{F}}_t$ для $t \in \mathbf{R}_+$, каждая из которых есть пересечение для $s > t$ σ -подалгебр из $\check{\mathcal{F}}$, порождаемых сужениями на $[0, s]$ функций из $\check{\Omega}$. Пусть тогда X есть канонический процесс на $\check{\Omega}$, т.е. $X_t(\check{\omega}) = \check{\omega}_t$. Пусть также $\bar{\Omega} = \Omega \times \check{\Omega}$, $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \check{\mathcal{F}}$, $\bar{\mathcal{F}}_t = \bigcap_{s>t} (\mathcal{F}_s \otimes \check{\mathcal{F}}_s)$ и $\bar{\mathcal{F}} = (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$.

Рассмотрим $\mathcal{P}(\bar{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{E}$ -измеримую d -мерную вектор-функцию h на $\bar{\Omega} \times \mathbf{R}_+ \times E$ и уравнение

$$X = N + h(X) \times \theta \quad (5)$$

для $\theta \in \widetilde{\mathcal{S}}_\sigma^0$, $\mathbf{P}$ -п.н. не нагружающей множество $\{0\} \times E$, где N есть заданный $\mathbf{R}^d$ -значный $\mathfrak{F}$ -прогрессивно измеримый процесс, играющий роль начального условия. Тогда как в [3], аналогично [8], [9] и [10], можно определить слабое решение уравнения (5). Именно, *решающая мера* (или *слабое решение*) уравнения (5) есть такая вероятностная мера $\bar{\mathbf{P}}$ на $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$, что ее Ω -маргинал $\bar{\mathbf{P}}|_\Omega$ равен $\mathbf{P}$, уравнение (5) сохраняет свой смысл на $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mathbf{P}})$ и канонический процесс X является решающим процессом уравнения (5). Сохранение смысла уравнением (5) означает выполнение следующих двух условий:

а) θ допускает продолжение на $(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P}(\bar{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E})$ как σ -конечная $L^0(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbf{P}})$ -значная случайная мера, т.е. существует строго положительная $\mathcal{P}(\bar{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E}$ -измеримая функция V на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$, принадлежащая $L^{1,0}(\theta, \bar{\mathfrak{F}})$ и такая, что для всех $\mathcal{P}(\bar{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E}$ -измеримых φ на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$ с $|\varphi| \leq V$ процессы стохастического интеграла $\varphi \times \theta$ на $\bar{\mathfrak{F}}$ и $\bar{\mathfrak{F}}$ определены и совпадают (тем самым, очевидно, $V \in L^{1,0}(\theta, \bar{\mathfrak{F}})$);

б) если $\mathcal{P}(\bar{\mathfrak{F}}) \otimes \mathcal{E}$ -измеримая функция φ на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$ принадлежит $\hat{L}^0(\theta, \bar{\mathfrak{F}})$, то она принадлежит и $\hat{L}^0(\theta, \bar{\mathfrak{F}})$, и, кроме того, процессы стохастического интеграла $\varphi \times \theta$ на $\bar{\mathfrak{F}}$ и $\bar{\mathfrak{F}}$ также совпадают.

Согласно теореме 3 из [2], условия а) и б) выполняются, в частности, когда $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mathbf{P}})$ является очень хорошим расширением стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, т.е. когда всякий $\mathfrak{F}$ -мартингал является $\bar{\mathfrak{F}}$ -мартингалом. В этом случае сама решающая мера также называется *очень хорошей*.

Сформулируем теорему существования слабого решения для уравнения (5) с L^2 -значной случайной мерой θ .

Теорема 1. Пусть $\theta \in \mathcal{S}_\sigma^2$, $(E, \mathcal{E})$ — сепарабельное метрическое пространство, универсально измеримое в своем пополнении, с его борелевской σ -алгеброй, и для уравнения (5) выполнены следующие предположения:

1) справедливо неравенство

$$\left| \int_E h \rho^1(du) \right| \frac{dX^1}{dB} + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \int_E h \rho^i(du) \right|^2 \frac{d\langle X^i, X^i \rangle}{dB} \leq c$$

$\mathbf{P} \times dB$ -п.в. на $\Omega \times \mathbf{R}_+$ при всех $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ для $\mathcal{P}(\bar{\mathfrak{F}})$ -измеримого процесса s , имеющего $\mathbf{P}$ -п.н. конечный для любого $t \in \mathbf{R}_+$ интеграл $s \cdot B_t$;

