Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Бахтин, Существование и единственность стационарного решения нелинейного стохастического дифференциального уравнения с памятью, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 4, 764–768

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:33:35

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2002 г.

БАХТИН Ю. Ю.*

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ¹⁾

Получены достаточные условия для существования и единственности стационарного решения нелинейного стохастического дифференциального уравнения, коэффициент сноса которого является нелинейным функционалом от прошлого.

Ключевые слова и фразы: стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием, гиббсовская динамика.

1. Введение. В этой работе доказывается теорема существования и единственности стационарной меры для нелинейного стохастического дифференциального уравнения, коэффициенты которого зависят от всей траектории решения в прошлом. Интерес к этой проблеме вызван недавними работами [1], [2], в которых рассмотрены нелинейные гидродинамические уравнения Навье–Стокса, возмущенные внешней силой типа белого шума, и показано, что эта стохастическая дифференциальная марковская динамика в бесконечномерном пространстве может быть сведена к случайной динамике в пространстве конечной размерности. Платой за этот переход является существенная немарковость возникающих конечномерных систем. Таким образом, важная проблема существования и единственности инвариантной меры для стохастических уравнений гидродинамики оказывается тесно связанной с существованием и единственностью стационарных решений конечномерных стохастических дифференциальных уравнений, у которых коэффициент сноса обладает бесконечной памятью. Некоторые результаты о существовании и единственности стационарных решений получены в работе [3]. В первой части данной работы мы вводим необходимые понятия и формулируем основной результат, а во второй части мы доказываем основной результат, сочетая подход [3] с интересным методом доказательства единственности, предложенным в [1] и [2] для рассматривавшихся там задач.

Мы изучаем стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t) = a(\pi_t X) dt + dW(t). \quad (1)$$

Здесь $W(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — стандартный d -мерный винеровский процесс (т.е. гауссовский случайный процесс с непрерывными траекториями в $\mathbf{R}^d$, определенный на $\mathbf{R}$, обладающий независимыми и стационарными приращениями и удовлетворяющий равенствам $W(0) = 0$, $\mathbf{E}W(t) = 0$, $\mathbf{E}(W(t))^2 = |t|$, $t \in \mathbf{R}$), а π_t — отображение из пространства C непрерывных функций, определенных на $\mathbf{R}$ и принимающих значения в $\mathbf{R}^d$, в пространство C_- непрерывных функций, определенных на $\mathbf{R}_- = (-\infty, 0]$:

$$\pi_t X(s) = X(s+t), \quad s \in \mathbf{R}_-.$$

* Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, Варшавское ш., 79, 113556 Москва, Россия; e-mail: bakhtin@ztel.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00131).

Левая часть будет играть роль прошлого траектории непрерывного процесса, удовлетворяющего уравнению (1), к моменту времени $t \in \mathbf{R}$. Будем считать, что $a(\cdot): C_- \rightarrow \mathbf{R}^d$ — непрерывный функционал относительно метрики

$$\rho_-(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\|f - g\|_n \wedge 1), \quad f, g \in C_-,$$

задающей топологию равномерной сходимости на компактах, где $\|h\|_n = \max_{-n \leq t \leq 0} |h(t)|$, а $|\cdot|$ обозначает евклидову норму.

Для случайного процесса X и множества $A \subset \mathbf{R}$ будем обозначать $\sigma_A(X)$ наименьшую σ -алгебру, относительно которой измеримы величины $X(s)$, $s \in A$, а $\sigma_A(dX)$ — наименьшую σ -алгебру, относительно которой измеримы величины $X(s) - X(t)$, $s, t \in A$.

Рассмотрим пространство $\Omega = C \times C$ с метрикой, аналогичной введенной выше метрике ρ_- . Будем говорить, что вероятностная мера P на пространстве Ω с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}$ задает решение уравнения (1) на всей временной оси, если следующие три условия выполнены относительно меры P .

1. Индуцированное проекцией $W: C \times C \rightarrow C$, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_2$, распределение вероятностей является стандартным d -мерным винеровским процессом.

2. При любом $t \in \mathbf{R}$

$$\sigma_{(-\infty, t]}(X) \vee \sigma_{(-\infty, t]}(dW) \quad \text{не зависит от} \quad \sigma_{[t, \infty)}(dW). \quad (2)$$

Здесь и далее $X: C \times C \rightarrow C$, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1$.

