Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Асимптотики больших уклонений винеровских полей в L^p -норме, нелинейные уравнения Хаммерштейна и гиперболические краевые задачи высокого порядка, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 4, 710–726

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:21:09

© 2002 г.

ФАТАЛОВ В. Р.*

АСИМПТОТИКИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ВИНЕРОВСКИХ ПОЛЕЙ В L^p -НОРМЕ, НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ХАММЕРШТЕЙНА И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА¹⁾

В работе для значений $1 < p \leq 2$ вычислены точные асимптотики при $u \rightarrow \infty$ вероятностей

$$P\left\{\left(\int_{[0,1]^n} |X(t)|^p dt\right)^{1/p} > u\right\}$$

для двух гауссовских полей: винеровского поля Йеха–Ченцова и так называемой «винеровской подушки» — многопараметрических аналогов винеровского процесса и броуновского моста. Эти гауссовские поля имеют нулевые средние и ковариационные функции вида: $\prod_{i=1}^n \min(t_i, s_i)$ и $\prod_{i=1}^n [\min(t_i, s_i) - t_i s_i]$, $t = (t_1, \dots, t_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$.

Метод исследования — метод Лапласа в банаховых пространствах. Выявлена связь рассматриваемой задачи с теорией нелинейных уравнений Хаммерштейна в $\mathbf{R}^n$ и гиперболическими краевыми задачами высокого порядка. Даны решения двух таких частных задач.

Ключевые слова и фразы: винеровское поле Йеха–Ченцова, «винеровская подушка», метод Лапласа в банаховых пространствах, ковариационный оператор гауссовой меры, нелинейные уравнения Хаммерштейна, гиперболические краевые задачи высокого порядка.

1. Введение и формулировка основных результатов

Данная работа продолжает исследования автора по асимптотикам распределений норм гауссовских элементов в пространствах L^p и l^p , [1]–[3]. Для решения этих очень сложных задач потребовалось развить новый метод исследования — метод Лапласа для вероятностных мер в

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-524).

банаховых пространствах, [1], [2], [4], восходящий к работам Эллиса и Розен [5] и Боровкова и Могильского [6]. На основе этого метода в статьях [1]–[3] были найдены точные асимптотики распределений L^p -норм винеровского процесса (с линейным сносом и без) и броуновского моста, а также общих гауссовских элементов со значениями в пространствах l^p для значений $p \geq 2$.

В данной статье для значений $1 < p \leq 2$ решена аналогичная задача для двух гауссовских полей: винеровского поля Йеха–Ченцова и так называемой «винеровской подушки» — многопараметрических аналогов винеровского процесса и броуновского моста (тем самым, покрыт и неисследованный ранее в одномерном случае промежуток значений p).

Перейдем к подробной постановке задачи.

Пусть $\mathbf{K}^n = [0, 1]^n$ — единичный куб в $\mathbf{R}^n$, $W(t)$, $t \in \mathbf{K}^n$, — винеровское поле Йеха–Ченцова, играющее важную роль во многих вопросах статистики, теории многопараметрических мартингалов и стохастических дифференциальных уравнений, а именно, гауссовское поле с п.н. непрерывными реализациями, средним нуль и ковариационной функцией вида

$$r(t, s) = \mathbf{E} W(t) W(s) = \prod_{i=1}^n \min(t_i, s_i), \quad (1.1)$$

$t = (t_1, \dots, t_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$. Пусть также $W_0(t)$, $t \in \mathbf{K}^n$, — другое широко распространенное в теории и статистических приложениях гауссовское поле — так называемая «винеровская подушка», — также имеющее п.н. непрерывные выборочные функции, среднее нуль и ковариационную функцию вида

$$r_0(t, s) = \mathbf{E} W_0(t) W_0(s) = \prod_{i=1}^n [\min(t_i, s_i) - t_i s_i], \quad (1.2)$$

$t = (t_1, \dots, t_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$. Из определения видно, что $W(t) = 0$ п.н. для каждого $t \in L$, где

$$L = \{t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{K}^n: \exists i \text{ такое, что } t_i = 0\},$$

и $W_0(t) = 0$ п.н. для каждого t из границы $\partial \mathbf{K}^n$.

Пусть $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, обозначим $\mathcal{K} := \mathbf{N}^n \setminus \{(1, 1, \dots, 1)\}$ и $k = (k_1, \dots, k_n)$.

Теорема 1. Пусть $1 < p \leq 2$. Тогда при $u \rightarrow \infty$ имеет место соотношение:

$$\mathbf{P} \left\{ \left(\int_{\mathbf{K}^n} |W(t)|^p dt \right)^{1/p} > u \right\} = \exp \left\{ - \frac{u^2}{2\sigma^2} \right\} \frac{\sqrt{2}\sigma}{u\sqrt{\pi}} D_n^{-1/2} (1 + o(1)), \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \left[\left[\frac{2}{\pi p} \right]^{1/2} \left(1 + \frac{p}{2} \right)^{(p-2)/(2p)} \frac{\Gamma(1/2 + 1/p)}{\Gamma(1 + 1/p)} \right]^{2n}, \\ D_n &= \prod_{k \in \mathcal{K}} \left(1 - \frac{p-1}{2^n p^n} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \cdots \alpha_{k_n} \right), \\ \alpha_k &= \frac{1}{(k-1/2)(k-1+1/p)}, \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (1.4)$$

З а м е ч а н и е. Для последовательного подсчета произведений в (1.4) можно использовать формулу (см. [7, с. 754, № 11]):

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{k+b} \right) \left(1 - \frac{a}{k+c} \right) = \frac{\Gamma(b+1) \Gamma(c+1)}{\Gamma(a+b+1) \Gamma(c-a+1)}.$$

Теорема 2. Пусть $1 < p \leq 2$. Тогда при $u \rightarrow \infty$ имеет место соотношение:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \left\{ \left(\int_{\mathbf{K}^n} |W_0(t)|^p dt \right)^{1/p} > u \right\} \\ = \exp \left\{ -\frac{4^n u^2}{2\sigma^2} \right\} \frac{\sqrt{2}\sigma}{u 2^n \sqrt{\pi}} D_n^{-1/2} (1 + o(1)),\end{aligned}\quad (1.5)$$

где σ и D_n — те же, что и в теореме 1.