2) функции $\int_E h \rho^i(du)$ непрерывны по $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ в U -топологии почти всюду соответственно по мерам $\mathbf{P} \times dX^1$ и $\mathbf{P} \times d\langle X^i, X^i \rangle$ для $i \geq 2$ на $\Omega \times \mathbf{R}_+$, и $\mathbf{P} \times dB$ -п.в. на $\Omega \times \mathbf{R}_+$ ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_E h \rho^{3k-1}(du) \right|^2 \frac{d\langle X^{3k-1}, X^{3k-1} \rangle}{dB} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_E h \rho^{3k}(du) \right|^2 \frac{d\langle X^{3k}, X^{3k} \rangle}{dB}$$

сходятся равномерно по $\tilde{\omega}$ на каждом U -компактном подмножестве из $\tilde{\Omega}$;

3) если μ есть целочисленная случайная мера на $(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N, \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^N))$, порождаемая скачками процесса $(X^3, \dots, X^{3k}, \dots)$ (т.е. его мера скачков), с дуальной предсказуемой проекцией ν , то функция

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \left| \int_E h \rho^{3k}(du) \right|^2$$

ν -интегрируема на $]0, \tau] \times \mathbf{R}^N$ для любого $\mathfrak{F}$ -момента остановки τ с $\mathbf{P}$ -п.н. ограниченным с B_τ равномерно по $\tilde{\omega}$ на каждом подмножестве из $\tilde{\Omega}$ вида $N(\omega) + K$, где K компактно для J_1 -топологии.

Тогда для уравнения (5) существует очень хорошая решающая мера.

Теорема является незначительным обобщением теоремы из [3], и в целом ее доказательство проходит аналогично теореме 1 из [9] или теореме 9.20 из [10]. Заметим лишь, что в пункте 2) условия теоремы 1 равномерная по $\tilde{\omega}$ сходимостъ рядов на U -компактных множествах из $\tilde{\Omega}$ эквивалентна вместе с непрерывностью функций $\int_E h \rho^i(du)$ в U -топологии непрерывности в этой топологии по $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ сумм этих рядов, используемой в доказательстве теоремы. Условие же 3) теоремы 1 обеспечивает плотное мажорирование скачков для последовательных приближений к слабому решению уравнения (5) и выполняется, в частности, в условиях теоремы из [3], где $\int_E h \rho^{3k}(du)$ ограничены по $\tilde{\omega}$ в силу условия 1) теоремы 1, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_E h \rho^{3k}(du) \right|^2 \frac{d\langle X^{3k}, X^{3k} \rangle}{dB}$$

сходится равномерно по $\tilde{\omega}$ на соответствующем множестве, но обратное, вообще говоря, неверно.

Действительно, пусть, например, X есть стохастически непрерывный однородный случайный процесс с независимыми приращениями вида $X = u * \mu$, где μ — мера его скачков с дуальной предсказуемой проекцией $\nu(ds \times du) = 1_{]0,1]}(u) ds du$ (т.е. его мера Леви сосредоточена на $]0, 1]$ и совпадает на этом интервале с лебеговой мерой), и $\theta = \mu$ с $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$. Тогда в качестве X^1 в разложении (3) можно взять $X_t^1 = t$, в качестве X^{3k} — процессы $H_k(u) * (\mu - \nu)$, где H_k — k -я функция Хаара (см. [11, гл. II, § 11]), доопределенная нулем вне $]0, 1]$, в качестве B процесс $B_t = t$, так что

$$\rho^1(du) = 1_{]0,1]}(u) du = H_1(u) du, \quad \rho^{3k}(du) = \frac{H_k(u) du}{\int_0^1 H_k^2(v) dv} = H_k(u) du,$$

а для остальных i можно взять X^i и ρ^i равными нулю. Если теперь $\tilde{\nu}$ — дуальная предсказуемая проекция меры скачков процесса $(X, X^3, \dots, X^{3k}, \dots)$ со значениями в $\mathbf{R}^N$, а $(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$ — соответствующие координатные отображения из $\mathbf{R}^N$ в $\mathbf{R}$, то она имеет вид

$\tilde{\nu}(ds \times dx) = ds \tilde{\rho}(dx)$, где $\tilde{\rho}$ сосредоточена на множестве точек вида $(x_0, H_1(x_0), \dots, H_k(x_0), \dots)$ для $x_0 \in]0, 1]$, и ее x_0 -маргинал является лебеговой мерой на $]0, 1]$. Пусть теперь R_n — n -я функция Радемахера. Тогда $R_n(u) = 2^{-(n-1)/2} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} H_k(u)$, и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \left(\int_0^1 R_n(u) \rho^{3k}(du) \right)^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \left(\int_0^1 R_n(u) H_k(u) du \right)^2 \\ &= 2^{-(n-1)} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} x_k^2, \end{aligned}$$