3. Если $s < t$, то

$$X(t) - X(s) \stackrel{n.н.}{=} \int_s^t a(\pi_\theta X) d\theta + W(t) - W(s). \quad (3)$$

Если вдобавок распределение процесса

$$(X, dW) \equiv (X(t), -\infty < t < \infty, W(v) - W(u), -\infty < u < v < \infty)$$

инвариантно относительно сдвигов по времени, то будем говорить, что мера P задает стационарное решение.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. Пусть коэффициент сноса $a(\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям.

1. При некоторых постоянных $K > 0$, $\lambda > 0$

$$|a(x_-) - a(y_-)| \leq K \int_{-\infty}^0 e^{\lambda t} |x_-(t) - y_-(t)| dt \quad (4)$$

для любых $x_-, y_- \in C_-$ таких, что интеграл, стоящий в правой части, конечен и $x_-(0) = y_-(0)$.

2. Существуют такие константы $C_1 \geq 0$ и $C_2 > 0$, что

$$(a(x_-), x_-(0)) \leq C_1 - C_2 |x_-(0)|^2, \quad x_- \in C_-. \quad (5)$$

3. Существует такая константа $C_3 > 0$, что

$$|a(x_-)| \leq C_3 |x_-(0)|, \quad x_- \in C_-. \quad (6)$$

Тогда на пространстве $C \times C$ существует вероятностная мера, задающая стационарное решение уравнения (1). Эта мера единственна в классе мер, для которых почти все реализации X обладают следующим свойством:

$$|X(t)| \leq K' e^{\lambda' |t|}, \quad t \leq 0. \quad (7)$$

Здесь $K' \in \mathbf{R}$ и $\lambda' \in (0, \lambda)$ — числа, зависящие от реализации X .

2. Доказательство основного результата. Сначала докажем существование хотя бы одного стационарного решения с помощью приема Крылова–Боголюбова. Будем говорить, что распределение в $C \times C$ задает решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $x_- \in C_-$, если оно удовлетворяет следующим условиям: W является стандартным винеровским процессом; для произвольного $t \in \mathbf{R}$ выполнено соотношение (2); при $s = 0$ и любом $t > 0$ выполнено соотношение (3); при любом $t < 0$ верно равенство $X(t) = x_-(t)$. Теорема существования для решения задачи Коши доказана в [3].

Пусть P_0 обозначает упомянутое распределение, построенное по начальному условию, тождественно равному нулю, а P_s — временной сдвиг этого распределения на s единиц, т.е. решение задачи Коши при нулевом начальном условии, заданном на интервале $(-\infty, s]$, $s \in \mathbf{R}$. Более точно, $P_s = P_0 \theta_s^{-1}$, где $\theta_s(f, g) = (\tilde{f}, \tilde{g})$, $\tilde{f}(t) = f(t - s)$, $\tilde{g}(t) = g(t - s) - g(-s)$.

Так как $P_s(E)$ — измеримая по s функция при любом $E \in \mathcal{B}$ (см. [3]), то при $T > 0$ можно определить вероятностную меру

$$Q_T(\cdot) = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 P_s(\cdot) ds$$

на $(\Omega, \mathcal{B})$. Мы покажем, что семейство мер $\{Q_T\}$ плотно. Согласно теореме 12.3 книги [4], для доказательства плотности последовательности мер $\{Q_T\}$ достаточно проверить, что соответствующие одномерные распределения образуют плотную последовательность и существуют неубывающая непрерывная функция F и постоянные $\gamma \geq 0$, $\alpha > 1$, $z_0 > 0$ такие, что при всех $z \in (0, z_0)$, любых $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ и произвольном $s \geq 0$ выполнено неравенство

$$Q_T\{|X(t_2) - X(t_1)| \geq z\} \leq z^{-\gamma} |F(t_2) - F(t_1)|^\alpha.$$

Введем марковские моменты $\tau_r = \inf\{t: |X(t)| \geq r\}$ и $\tau_r(t) = t \wedge \tau_r$. Тогда из формулы Ито следует, что при $T > 0$ следующее соотношение выполняется P_0 -п.н.:

$$X^2(\tau_r(T)) = 2 \int_0^{\tau_r(T)} (a(\pi_\theta X), X(\theta)) d\theta + 2 \int_0^{\tau_r(T)} (X(\theta), dW(\theta)) + \tau_r(T).$$