Точные асимптотики распределений супремумов гауссовских полей $W(t)$ и $W_0(t)$ выписаны, например, в работе [4], где описан так называемый метод двойных сумм, позволяющий вычислять асимптотики вероятностей подобного рода.

Отметим, что гильбертов случай $p = 2$ наиболее прост для исследования. Рассмотрим задачу вычисления асимптотики вероятности, стоящей слева в формуле (1.3), при $p = 2$. Пусть μ_k и $\varphi_k(t)$, $k \in \mathbf{N}^n$, $t \in \mathbf{K}^n$, — собственные числа и собственные функции ковариационного оператора A (или ковариационной функции $r(t, s)$), т.е.

$$\int_{\mathbf{K}^n} r(t, s) \varphi_k(s) ds = \mu_k \varphi_k(t).$$

Известно, что тогда семейство функций $\{\varphi_k(t)\}$ составляет ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{K}^n)$ и в силу равенства Парсеваля

$$\int_{\mathbf{K}^n} |W(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} \mu_k \xi_k^2, \quad (1.6)$$

где ξ_k , $k \in \mathbf{N}^n$, — семейство независимых стандартных гауссовских случайных величин. Собственные числа μ_k известны, они имеют вид $\mu_k = \mu_{1k_1} \mu_{1k_2} \cdots \mu_{1k_n}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n$, где (см. [8, с. 258])

$$\mu_{1j} = \frac{1}{\pi^2(j-1/2)^2}, \quad j \in \mathbf{N}$$

(известны также и собственные функции $\varphi_k(t)$, но их вид для нас не важен). Таким образом, в силу равенства (1.6)

$$\mathbf{P}\left\{\left(\int_{\mathbf{K}^n} |W(t)|^2 dt\right)^{1/2} > u\right\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{k \in \mathbf{N}^n} \mu_k \xi_k^2 > u^2\right\}. \quad (1.7)$$

Теперь для получения требуемого результата остается применить к последней вероятности известную формулу В. М. Золотарева, [9].

Вычисления показывают, что в качестве асимптотики для вероятности (1.7) мы получаем правую часть формулы (1.3), где нужно положить $p = 2$.

Те же самые рассуждения применимы к полю $W_0(t)$.

Это доказывает, что формулы (1.3) и (1.5) справедливы при $p = 2$.

2. Вспомогательные сведения

Здесь мы приводим фундаментальный результат (в нужной для нас форме), доказанный с помощью метода Лапласа для гауссовских мер в бесконечномерных пространствах; на основе этого результата можно доказывать утверждения типа теорем 1 и 2.

Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbf{K}^n$, — гауссовское поле с нулевым средним и п.н. непрерывными траекториями, $R(t, s) := \mathbf{E}\xi(t)\xi(s)$ — его ковариационная функция. Пусть $L^p = L^p(\mathbf{K}^n)$, $p > 1$, — обычное банахово пространство функций f , определенных на $\mathbf{K}^n$, с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbf{K}^n} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

В силу непрерывности поля $\xi(t)$ почти все его реализации принадлежат пространству непрерывных функций $\mathbf{C} = C(\mathbf{K}^n)$, а следовательно, и пространству L^p , $p > 1$, и мы вправе рассматривать $\xi(t)$ как случайный элемент со значениями в L^p , где он индуцирует гауссовскую меру P_ξ (распределение случайного элемента $\xi(t)$). Ясно, что, в силу непрерывности, мера P_ξ сосредоточена на пространстве $\mathbf{C}$.

Пусть

$$\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(t) y(t) dt$$

— двойственность между пространствами L^p и L^q , здесь и далее $q^{-1} + p^{-1} = 1$.

Ковариационный оператор (см. [10, гл. 3], [11]) $A = A_\xi: L^q \rightarrow L^p$ гауссовской меры P_ξ действует по правилу:

$$(Ax)(t) = \int_{\mathbf{K}^n} R(t, s) x(s) ds, \quad x(s) \in L^q. \quad (2.1)$$

Как известно, ковариационный оператор A является симметричным, т.е. $\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle$ для всех $x, y \in L^q$; положительным, т.е. $\langle Ay, y \rangle \geq 0$ для всех $y \in L^q$; ядерным (см. [10, с. 120, 143]).

Пусть $(H_A, \|\cdot\|_A)$ обозначает гильбертово пространство, ассоциированное с оператором A , т.е. пополнение области значений $R(A) := \{Ay: y \in L^q\}$ оператора A относительно предгильбертовой нормы $\|Ay\|_A := \sqrt{\langle Ay, y \rangle}$, $y \in L^q$ ([10, с. 126]). Скалярное произведение в H_A будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Отождествляя гильбертово пространство $H = H_A$ с его сопряженным H^* , мы имеем всюду плотные вложения

$$j: H \hookrightarrow L^p, \quad j^*: L^q \hookrightarrow H \quad (2.2)$$

(см. [10, с. 122, 123], [11, с. 63]), при этом справедлива теорема Н. Н. Вахании о факторизации: $A = jj^*$, здесь j^* — сопряженный к j оператор.

Определим функцию $G: L^p \rightarrow \mathbf{R}^1$ следующим образом:

$$G(x) := \int_0^1 |x(t)|^p dt - 1.$$

При $p > 1$ эта функция дважды дифференцируема по Фреше во всех точках множества $L^p \setminus \{0\}$ (см. [12]).

Обозначим через $G'(x) \in L^q$, $G''(x): L^p \rightarrow L^q$ первую и вторую производные по Фреше функции G в точке x .