и на множестве, где сосредоточена мера $\tilde{\rho}$, это равно просто 1, что равномерно по n интегрируемо по конечной мере $\tilde{\rho}$ и, следовательно, по $\tilde{\nu}$ на $]0, t] \times \mathbf{R}$ для любого конечного $t \in \mathbf{R}_+$ и тем самым по ее $(t, x_1, \dots, x_k, \dots)$ -маргинальной проекции. Но ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 R_n(u) H_k(u) du \right)^2$$

сходится по n неравномерно, так как его отличные от нуля члены имеют индексы $2^{n-1} < k \leq 2^n$.

Сформулируем теперь основной результат этой статьи, относящийся к уравнению (5) с L^0 -значной случайной мерой и незначительно обобщающий результат, анонсированный в [12].

Теорема 2. Пусть $\theta \in \mathcal{S}_\sigma^0$, $(E, \mathcal{E})$ — сепарабельное метрическое пространство, универсально измеримое в своем пополнении, с его борелевской σ -алгеброй, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \llbracket \tau_n \rrbracket$ — дискретное $\mathfrak{F}$ -опциональное случайное множество, для которого $1_{D^c \times E} \cdot \theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_\sigma^2$, и для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует такая строго положительная $\mathcal{F}_{\tau_n}$ -измеримая случайная величина g_n , что $g_n 1_{\llbracket \tau_n \rrbracket \times E} \cdot \theta \in \mathcal{F}_\sigma^2$, причем на каждом множестве вида $\llbracket \tau_{n-1}, \tau_n \rrbracket \times E$ с $\tau_0 = 0$ условия теоремы 1 выполняются для функции h и мер $1_{D^c \times E} \cdot \theta$ и $g_n 1_{\llbracket \tau_n \rrbracket \times E} \cdot \theta$ вместо θ . Тогда для уравнения (5) существует очень хорошая решающая мера.

Заметим, что последовательность (τ_n) в теореме необязательно брать **P**-п.н. строго возрастающей.

Для доказательства теоремы 2 потребуется следующая спецификация определения расширения стохастического базиса, фигурирующего в [8] и [10]. Именно, пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — стохастический базис с непрерывной справа фильтрацией $\mathfrak{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ и $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \in \mathbf{R}_+} \mathcal{F}_t$, а T — момент остановки относительно него. Пусть $\tilde{T}_t = (t - T) \vee 0$, тогда для всякого $t \in \mathbf{R}_+$ $\tilde{T}_t$ является моментом остановки относительно $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathbf{P})$ с $\tilde{\mathfrak{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ и $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{T+t}$, ибо для $s \in \mathbf{R}_+$ $\{\tilde{T}_t \leq s\} = \{t - T \leq s\} \in \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T+t} = \tilde{\mathcal{F}}_t$. Пусть теперь $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathfrak{G}}, \mathbf{P})$ с $\tilde{\mathfrak{G}} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ есть расширение стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ (без

ограничения общности можно считать фильтрации $\tilde{\mathcal{F}}$ и $\tilde{\mathcal{G}}$ определенными на едином вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Определим для $t \in \mathbf{R}_+$ σ -алгебру $\mathcal{G}_t$ событий из $\mathcal{F}$, пересечения которых с множеством $\{t < T\}$ принадлежат $\mathcal{F}_t$, а с множеством $\{t \geq T\}$ — $\tilde{\mathcal{G}}_{\tilde{T}_t}$. Так как $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ и $\mathcal{F}_t \subset \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}_t} \subset \tilde{\mathcal{G}}_{\tilde{T}_t}$, то $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$. Очевидно, фильтрация $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ непрерывна справа. Докажем следующий результат.