Беря математическое ожидание от обеих частей этого равенства, переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$, пользуясь регулярностью решения ($\tau_r \rightarrow \infty$ п.н. при $r \rightarrow \infty$) и конечностью второго момента решения, установленными в [3], а также неравенством (5), получаем, что при любом $S \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{P_0} |X(T)|^2 &\leq (2C_1 + 1)T - 2C_2 \int_0^T \mathbf{E}_{P_0} |X(\theta)|^2 d\theta \\ &\leq (2C_1 + 1)T - 2C_2 \int_{S-T}^S \mathbf{E}_{P_\eta} |X(S)|^2 d\eta. \end{aligned}$$

Переносим последнее слагаемое в левую часть и деля обе части получившегося неравенства на T , можно получить, что для некоторой константы $M > 0$ справедлива оценка

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{t \in [-S, S]} \mathbf{E}_{Q_T} |X(t)|^2 \leq M \quad \text{при всех } S > 0. \quad (8)$$

Оценим теперь приращения процесса X :

$$\begin{aligned} Q_T\{|X(t_2) - X(t_1)| > z\} &\leq Q_T\{|W(t_2) - W(t_1)| > \frac{z}{2}\} + Q_T\left\{\int_{t_1}^{t_2} a(\pi_\theta X) d\theta > \frac{z}{2}\right\} \\ &\leq 16z^{-4} \mathbf{E}_{Q_T} |W(t_2) - W(t_1)|^4 + 4z^{-2} \mathbf{E}_{Q_T} \left(\int_{t_1}^{t_2} a(\pi_\theta X) d\theta\right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Пользуясь неравенством (6), теоремой Фубини и элементарным неравенством $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$, а также известным выражением для моментов гауссовских величин, последнее неравенство можно продолжить:

$$Q_T\{|X(t_2) - X(t_1)| > z\} \leq 48z^{-4} |t_2 - t_1|^2 + 4C_3^2 z^{-2} M |t_2 - t_1|^2. \quad (10)$$

Теперь плотность семейства проекций $\{Q_T X^{-1}\}$ мер Q_T на первую компоненту, а стало быть, и семейства самих мер Q_T следует из неравенств (8) и (10).

Значит, $Q_{T_n} \xrightarrow{\text{Law}} Q_\infty$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторой последовательности $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$, и из результатов [3] следует, что Q_∞ задает стационарное решение уравнения (1).

Лемма 1. Для любого $\delta > 0$ следующая оценка верна P -п.н.:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |X_t| |t|^{1/2+\delta} = 0.$$

Доказательство. Из оценки для меры P , аналогичной оценке (10), легко вывести, что для любого $s \in \mathbf{R}$

$$P\left\{\max_{t \in [s, s+1]} |X(t)| > Kz\right\} \leq P\{X(s) > z\} + P\{X(s+1) > z\} + C(z^{-2} + z^{-4})$$

при достаточно больших значениях констант $K, C > 0$. Из этого соотношения с помощью неравенства Чебышева и равномерной ограниченности второго момента $X(t)$ по $t \in \mathbf{R}$ получаем, что при произвольном $\delta_0 \in (0, \delta)$ сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left\{\max_{t \in [-n-1, -n]} |X(t)| > K n^{1/2+\delta_0}\right\},$$

и утверждение леммы следует из леммы Бореля–Кантелли.

Из этой леммы следует, в частности, что реализации процесса X удовлетворяют условию (7) P -п.н.

Переходим к доказательству единственности. Рассмотрим произвольную меру P , задающую стационарное решение уравнения (1), такую, что реализации процесса X удовлетворяют условию (7) P -п.н. Введем пространство C_+ непрерывных функций, определенных на $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ и принимающих значения в $\mathbf{R}^d$. Для $x_- \in C_-$ обозначим P_{x_-} меру на $\Omega_+ = C_+ \times C_+$, задающую решение задачи Коши с начальным условием x_- и являющуюся регулярным условным распределением меры P при условии $X_- = x_-$.