Если x не входит в область определения $\text{Dom}(A^{-1})$ оператора A^{-1} , то будем полагать $\langle x, A^{-1}x \rangle = \infty$.

В этих обозначениях имеет место такое утверждение (см. [1], [2], [4]).

Предложение 1. Пусть $p > 1$. Пусть ковариационный оператор A инъективен, т.е. $\langle Ay, y \rangle > 0$ для всех $0 \neq y \in L^q$, и квадратичная форма $\langle x, A^{-1}x \rangle \geq 0$ достигает на множестве $D := \{x \in L^p: G(x) \geq 0\}$ своего минимума σ^{-2} в конечном числе точек $x^1, \dots, x^m$ из границы D , причем $\langle x^i, G'(x^i) \rangle \neq 0$, $i = 1, \dots, m$. Положим $\lambda = 1/(\sigma^2 p)$ (это число представляет собой множитель Лагранжа и с необходимостью положительно).

Пусть конечен и положителен определитель

$$\det B_i := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda \beta_n^i),$$

где $B_i := I - \lambda AG'''(x^i)$, $i = 1, \dots, m$, β_n^i — собственные значения оператора $AG'''(x^i): L^p \rightarrow L^p$, I — тождественный оператор в L^p .

Тогда имеет место равенство

$$x^i = \lambda AG'(x^i), \quad (2.3)$$

и справедливо асимптотическое соотношение при $u \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} P(uD) &= \mathbf{P}\left\{G\left(\frac{\xi}{u}\right) \geq 0\right\} = \mathbf{P}\left\{\left(\int_{\mathbf{K}^n} |\xi(t)|^p dt\right)^{1/p} > u\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^m |\det B_i \langle B_i^{-1}x^i, A^{-1}x^i \rangle|^{-1/2} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

3. Доказательство теоремы 1

Ниже рассматриваем только случай $1 < p < 2$.

Действовать будем по уже опробованной схеме (ср. [2], [3]), используя предложение 1. Один из важнейших этапов нахождения точной асимптотики в задачах типа исследуемых нами — это решение экстремальной задачи.

3.1. Решение экстремальной задачи. Ключевой момент здесь это решение нелинейного уравнения (2.3). Отметим, что уравнение (2.3) представляет собой необходимое условие экстремума, т.е., вообще говоря, среди его решений есть как функции, доставляющие минимум квадратической формы $\langle x, A^{-1}x \rangle$ из предложения 1, так и функции, не обладающие этим свойством (например, нулевая функция). В дальнейшем, говоря о решениях уравнения (2.3) или о минимизирующих функциях, мы будем иметь в виду только ненулевые функции. Для выделения минимизирующих функций (а это множество непусто в силу положительности оператора A^{-1}) можно использовать, например, известные достаточные условия минимума типа теоремы из п. 3.4.3 книги [13, с. 293]. Мы покажем, что в наших условиях множество минимизирующих функций состоит из двух функций.

Доказательства теорем 1 и 2 до определенного момента схожи, поэтому мы основное внимание уделим доказательству теоремы 1, указывая те изменения, которые нужно сделать для вывода теоремы 2. Положим $\xi = W$.

Известно, что при $p > 1$ введенная нами функция G имеет следующие производные по Фреше в точке $x \in L^p \setminus \{0\}$ (см. [12, с. 887]):

$$G'(x) = p|x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t) \in L^q, \quad (3.1)$$

и если дополнительно точка x такова, что $\int_{\mathbf{K}^n} |x(t)|^{p-2} dt < \infty$, то

$$G''(x)[y] = p(p-1) |x(t)|^{p-2} y(t) \in L^q, \quad y \in \mathbf{C}. \quad (3.2)$$

Напомним, что, в силу непрерывности траекторий рассматриваемых гауссовских полей, мы вправе брать ограничение оператора

$G''(x): L^p \rightarrow L^q$ на $\mathbf{C}$. Таким образом, с учетом формул (2.1) и (3.1), необходимое условие минимума (2.3) принимает вид (индекс i опущен):

$$x(t) = \lambda p \int_{\mathbf{K}^n} r(t, s) |x(s)|^{p-1} \operatorname{sign} x(s) ds \quad (3.3)$$

(функция $r(t, s)$ определена в (1.1)), условие связи имеет вид

$$\|x\|_p = 1. \quad (3.4)$$

Основная идея решения нелинейного интегрального уравнения Хаммерштейна (3.3) состоит в следующем.

Ковариационная функция $r(t, s)$ (ядро интегрального уравнения) может быть записана в виде произведения:

$$r(t, s) = \prod_{i=1}^n r_1(t_i, s_i), \quad (3.5)$$

где $r_1(t_i, s_i) = \min(t_i, s_i)$. Далее, при $n = 1$ уравнение (3.3) принимает вид (индекс 1 указывает на размерность):

$$x_1(t_1) = \lambda_1 p \int_{\mathbf{K}} \min(t_1, s_1) |x_1(s_1)|^{p-1} \operatorname{sign} x_1(s_1) ds_1. \quad (3.6)$$

Внимательный анализ показывает, что исследование уравнения (3.6), проведенное в работе [2] при $p > 2$, можно повторить почти дословно с тем же результатом и в ситуации, когда $1 < p < 2$. Таким образом, при $n = 1$, $1 < p < 2$, мы имеем два решения уравнения (3.3), для которых выполнено условие (3.4): $x_0(t_1)$ и $-x_0(t_1)$, причем функция $x_0(t_1)$ монотонно возрастает при $t_1 \in [0, 1]$, $x_0(0) = 0$ и $x_0(t_1) > 0$ для всех $0 < t_1 \leq 1$. Функция $x_0(t_1)$ удовлетворяет следующему соотношению, полученному в работе [2]:

$$x_0(t_1) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x_0^p(t_1)}{C_1}\right) = \sqrt{2\lambda_1 C_1} t_1, \quad t_1 \in [0, 1], \quad (3.7)$$

где $C_1 = 1 + p/2$, $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса,

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2p^2} \left(1 + \frac{p}{2}\right)^{(2-p)/p} \left[\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/2 + 1/p)} \right]^2. \quad (3.8)$$

Учитывая эти замечания, будем искать в случае общего $n > 1$ частные решения уравнения (3.3) в виде

$$x(t) = \prod_{i=1}^n x_i(t_i), \quad (3.9)$$

найдем их (одно из них окажется положительным, другое — отрицательным, равным по модулю первому), а затем, опираясь на развитую теорию нелинейных интегральных уравнения Хаммерштейна, докажем, что уравнение (3.3) имеет только одно положительное решение, которое мы обозначим через $x^0(t)$. Тогда несложно будет показать, что экстремальная задача из предложения 1 имеет всего два решения $x^0(t)$ и $-x^0(t)$.