Лемма. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{G}}, \mathbf{P})$ является очень хорошим расширением для $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$. Тогда $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ является очень хорошим расширением для $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Доказательство. Пусть M — равномерно интегрируемый $\mathcal{F}$ -мартингал. Имеем тогда для $s \leq t$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_t | \mathcal{G}_s) &= 1_{\{s < T\}} \mathbf{E}(M_t | \mathcal{G}_s) + 1_{\{s \geq T\}} \mathbf{E}(M_t | \mathcal{G}_s) \\ &= 1_{\{s < T\}} \mathbf{E}(M_t | \mathcal{G}_s) + 1_{\{s \geq T\}} \mathbf{E}(M_t | \tilde{\mathcal{G}}_{\tilde{T}_s}) \\ &= 1_{\{s < T\}} M_s + 1_{\{s \geq T\}} \mathbf{E}(M_{T+\tilde{T}_s} | \tilde{\mathcal{G}}_{\tilde{T}_s}) \\ &= 1_{\{s < T\}} M_s + 1_{\{s \geq T\}} M_{T+\tilde{T}_s} = 1_{\{s < T\}} M_s + 1_{\{s \geq T\}} M_s = M_s, \end{aligned}$$

что и означает, что M есть $\mathcal{G}$ -мартингал.

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности, при необходимости расширяя вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, можно считать, что существует равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина ξ , не зависящая от $\mathcal{F}_\infty$. Отсюда, в свою очередь, следует существование последовательности равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, не зависящих друг от друга и от $\mathcal{F}_\infty$.

Итак, совершенно аналогично доказательству теоремы 1, из уравнения (5) исключается процесс N . Далее, по теореме 1 существует очень хорошая решающая мера для уравнения (5) с $N \equiv 0$ (и соответственно преобразованной функцией h) и мерой $1_{D^c \times E} \cdot \theta$ вместо θ . Ей отвечает, аналогично теореме 2.18 из [8] или предложению 9.16 из [10], решающий процесс $X^{(0)}$ этого уравнения на очень хорошем расширении $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}^{(1)}, \mathbf{P})$ стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$ с $\mathcal{G}^{(1)} = (\mathcal{G}_t^{(1)})_{t \in \mathbf{R}_+}$. Заметим теперь, что след бэровской σ -алгебры для тихоновской топологии на $D_{[0, \infty[}(\mathbf{R}^d)$ совпадает с борелевской σ -алгеброй на этом пространстве для J_1 -топологии Скорохода, а борелевские множества для тихоновской топологии универсально измеримы относительно этой σ -алгебры. Поэтому в силу сепарабельности пространства $D_{[0, \infty[}(\mathbf{R}^d)$ с J_1 -топологией Скорохода можно выбрать

$$\mathcal{G}_\infty^{(1)} = \bigvee_{t \in \mathbf{R}_+} \mathcal{G}_t^{(1)} \subset \sigma(\mathcal{F}_\infty, \xi_1).$$

Процесс $h(X^{(0)}) \times (g_1 1_{[\tau_1] \times E} \cdot \theta) = h(X^{(0)}) 1_{[0, \tau_1] \times E} \times (g_1 1_{D \times E} \cdot \theta)$ — чисто скачкообразный с единственным скачком в момент τ_1 , и $h(X^{(0)}) \in$

$L^{1,2}(g_1 1_{[\tau_1] \times E} \cdot \theta)$. Поэтому $h(X^{(0)}) \in L^{1,0}(1_{[\tau_1] \times E} \cdot \theta)$, и процесс $h(X^{(0)}) \times (1_{[\tau_1] \times E} \cdot \theta)$ — чисто скачкообразный с единственным скачком в момент τ_1 , равным $\Delta(h(X^{(0)}) \times (g_1 1_{[\tau_1] \times E} \cdot \theta))/g_1$. Положим на $[0, \tau_1]$ процесс $X^{(1)}$ равным $X^{(0)} + h(X^{(0)}) \times (1_{[\tau_1] \times E} \cdot \theta)$, тогда он является решающим для уравнения (5) на стохастическом интервале $[0, \tau_1]$.

Пусть теперь для $t \in \mathbf{R}_+$ $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{G}_{t+\tau_1}^{(1)}$ и $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, $\tilde{h}_t(\omega, \tilde{\omega}, u) = h_{t+\tau_1}(\omega, \tilde{\omega}^{(X^{(1)}, \tau_1)}, u)$, где

$$\omega_t^{(X^{(1)}, \tau_1)} = \begin{cases} X_t^{(1)}, & t < \tau_1, \\ \tilde{\omega}_{t+\tau_1}, & t \geq \tau_1, \end{cases}$$

и $\tilde{\theta}_t(\varphi_{t,u}) = \tilde{\varphi} \times \theta_{t+\tau_1}$, где

$$\tilde{\varphi}_{t,u} = \begin{cases} 0, & t \leq \tau_1, \\ \varphi_{t-\tau_1,u}, & t > \tau_1, \end{cases}$$