Итак, подстановка (3.9) в (3.3) и (3.4), с учетом (3.5), дает:

$$\prod_{i=1}^n x_i(t_i) = \lambda p \prod_{i=1}^n \int_{\mathbf{K}} \min(t_i, s_i) |x_i(s_i)|^{p-1} \operatorname{sign} x_i(s_i) ds_i, \\ \prod_{i=1}^n \int_{\mathbf{K}} |x_i(t_i)|^p dt_i = 1.$$

Ясно, что решение последнего уравнения мы получим, взяв произведение решений n следующих уравнений:

$$x_i(t_i) = (\lambda p)^{1/n} \int_{\mathbf{K}} \min(t_i, s_i) |x_i(s_i)|^{p-1} \operatorname{sign} x_i(s_i) ds_i, \quad (3.10)$$

$i = 1, \dots, n$, удовлетворяющих условию нормировки

$$\int_{\mathbf{K}} |x_i(t_i)|^p dt_i = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Как видно, все эти n уравнений одинаковы. Запишем уравнение (3.10) для $i = 1$ в «каноническом» виде (т.е. типа (3.6)):

$$x_1(t_1) = \lambda_1 p \int_{\mathbf{K}} \min(t_1, s_1) |x_1(s_1)|^{p-1} \operatorname{sign} x_1(s_1) ds_1, \quad (3.12)$$

где

$$\lambda_1 = \lambda^{1/n} p^{1/n-1}. \quad (3.13)$$

Как было уже сказано, это уравнение имеет два решения, которые мы, по-прежнему, обозначим через $x_0(t_1)$ и $-x_0(t_1)$, причем $x_0(t_1)$ удовлетворяет уравнению (3.7) и условию (3.11), но уже с λ_1 , определяемым по формуле (3.13).

Таким образом, мы пришли к следующему утверждению.

Лемма 1. Уравнение (3.3) вместе с граничным условием (3.4) имеет два частных решения: одно — положительное,

$$x^0(t) = \prod_{i=1}^n x_0(t_i), \quad (3.14)$$

другое — отрицательное, $-x^0(t)$. Оба эти решения доставляют минимум в экстремальной задаче из предложения 1.

Соответствующие константы легко вычисляются: $\lambda = \lambda_1^n p^{n-1}$, где λ_1 определено в (3.8), и $\sigma^{-2} = \langle x^0, A^{-1}x^0 \rangle = \lambda p$.

Прежде чем найти оставшиеся величины из предложения 1, докажем, что экстремальная задача из предложения 1 не имеет других решений, кроме указанных выше $x^0(t)$ и $-x^0(t)$. Для этого нам понадобится следующее весьма тонкое и интересное утверждение из теории нелинейных интегральных уравнений (см. [14, с. 410, теорема 2.19]), которое мы сформулируем в удобном для нас виде.

Теорема 3. Пусть Π — компактное подмножество евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, имеющее положительную меру Лебега, пусть ядро $R(t, s)$ — положительная непрерывная по совокупности переменных $(t, s) \in \Pi \times \Pi$ функция, а $f(x)$, $x \geq 0$, — непрерывная функция, неотрицательная при $x \geq 0$ и строго положительная при $x > 0$. Предположим, что при $x > 0$ функция $f(x)$ не убывает и для некоторого $\alpha \in (0, 1)$ функция $f(x)/x^\alpha$ не возрастает. Тогда интегральное уравнение Хаммерштейна

$$x(t) = \int_{\Pi} R(t, s) f(x(s)) ds \quad (3.15)$$

имеет в $L^2(\Pi)$ единственное положительное (в широком смысле) решение $x^0(t)$.

Легко видеть, что теорема 3 применима к нашему уравнению (3.3) с функцией

$$f(x) = \lambda p |x|^{p-1} \operatorname{sign} x, \quad x \geq 0,$$

поскольку для $1 < p < 2$ найдется $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $p < 1 + \alpha < 2$, и, следовательно, функция $f(x)/x^\alpha = \lambda p x^{p-1-\alpha}$ не возрастает при $x > 0$.

Итак, в силу теоремы 3, уравнение (3.3) имеет единственное положительное решение $x^0(t) \geq 0$, которое задается равенством (3.14).

Прежде чем двигаться дальше, укажем на тесную связь нашего уравнения (3.3) и граничных задач математической физики. Рассуждая по индукции, несложно вычислить, что обратный оператор A^{-1} задается формулой

$$A^{-1}x(t) = (-1)^n \frac{\partial^{2n} x(t)}{\partial t_1^2 \cdots \partial t_n^2} \quad (3.16)$$

и определен на множестве функций, для которых правая часть имеет смысл. В терминологии теории дифференциальных операторов, A^{-1} есть гиперболический дифференциальный оператор (см., например, замечание 9.10 в [15, с. 243]). Таким образом, нелинейное интегральное уравнение Хаммерштейна (3.3) эквивалентно следующей гиперболиче-

ской граничной задаче:

$$\begin{cases} (-1)^n \frac{\partial^{2n} x(t)}{\partial t_1^2 \dots \partial t_n^2} = \lambda p |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \\ x(t) = 0, \quad t \in L, \\ \left. \frac{\partial x(t)}{\partial t_1} \right|_{t_1=1} = 0, \dots, \left. \frac{\partial x(t)}{\partial t_n} \right|_{t_n=1} = 0, \\ \dots, \end{cases} \quad (3.17)$$

где множество L определено перед теоремой 1, а дальнейшие граничные условия задаются требованием равенства нулю частных производных функции $x(t)$ вплоть до порядка $2n - 1$ при t , принадлежащем границе $\partial \mathbf{K}^n$. Эти граничные условия несложно записать в явной форме, но мы этого делать не будем ввиду громоздкости записи.

Насколько известно автору, в имеющейся литературе по граничным задачам математической физики задача, схожая с (3.17), рассматривалась лишь при $n = 2$ в книгах [15, с. 172, 185] и [16, с. 243, 246]. В [16, с. 243] указана возможность изучения вариационными методами следующей (линейной) граничной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 x(t)}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} + \lambda x(t) = f, & t \in \mathbf{K}^2, \\ x(t) = 0, & t \in \partial \mathbf{K}^2 \end{cases} \quad (3.18)$$

(f — заданная функция), которая соответствует гильбертову случаю $p = 2$ и $n = 2$. Точно такая же граничная задача с $f = 0$ (см. (4.4) ниже) естественно возникает при исследовании соответствующей асимптотики для поля $W_0(t_1, t_2)$ в случае $p = 2$. По-видимому, вряд ли возможно прямое решение задач типа (3.17), (4.4) без обращения к интегральным уравнениям с ядрами $r(t, s)$ и $r_0(t, s)$, при этом обратный переход от задачи (3.17) к уравнению (3.3) (вычисление функции Грина) совершенно не очевиден.

В книге [15] Я. Ю. Никитин дает решение задачи (3.18) при $f = 0$ и указывает на отсутствие информации о решениях нелинейных задач типа (3.17) и (4.4) даже для размерности $n = 2$ (см. [15, с. 175, 186]).

Все это говорит о сложности прямого нахождения всех решений уравнения (3.3) и выделения из них нужных нам экстремальных функций.

Мы пойдем обходным путем. Наряду с исходной экстремальной задачей

$$\mathcal{P}: \langle x, A^{-1}x \rangle \longrightarrow \min, \quad \|x\|_p \geq 1,$$

рассмотрим, в некотором смысле, двойственную к ней задачу

$$\mathcal{P}^*: \langle Ay, y \rangle \longrightarrow \max, \quad \|x\|_q \leq 1.$$

Справедливо следующее довольно общее утверждение.

Предложение 2. *Имеет место соотношение*

$$\min_{\{x \in L^p: \|x\|_p \geq 1\}} \langle x, A^{-1}x \rangle = \left(\max_{\{y \in L^q: \|y\|_q \leq 1\}} \langle Ay, y \rangle \right)^{-1} = \|A\|^{-1}, \quad (3.19)$$

причем число точек, доставляющих экстремум слева, не превосходит числа точек, доставляющих экстремум справа, кроме того,

$$\begin{aligned} &\text{если точка } z_0 \text{ доставляет минимум слева в (3.19),} \\ &\text{то точка } \frac{z_0}{|z_0|_A^2} \text{ доставляет максимум справа.} \end{aligned} \quad (3.20)$$

(На самом деле, число точек, доставляющих экстремум слева и справа в (3.19), одинаково, но это станет ясно немного позднее.)

Здесь $|z_0|_A$ — норма гильбертова пространства H_A . Соотношение типа (3.19), хорошо известно в теории больших уклонений гауссовских мер, см., например, [17, §12, с. 119, 120]. Ниже мы дадим его полное доказательство, устанавливая импликацию (3.20). Для этого напомним ([18, с. 184]) определение полярной M^0 множества M в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B}^*$ — сопряженное пространство, $\langle x, y \rangle^{\mathbf{B}}$ — двойственность между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^*$):

$$M^0 = \left\{ y \in \mathbf{B}^*: \sup_{x \in M} \langle x, y \rangle^{\mathbf{B}} \leq 1 \right\}.$$

Доказательство предложения 2. Второе равенство в (3.19) доказано, например, в [10, с. 121]. Докажем первое. Обозначим $S = \{x \in L^p: \|x\|_p \leq 1\}$. Поскольку опорной функцией к единичному шару S в банаховом пространстве L^p является норма $\|y\|_q$ сопряженного пространства ([18, с. 57]), то полярной к множеству S будет множество $S^0 = \{y \in L^q: \|y\|_q \leq 1\}$. Поэтому первое равенство в (3.19) равносильно следующему:

$$\min_{x \in L^p \setminus S} \langle x, A^{-1}x \rangle = \left(\max_{y \in S^0} \langle Ay, y \rangle \right)^{-1}. \quad (3.21)$$

В теории больших уклонений гауссовских мер доказывается (см. [4, лемма 3.4, с. 78]), что $\min_{x \in L^p \setminus S} \langle x, A^{-1}x \rangle = \min_{x \in (L^p \setminus S) \cap H} \langle x, A^{-1}x \rangle$, поэтому, учитывая плотные вложения (2.2), убеждаемся, что для доказательства (3.21) и (3.20) достаточно доказать следующий «гильбертовозначный» аналог равенства (3.21):

$$\min_{x \in H \setminus Q} |x|_A^2 = \left(\max_{y \in Q^0} |y|_A^2 \right)^{-1}, \quad (3.22)$$

где $Q = \{x \in H: \|x\|_p \leq 1\}$ и $Q^0 = \{y \in H: \|y\|_q \leq 1\}$ — его полярная.