так что $\varphi \in L^{1,0}(\tilde{\theta})$ (соответственно $\varphi \in \hat{L}^0(\tilde{\theta})$) тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi} \in L^{1,0}(\theta)$ (соответственно $\tilde{\varphi} \in \hat{L}^0(\theta)$). Рассмотрим уравнение

$$X = X_{\tau_1}^{(1)} + \tilde{h}(X) \times \tilde{\theta}. \quad (6)$$

Тогда оно, рассматриваемое на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$, удовлетворяет условиям теоремы 2 с моментами $\tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_1, \dots$ вместо $\tau_1, \tau_2, \dots$, и существует решающий процесс $\tilde{X}^{(2)}$ для уравнения (6) на стохастическом интервале $[0, \tau_2 - \tau_1]$ на очень хорошем расширении $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{G}}^{(2)}, \mathbf{P})$ с $\tilde{\mathcal{G}}^{(2)} = (\tilde{\mathcal{G}}_t^{(2)})_{t \in \mathbf{R}_+}$ стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$, причем можно выбрать $\tilde{\mathcal{G}}_\infty^{(2)} = \bigvee_{t \in \mathbf{R}_+} \tilde{\mathcal{G}}_t^{(2)} \subset \sigma(\mathcal{G}_\infty^{(1)}, \xi_2)$. Определим процесс $X^{(2)}$ равенствами

$$X_t^{(2)} = \begin{cases} X_t^{(1)}, & t < \tau_1, \\ \tilde{X}_{t-\tau_1}^{(2)}, & t \geq \tau_1. \end{cases}$$

Тогда он является решающим процессом уравнения (5) на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}^{(2)}, \mathbf{P})$ (который строится из $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{G}}^{(2)}, \mathbf{P})$ в соответствии с леммой и с моментом τ_1 вместо T) и стохастическом интервале $[0, \tau_2]$.

Итак, для всякого $n \in \mathbf{N}$ мы имеем фильтрацию $\mathcal{G}^{(n)} = (\mathcal{G}_t^{(n)})_{t \in \mathbf{R}_+}$, с которой стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}^{(n)}, \mathbf{P})$ является очень хорошим расширением стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$, и процесс $X^{(n)}$, который на стохастическом интервале $[0, \tau_n]$ является решающим процессом уравнения (5) на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}^{(n)}, \mathbf{P})$, причем для $m < n$ $\mathcal{G}_t^{(m)} \subset \mathcal{G}_t^{(n)}$ при всех $t \in \mathbf{R}_+$ и сужение $X^{(n)}$ на $[0, \tau_m]$ совпадает с $X^{(m)}$. В силу последнего, так как $\mathbf{P}$ -п.н. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$, существует процесс X , сужение которого на $[0, \tau_n]$ совпадает с $X^{(n)}$. Обозначим теперь $\mathcal{G}_t = \bigvee_{n=1}^\infty \mathcal{G}_t^{(n)}$ и $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$. Так как для каждого

$t \in \mathbf{R}_+$ σ -алгебра $\mathcal{G}_t$ состоит из событий, пересечения которых с событием $\{t < \tau_1\}$ принадлежат $\mathcal{G}_t^{(1)}$, а с событиями $\{\tau_{n-1} \leq t < \tau_n\}$ — соответственно $\mathcal{G}_t^{(n)}$, то фильтрация $\mathfrak{G}$ непрерывна справа, и, аналогично лемме, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{G}, \mathbf{P})$ является очень хорошим расширением стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, на котором X является решающим процессом уравнения (5), и ему отвечает очень хорошая решающая мера. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2 остается справедливой, если в качестве D взять дискретное $\mathfrak{F}$ -опциональное множество из графиков $\mathfrak{F}$ -моментов остановки $\tau_n(\omega, \dot{\omega})$, для которого $1_{D^c \times E} \cdot \theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_\sigma^2(\tilde{\mathbf{P}})$ и $g_n 1_{[\tau_n] \times E} \cdot \theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_\sigma^2(\tilde{\mathbf{P}})$ со строго положительными $\overline{\mathcal{F}}_{\tau_n}$ -измеримыми случайными величинами g_n при любой вероятностной мере $\tilde{\mathbf{P}}$ на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$, Ω -маргинал которой равен $\mathbf{P}$ и для которой $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathfrak{F}, \tilde{\mathbf{P}})$ является очень хорошим расширением стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Действительно, если $X^{(0)}$ — решающий процесс уравнения (5) с $N \equiv 0$ и мерой $1_{D^c \times E} \cdot \theta$ вместо θ на очень хорошем расширении $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{G}^{(1)}, \mathbf{P})$ стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, то $\tau_1(\omega, X^{(0)})$ является $\mathfrak{G}^{(1)}$ -моментом остановки, и все дальнейшее проходит аналогично доказательству теоремы 2.