Несложно видеть, что оба экстремума в (3.22) достигаются на границе, поэтому равенство (3.22) равносильно соотношению

$$\min_{x \in \partial Q} |x|_A^2 = \left(\max_{y \in \partial Q^0} |y|_A^2 \right)^{-1}, \quad (3.23)$$

здесь ∂Q — граница множества Q в H . Из геометрических соображений, с учетом того, что множества Q и Q^0 выпуклы и центрально-симметричны, следует, что точка $x_0 \in \partial Q$ доставляет минимум слева в (3.23), тогда и только тогда, когда точка $x_0/|x_0|_A^2 \in \partial Q^0$ доставляет максимум справа в (3.23). (Это свойство ярко иллюстрируется тем известным фактом, что в гильбертовом пространстве полярной шара радиуса $r > 0$ является шар радиуса $1/r$, поскольку $(rM)^0 = (1/r)M^0$ для любого выпуклого множества M , см. [19, с. 114, лемма 2.1, п. 2]), интересные примеры в конечномерном случае рассмотрены в [20, с. 58].)

Таким образом, если точка $x_0 \in \partial Q$ такова, что $\min_{x \in \partial Q} |x|_A^2 = |x_0|_A^2$, то для точки $x_0/|x_0|_A^2 \in \partial Q^0$ выполнено соотношение $\max_{y \in \partial Q^0} |y|_A^2 = |x_0|_A^{-2}$, и наоборот. Это доказывает соотношение (3.23), а вместе с ним и (3.19). Ясно, что экстремум слева в (3.19) может достигаться только на точках из множества $\text{Dom}(A^{-1}) \subset H$, в то время как экстремум справа в (3.19) может достигаться, вообще говоря, на точках из более широкого множества $\text{Dom}(A) \supset H$. Отсюда получаем включение (3.20). Предложение 2 доказано.

Лемма 2. *Экстремальная задача $\mathcal{P}^*$ имеет всего два решения, одно — положительное, y_0 , второе — отрицательное, $-y_0$.*

Доказательство леммы основано на теореме 3. Рассмотрим следующую экстремальную задачу, равносильную задаче $\mathcal{P}^*$:

$$-\langle Ay, y \rangle \rightarrow \inf, \quad \|x\|_q \leq 1. \quad (3.24)$$

Для решения этой задачи применим метод множителей Лагранжа, [13, с. 252]. Легко видеть, что функцию Лагранжа для задачи (3.24) можно записать в виде

$$\mathcal{L}(y) = -\langle Ay, y \rangle + \nu(\|y\|_q^q - 1), \quad y \in L^q,$$

где $\nu > 0$ — множитель Лагранжа. Условия стационарности и дополняющей нежесткости имеют, соответственно, вид

$$(Ay)(t) = 2\nu q |y(t)|^{q-1} \text{sign } y(t), \quad (3.25)$$

$$\|y\|_q = 1. \quad (3.26)$$

Сделаем замену переменных в уравнении (3.25) по формуле

$$z(t) = |y(t)|^{q-1} \text{sign } y(t) \in L^p;$$

как видим, знаки функций $z(t)$ и $y(t)$ во всех точках из $\mathbf{K}^n$ совпадают, совпадает также и множество нулей этих функций. Имеем

$$y(t) = |z(t)|^{1/(q-1)} \operatorname{sign} z(t) = |z(t)|^{p-1} \operatorname{sign} z(t),$$

и уравнение (3.25) и условие (3.26) принимают, соответственно, вид

$$z(t) = \frac{1}{2\nu q} A |z(t)|^{p-1} \operatorname{sign} z(t), \quad (3.27)$$

$$\|z\|_p = 1. \quad (3.28)$$

Таким образом, уравнение (3.27) с условием (3.28) фактически неотличимо от уже исследованного уравнения (3.3), взятого с условием (3.4). Поэтому, согласно теореме 3, уравнение (3.27) имеет единственное положительное решение $z_0(t)$, для которого при подходящем выборе ν выполнено условие (3.28), причем множество нулей функции $z_0(t)$ совпадает с множеством нулей функции $x^0(t)$ из (3.14) и равно множеству L . Но тогда $y_0(t) = [z_0(t)]^{p-1}$ будет единственным положительным решением уравнения (3.25), для которого при том же выборе ν выполнено условие (3.26). Множество нулей функции $y_0(t)$ также есть L .

Несложно убедиться, что функции y_0 и $-y_0$ доставляют максимум в задаче $\mathcal{P}^*$. Легко также видеть, что задача $\mathcal{P}^*$ не имеет знакопеременных решений. В самом деле, предположим, что знакопеременная функция $y_1(t)$ доставляет максимум в задаче $\mathcal{P}^*$, тогда положительная функция $y_2(t) = |y_1(t)|$, очевидно удовлетворяющая граничному условию, также доставляет максимум в задаче $\mathcal{P}^*$, ибо $\langle Ay_1, y_1 \rangle \leq \langle Ay_2, y_2 \rangle$, вследствие положительности ядра $r(t, s)$. Но тогда, в силу единственности положительного решения уравнения (3.25), $|y_1(t)| \equiv y_0(t)$. Таким образом, множества нулей функций $y_1(t)$ и $y_0(t)$ совпадают и равны множеству L . Значит, функция $y_1(t)$ является знакопостоянной внутри области $\mathbf{K}^n$, получаем противоречие. Лемма доказана.

Итак, экстремальные задачи $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ имеют одинаковое число решений — два.

На основании лемм 1, 2 и предложения 2 получаем следующее утверждение.

Предложение 3. Экстремальная задача

$$\mathcal{P}: \langle x, A^{-1}x \rangle \longrightarrow \min, \quad \|x\|_p \geq 1,$$

имеет только два решения: одно — положительное, $x^0(t) = \prod_{i=1}^n x_0(t_i)$, другое — отрицательное, $-x^0(t)$.

3.2. Вычисление оставшихся констант. Несложно убедиться, что константы из предложения 1 для экстремалей $x^0(t)$ и $-x^0(t)$ вычисляются одинаковым образом. Проведем вычисления для экстремали $x^0(t)$.