З а м е ч а н и е 2. Если для некоторой возрастающей к ∞ (необязательно $\mathbf{P}$ -п.н. строго) последовательности $(\tau_n)_{n \in \mathbf{N}}$ моментов остановки относительно $\mathfrak{F}$ (или $\mathfrak{F}$) выполнены условия теоремы 1 для мер $1_{[0, \tau_n] \times E} \cdot \theta$ вместо θ , то выполнены и условия теоремы 2 (с учетом замечания 1 для $\mathfrak{F}$). Действительно, из условий теоремы 1 вытекает локальная принадлежность функции h при разных $\dot{\omega}$ к ограниченному множеству в $L^{1,2}(\theta)$ (которую легко сделать глобальной надлежащим выбором моментов остановки τ_n), и тогда случайную величину g_1 можно выбрать принимающей постоянные значения на множествах вида $[\tau_1] \cap [0, \tau_n]$, и далее рассуждение проходит аналогично доказательству теоремы 2.

3. Основные примеры. Приведем теперь примеры, демонстрирующие возможность сведения к теоремам 1 и 2 прежних результатов о существовании слабых решений стохастических дифференциальных уравнений.

П р и м е р 1. Теорема 9.20 из [10] является частным случаем теоремы 1 с множеством $\overline{E} = E \cup \{1, \dots, 2r\}$ вместо E , в котором точки $1, \dots, 2r$ изолированы от E , с

$$\theta_t(\varphi) = \sum_{i=1}^r \varphi(i) \cdot a_t^i + \sum_{i=1}^r \varphi(r+i) \cdot \overline{m}_t^i + \varphi * (\mu^c - \nu^c)_t + \varphi * \mu_t^d,$$

где $\overline{m}^i$ — процессы из доказательства теоремы 9.20 в [10], получаемые ортогонализацией системы $(m^1, \dots, m^r)$ с $\overline{m} = T \cdot m$, а последний стохастический интеграл понимается в семимартингальном смысле, и с функ-

цией $\hat{h}$ вместо h , равной

$$\hat{h} = \begin{cases} f^u, & u = 1, \dots, r, \\ g^{u-r}, & u = r+1, \dots, 2r, \text{ с } \bar{g} = gT^T, \\ h, & u \in E. \end{cases}$$

Очевидно, $\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_\sigma^2$, причем в качестве X^1 можно взять процесс B , фигурирующий в условиях теоремы 9.20 из [10] и пригодный в качестве B и в условиях теоремы 1, в качестве X^{3i-1} для $i = 1, \dots, r$ — процессы $\overline{m}^i$, а для $i > r$ их можно взять тождественно равными нулю, в качестве X^{3i} — процессы вида $\varphi^{3i} * (\mu^c - \nu^c)$ с $\varphi^{3i} \varphi^{3j} * \nu^c \equiv 0$ для $i \neq j$, дающие полное ортогональное разложение стохастических интегралов вида $\varphi * (\mu^c - \nu^c)$, в качестве X^{3i+1} — процессы вида $\varphi^{3i+1} * (\mu^d - \nu^d)$ с $(\varphi^{3i+1} - \overline{\varphi}^{3i+1})(\varphi^{3j+1} - \overline{\varphi}^{3j+1}) * \nu^d \equiv 0$ для $i \neq j$, дающие полное ортогональное разложение стохастических интегралов вида $\varphi * (\mu^d - \nu^d)$. Если имеются факторизации $da_t^j(\omega) = A_t^j(\omega) dB_t(\omega)$,

$$d\langle m^j, m^l \rangle(\omega) = M_t^{jl}(\omega) dB_t(\omega), \quad d\langle \overline{m}^j, \overline{m}^j \rangle(\omega) = \overline{M}_t^j(\omega) dB_t(\omega), \\ \nu^c(\omega, dt \times du) = \rho_t^c(\omega, du) dB_t(\omega), \quad \nu^d(\omega, dt \times du) = \rho_t^d(\omega, du) dB_t(\omega),$$