Вычисление определителя $\det(I - \lambda AG''(x^0))$. Найдем собственные числа β_k , $k = (k_1, \dots, k_n)$, оператора $AG''(x^0)$, соответствующие собственным функциям z_k . С этой целью рассмотрим уравнение (относительно β и z)

$$AG''(x^0)z = \beta z, \quad z \in L^p,$$

т.е. (см. (3.2))

$$\beta z(t) = p(p-1) \int_{\mathbf{K}^n} r(t, s) (x^0(s))^{p-2} z(s) ds. \quad (3.29)$$

Эта запись корректна при $z \in \mathbf{C}$, ибо, как нетрудно видеть,

$$\int_{\mathbf{K}^n} (x^0(t))^{p-2} dt < \infty.$$

В самом деле,

$$\int_{\mathbf{K}^n} (x^0(t))^{p-2} dt = \left(\int_0^1 (x_0(t_1))^{p-2} dt_1 \right)^n.$$

Но из уравнения (3.7) следует, что при $t_1 \rightarrow 0$ выполнено $x_0(t_1) = t_1 \sqrt{2\lambda_1 C_1} (1 + o(1))$, поэтому $\int_0^1 dt_1 / (x_0(t_1))^{2-p} < \infty$, так как $\int_0^1 (1/t_1^{2-p}) dt_1 = 1/(p-1)$, ибо $1 < p < 2$.

Мы решим уравнение (3.29) в пространстве $L^2(\mathbf{K}^n)$, при этом решения z_k окажутся непрерывными функциями, составляющими базис в $L^2(\mathbf{K}^n)$, а поскольку $L^2(\mathbf{K}^n)$ всюду плотно в $L^p(\mathbf{K}^n)$ при $1 < p < 2$, то уравнение (3.29) иных решений не имеет.

Как всегда в тех случаях, когда ядро $r(t, s)$ факторизуется, рассмотрим сначала одномерное уравнение

$$\beta_1 z_1(t_1) = [p(p-1)]^{1/n} \int_0^1 \min(t_1, s_1) (x_0(s_1))^{p-2} z_1(s_1) ds_1, \quad t_1 \in [0, 1].$$

Обозначив при $n = 1$ оператор A и функцию G через A_1 и G_1 соответственно, это уравнение можно записать в виде

$$\beta_1 [p(p-1)]^{1-1/n} z_1 = A_1 G_1''(x_0) z_1.$$

Здесь оператор $A_1 G_1''(x_0)$, будучи ядерным, компактен в $L^2[0, 1]$ и обладает полной ортонормированной последовательностью собственных функций $\{z_{1j}\}$ в $L^2[0, 1]$, которые были найдены в работе [2] и выражаются через полиномы Якоби, а именно, z_{1j} удовлетворяют уравнению

$$z_{1j}(t_1) = x_0(t_1) F\left(1-j, j + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x_0^p(t_1)}{C_1}\right),$$

$t_1 \in [0, 1]$, $j = 1, 2, \dots$. Соответствующие собственные числа имеют вид

$$\beta_{1j} = \frac{(p-1)^{1/n}}{2\lambda_1 p^{2-1/n} (j-1/2)(j-1+1/p)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Здесь F , C_1 и λ_1 те же, что и в (3.7), (3.8).

Известный факт анализа состоит в том, что если последовательность $\{z_{1j}\}$ составляет базис в $L^2[0, 1]$, то последовательность $\{z_k(t)\}$, где $z_k(t) = z_{1k_1}(t_1)z_{1k_2}(t_2) \cdots z_{1k_n}(t_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, составляет базис в $L^2(\mathbf{K}^n)$. Вследствие факторизации ядра $r(t, s)$ убеждаемся, что уравнение (3.29) имеет последовательность решений: функций $z_k(t)$ и чисел $\beta_k = \beta_{1k_1}\beta_{1k_2} \cdots \beta_{1k_n}$, которые и исчерпывают все множество собственных функций и собственных чисел оператора $AG''(x^0)$.

Теперь, используя равенство (3.13) и вводя величины α_j , получим нужные константы в формулах (1.3) и (1.4), после того как найдем величину $\langle B^{-1}x^0, A^{-1}x^0 \rangle$, где $B = I - \lambda AG''(x^0)$. Но легко видеть, что $AG'''(x^0)x^0 = \beta_{11}^n x^0$, поэтому

$$\langle B^{-1}x^0, A^{-1}x^0 \rangle = \frac{\sigma^{-2}}{1 - \lambda\beta_{11}^n}.$$

Очевидно, что знаменатель здесь равен первому множителю (когда $k_1 = \dots = k_n = 1$) в формуле для определителя $\det B$.

Теорема 1 полностью доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть $1 < p < 2$. Схема доказательства здесь такая же, как и выше. Мы укажем на основные детали. Пусть A_0 — ковариационный оператор гауссовской меры P_{W_0} . Теперь интегральное уравнение $x = \lambda_0 A_0 G'(x)$ имеет вид

$$x(t) = \lambda_0 p \int_{\mathbf{K}^n} r_0(t, s) |x(s)|^{p-1} \operatorname{sign} x(s) ds, \quad (4.1)$$

где функция $r_0(t, s)$ определена в (1.2), условие связи — прежнее:

$$\|x\|_p = 1. \quad (4.2)$$

Несложно видеть, что оператор A_0^{-1} , по-прежнему, задается формулой

$$A_0^{-1}x(t) = (-1)^n \frac{\partial^{2n} x(t)}{\partial t_1^2 \cdots \partial t_n^2} \quad (4.3)$$

и определен на множестве функций, для которых правая часть имеет смысл. Но теперь нелинейное интегральное уравнение Хаммерштейна (4.1) эквивалентно гиперболической граничной задаче с другими краевыми условиями:

$$\begin{cases} (-1)^n \frac{\partial^{2n} x(t)}{\partial t_1^2 \cdots \partial t_n^2} = \lambda_0 p |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \\ x(t) = 0, \quad t \in \partial \mathbf{K}^n. \end{cases} \quad (4.4)$$

Аналогично предложению 3 доказывается следующее утверждение.