в терминах которых формулируются условия теоремы 9.20 из [10], то мера θ имеет разложение вида (3) с $\rho_t^1(\{j\}) = A^j$ для $1 \leq j \leq r$, $\rho_t^1(\{j\}) = 0$ для $r+1 \leq j \leq 2r$, $\rho^1 = \rho^d$ на E , при $1 \leq i \leq r$ $\rho_t^{3i-1}(\{j\}) = 0$ для $1 \leq j \leq r$, $\rho_t^{3i-1}(\{j\}) = 1$ для $r+1 \leq j \leq 2r$, $\rho^{3i-1} = 0$ на E , при $i > r$ $\rho_t^{3i-1} \equiv 0$, $\rho_t^{3i}(\{j\}) = 0$ для $1 \leq j \leq 2r$,

$$\rho_t^{3i}(\Gamma) = \frac{\int_\Gamma \varphi_{t,u}^{3i} \rho_t^c(du)}{\int_E (\varphi_{t,u}^{3i})^2 \rho_t^c(du)} \quad \text{для } \Gamma \in \mathcal{B}(E),$$

$$\rho_t^{3i+1}(\{j\}) = 0 \quad \text{для } 1 \leq j \leq 2r,$$

$$\rho_t^{3i+1}(\Gamma) = \frac{\int_\Gamma (\varphi_{t,u}^{3i+1} - \overline{\varphi}_{t,u}^{3i+1}) \rho_t^d(du)}{\int_E (\varphi_{t,u}^{3i+1} - \overline{\varphi}_{t,u}^{3i+1})^2 \rho_t^d(du)} \quad \text{для } \Gamma \in \mathcal{B}(E).$$

Имеем тогда (для матрицы $\overline{M}$ с элементами $\overline{M}^j$ на главной диагонали и 0 вне ее)

$$\begin{aligned} & \left| \int_E \hat{h} \rho^1(du) \right| \frac{dX^1}{dB} = \left| \int_E \hat{h} \rho^1(du) \right| = |fA|, \\ & \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_E \hat{h} \rho^{3i-1}(du) \right|^2 \frac{d\langle X^{3i-1}, X^{3i-1} \rangle}{dB} = \sum_{i=1}^r |\bar{g}^i|^2 (\overline{M}^i)^2 \\ & = \text{Tr}(\bar{g} \overline{M} \bar{g}^T) = \text{Tr}(g T^T \overline{M} T g^T) = \text{Tr}(g N g^T), \\ & \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_E \hat{h} \rho^{3i}(du) \right|^2 \frac{d\langle X^{3i}, X^{3i} \rangle}{dB} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^d \left(\int_E \hat{h}^k \rho^{3i}(du) \right)^2 \frac{d\langle X^{3i}, X^{3i} \rangle}{dB} \\ & = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\int_E \hat{h}^k \varphi^{3i} \rho^c(du))^2}{\int_E (\varphi^{3i})^2 \rho^c(du)} = \sum_{k=1}^d \int_E (h^k)^2 \rho^c(du) = \int_E |h|^2 \rho^c(du) \end{aligned}$$

в силу ортогональности относительно ρ^c разложения функций h^k по φ^{3i} , а также

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_{\bar{E}} \hat{h} \rho^{3i+1}(du) \right|^2 \frac{d\langle X^{3i+1}, X^{3i+1} \rangle}{dB} \\ &= \int_E |h - \bar{h}|^2 \rho^d(du) = \int_E |h|^2 \rho^d(du) - \frac{|\int_E h \rho^d(du)|^2}{\Delta B}, \end{aligned}$$

так что в силу условия (1) теоремы 9.20 из [10] выполнено условие 1) теоремы 1. Непрерывность в условии 2) теоремы 1 вытекает очевидным образом из условия непрерывности (2) теоремы 9.20 из [10].