Предложение 4. Экстремальная задача из предложения 1

$$\langle x, A_0^{-1}x \rangle \longrightarrow \min, \quad \|x\|_p \geq 1,$$

имеет только два решения: одно — положительное, $v^0(t) = \prod_{i=1}^n v_0(t_i)$, другое — отрицательное, $-v^0(t)$.

Здесь функция $v_0(t_1)$ удовлетворяет уравнению

$$x_1(t_1) = \lambda_{10} p \int_0^1 [\min(t_1, s_1) - t_1 s_1] |x_1(s_1)|^{p-1} \operatorname{sign} x_1(s_1) ds_1, \quad (4.5)$$

где, как и ранее, $\lambda_{10} = \lambda_0^{1/n} p^{1/n-1}$. Уравнение (4.5) решается аналогично уравнению (3.6) и имеет два решения, которые удовлетворяют также условию связи $\int_0^1 |x_1(t_1)|^p dt_1 = 1$. Первое — это функция $v_0(t_1)$, которая положительна, симметрична относительно точки $t_1 = \frac{1}{2}$: $v_0(t_1) = v_0(1 - t_1)$ для $t_1 \in [0, \frac{1}{2}]$, строго монотонно возрастает на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$, имеет максимум в точке $\frac{1}{2}$, обращается в нуль только в точках 0 и 1 и удовлетворяет следующему соотношению:

$$v_0(t_1) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{v_0^p(t_1)}{C_1}\right) = \sqrt{2\lambda_{10}C_1} t_1, \quad t_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

где $C_1 = 1 + p/2$. Второе решение уравнения (4.5) есть $-v_0(t)$.

Единственность решений $v^0(t)$ и $-v^0(t)$ уравнения (4.1), взятого вместе с условием (4.2), доказывается точно так же, как и выше, на основе теоремы 3 и аналога предложения 2 (где надо всего лишь заменить A на A_0), так как ядро $r_0(t, s)$, по-прежнему, неотрицательно.

Оставшаяся часть доказательства теоремы 1 повторяется почти дословно. Мы отметим только, что в случае теоремы 2 минимальное значение $\sigma_0^{-2} := \langle y^0, A_0^{-1}y^0 \rangle = 4^n \sigma^{-2}$, а также, что $\lambda_{10} = 4\lambda_1$, $\lambda_0 = 4^n \lambda$, где σ^{-2} , λ_1 и λ — величины из теоремы 1. Собственные числа оператора $A_0 G'''(y^0)$ здесь такие же, как и в теореме 1.

Теорема 2 доказана.

В заключение сделаем несколько замечаний о выводе возможных аналогов теорем 1 и 2 в случаях $p = 1$ и $p > 2$. Из имеющихся работ по данному вопросу укажем статьи Шеппа [21] и Райса [22], где при $n = 1$ авторы использовали метод преобразования Лапласа для исследования распределения случайной величины $\int_0^1 |W_0(t)| dt$, получив при этом громоздкие формулы, малоудобные для применений. Используя принцип больших уклонений (см., например, [4, с. 67, следствие 2.1]), несложно для любого $n \geq 1$ вычислить следующие логарифмические асимптотики:

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{P} \left\{ \int_{\mathbf{K}^n} |W(t)| dt > u \right\} &= -\frac{3^n u^2}{2} (1 + o(1)), \\ \ln \mathbf{P} \left\{ \int_{\mathbf{K}^n} |W_0(t)| dt > u \right\} &= -\frac{12^n u^2}{2} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

см. также [15, с. 81].

В имеющейся литературе по интегральным уравнениям, по-видимому, отсутствует аналог теоремы 3 в случае $p > 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаталов В. Р. Точные асимптотики больших уклонений для гауссовских мер в гильбертовом пространстве. — Изв. АН Армении, сер. матем., 1992, т. 27, № 5, с. 43–57.
2. Фаталов В. Р. Большие уклонения гауссовских мер в пространствах l^p и L^p , $p \geq 2$. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 682–689.
3. Фаталов В. Р. Большие уклонения L^p -нормы винеровского процесса со сносом. — Матем. заметки, 1999, т. 65, № 3, с. 429–436.
4. Питербарг В. И., Фаталов В. Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 6, с. 57–150.
5. Ellis R. S., Rosen J. S. Asymptotic analysis of Gaussian integrals. I: Isolated minimum points; II: Manifold of minimum points. — Trans. Amer. Math. Soc., 1982, v. 273, № 2, p. 447–481; Comm. Math. Phys., 1981, v. 82, p. 153–181.
6. Боровков А. А., Могульский А. А. О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах. I, II. — Сиб. матем. журн., 1978, т. 19, № 5, с. 988–1004; 1980, т. 21, № 5, с. 12–26.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981, 798 с.
8. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977, 568 с.
9. Золотарев В. М. Об одной вероятностной задаче. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, в. 2, с. 219–222.
10. Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с.
11. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979, 175 с.
12. Bonic R., Frampton J. Smooth functions on Banach manifolds. — J. Math. Mech., 1966, v. 15, № 5, p. 877–898.
13. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
14. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Митлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 448 с.
15. Никитин Я. Ю. Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. М.: Наука, 1995, 238 с.
16. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 372 с.
17. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТВиМС, 1995.
18. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
19. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977, 742 с.
20. Лейтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985, 335 с.
21. Shepp L. A. On the integral of the absolute value of the pinned Wiener process. — Ann. Probab., 1982, v. 10, № 1, p. 234–239; Acknowledgment of priority. — ibid., 1991, v. 19, № 3, p. 1397.
22. Rice S. O. The integral of the absolute value of the pinned Wiener process — calculation of its probability density by numerical integration. — Ann. Probab., 1982, v. 10, № 1, p. 240–243.

Поступила в редакцию
11.IX.2000