Именно, $\int_{\bar{E}} \hat{h} \rho^1(du) = fA + \int_E h \rho^d(du)$, причем $\int_E \rho^d(du) = 1/\Delta B$ и $\int_E |h|^2 \rho^d(du) \leq c + |\int_E h \rho^d(du)|^2 \Delta B \leq c + c^2 \Delta B$, так что h равномерно ρ^d -интегрируема на E , $\int_{\bar{E}} \hat{h} \rho^{3i-1}(du) = \bar{g}^i$ для $1 \leq i \leq r$, $\int_{\bar{E}} \hat{h} \rho^{3i-1}(du) = 0$ для $i > r$,

$$\int_{\bar{E}} \hat{h} \rho^{3i}(du) = \frac{\int_E h \varphi^{3i} \rho^c(du)}{\int_E (\varphi^{3i})^2 \rho^c(du)}$$

и

$$\int_E |h| |\varphi^{3i}| \rho^c(du) \leq \left(\int_E (\varphi^{3i})^2 \rho^c(du) \right)^{1/2} \left(\int_E |h|^2 \rho^c(du) \right)^{1/2},$$

так что $h\varphi^{3i}$ равномерно ρ^c -интегрируема на E ,

$$\int_{\bar{E}} \hat{h} \rho^{3i+1}(du) = \frac{\int_E h(\varphi^{3i+1} - \bar{\varphi}^{3i+1}) \rho^d(du)}{\int_E (\varphi^{3i+1} - \bar{\varphi}^{3i+1})^2 \rho^d(du)}$$

и точно так же $h\varphi^{3i+1}$ равномерно ρ^d -интегрируема на E .

В условии 2) равномерная сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_{\bar{E}} \hat{h} \rho^{3i-1}(du) \right|^2 \frac{d\langle X^{3i-1}, X^{3i-1} \rangle}{dB}$$

следует тривиально из его конечности, а равномерная сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_{\bar{E}} \hat{h} \rho^{3i}(du) \right|^2 \frac{d\langle X^{3i}, X^{3i} \rangle}{dB}$$

— из U -непрерывности его членов и суммы, равной $\int_E |h|^2 \rho^c(du)$, следующей, в свою очередь, из непрерывности функции $|h|^2$ и ее равномерной ρ^c -интегрируемости.

Наконец, требуемая в условии 3) равномерная интегрируемость следует из равномерной интегрируемости в условии (3) теоремы 9.20 из [10].

Пример 2. Пусть теперь выполнены условия теоремы 9.32 из [10]. Определим после исключения из уравнения (5) процесса N $\bar{\mathfrak{F}}$ -моменты остановки $\tau_n(\omega, \tilde{\omega}) = \inf\{t: |\tilde{\omega}_t| > n\}$. Так как почти наверное по любой решающей мере $|h_{t,u}(\omega, \tilde{\omega})| \leq 2n$ на множестве $\llbracket 0, \tau_n \rrbracket \times E$, то на каждом таком множестве выполнены условия теоремы 9.20 из [10], которая в силу примера 1 сводится к теореме 1, и с учетом замечаний 2 и 1 выполнены условия теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bichteler K., Jacod J. Random measures and stochastic integration. — Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 1983, v. 49, p. 1–18.
2. Лебедев В. А. Поведение случайных мер при замене фильтрации. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 4, с. 754–763.
3. Lebedev V. A. On the existence of weak solutions for stochastic differential equations with driving L^2 -valued measures. — Международная конференция «Асимптотические методы в теории вероятностей и математической статистике», посвященная 50-летию образования кафедры теории вероятностей и математической статистики С.-Петербургского государственного университета. Тезисы докладов. С.-Петербург, 1998, с. 151–155.
4. Eméry M. Une topologie sur l'espace des semimartingales. — Lecture Notes in Math., 1979, v. 721, p. 260–280.
5. Лебедев В. А. Теорема Фубини для зависящих от параметра стохастических интегралов по L^0 -значным случайным мерам. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 313–323.
6. Lebedev V. A. On infinite-dimensional stochastic integration. — Statistics and Control of Stochastic Processes: Steklov Seminar 1984. New York: Optimization Software, 1989, p. 277–304.
7. Деллашери К. Емкости и случайные процессы. М.: Мир, 1975, 192 с.
8. Jacod J., Mémey J. Weak and strong solutions of stochastic differential equations: existence and stability. — Lecture Notes in Math., 1981, v. 851, p. 169–212.
9. Lebedev V. A. On the existence of weak solutions for stochastic differential equations with driving martingales and random measures. — Stochastics, 1983, v. 9, № 1–2, p. 37–76.
10. Лебедев В. А. Мартингалы, сходимость вероятностных мер и стохастические уравнения. — М.: Изд-во МАИ, 1996, 348 с.
11. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
12. Лебедев В. А. О существовании слабых решений для стохастических дифференциальных уравнений с ведущими L^0 -значными мерами. — Обзорение прикл. и промышл. матем., сер. вероятн. статист., 1998, т. 5, в. 2, с. 246.

Поступила в редакцию
26.III.1999

Исправленный вариант
23.V.2000