Лемма 2. Из условия 1 теоремы 1 следует, что существует множество $A \subset C_-$ такое, что $P\{\pi_0 X \in A\} = 1$ и если $x_-, y_- \in A$ и $x_-(0) = y_-(0)$, то меры P_{x_-} и P_{y_-} эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим $x_-, y_- \in C_-$ такие, что каждая из этих функций допускает оценку типа (7). Чтобы доказать, что P_{y_-} абсолютно непрерывна относительно P_{x_-} , воспользуемся теоремой Гирсанова и проверим условие Новикова (см., например, [5, гл. 8]). Аналогичные рассуждения будут верны и с заменой x_- на y_- и наоборот. Условие Новикова записывается как

$$\mathbf{E}_{P_{x_-}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left| a(\pi_t X) - a(\pi_t(\widehat{yX})) \right|^2 dt \right\} < \infty, \quad (11)$$

где

$$\widehat{yX}(s) = \begin{cases} y_-(s), & s < 0, \\ X(s), & s \geq 0. \end{cases}$$

Из условия (7) следует, что для некоторых констант $K' > 0$ и $\lambda' \in (0, \lambda)$ верно неравенство $|x_-(s) - y_-(s)| \leq K' e^{\lambda'|s|}$, и условие (4) влечет

$$\left| a(\pi_t X) - a(\pi_t(\widehat{yX})) \right| \leq K \int_0^\infty |x_-(s) - y_-(s)| e^{\lambda(s-t)} ds \leq K K' e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{(\lambda - \lambda')s} ds \leq L e^{-\lambda t}$$

для некоторой константы $L > 0$. Поэтому в (11) стоит ожидать ограниченной случайной величины. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует лемма 3.

Лемма 3. Для $P\{X(0) \in \cdot\}$ -почти всех $l \in \mathbf{R}^d$ мера $P\{\pi_0^+ X \in \cdot \mid X(0) = l\}$ содержит компоненту, эквивалентную мере $P\{\pi_0^+ X \in \cdot \mid \pi_0 X \equiv l\}$. Здесь $\pi_t^+ X(s) = X(s+t)$, $s \in \mathbf{R}_+$.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Лемма 4. Существует множество $A_- \subset C_-$ такое, что $P\{\pi_0 X \in A_-\} = 1$ и при $x_- \in A_-$ проекция меры P_{x_-} на пространство $\Omega_{[0,T]}$ непрерывных функций, определенных на конечном отрезке $[0, T]$ и принимающих значения в $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$, эквивалентна распределению стандартного винеровского процесса в $\mathbf{R}^{2d}$, выпущенного из точки $(x_-(0), 0)$.

Пусть $R_{T,x_-}(\cdot)$ — ограничение этой меры на множества вида $\{z \in \Omega_{[0,T]} \mid z(T) \in B\}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{2d})$. Так как ограничения эквивалентных мер на σ -подалгебру также эквивалентны между собой, то $R_{T,x_-}(\cdot)$ эквивалентна невырожденной гауссовской мере в $\mathbf{R}^{2d}$, а стало быть, лебеговой мере. Отсюда и из стационарности процесса X вытекает следующая лемма.

Лемма 5. При любом $t \in \mathbf{R}$ мера $P\{X(t) \in \cdot\}$ обладает компонентой, эквивалентной мере Лебега.

Приводимое далее доказательство единственности меры, задающей стационарное решение уравнения (1), основано на доказанных леммах и является модификацией рассуждений из [1]. Пусть найдутся две различные эргодические меры $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$, задающие стационарное решение (1). Подберем ограниченный функционал F , разделяющий меры $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$, т.е.

$$\bar{F}_1 = \mathbf{E}_{P^{(1)}} F((X, W)) \neq \mathbf{E}_{P^{(2)}} F((X, W)) = \bar{F}_2,$$

и такой, что если $x(s) = y(s)$, $s \in [0, S]$ при некотором $S > 0$, то $F(x) = F(y)$.

Тогда существуют множества $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ такие, что $P^{(i)}(B_i) = 1$ и

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\theta_s(X, W)) ds = \bar{F}_i \quad \text{на } B_i, \quad i = 1, 2.$$

Но по леммам 3 и 5

$$P^{(2)}(B_1) = \int_{\mathbf{R}^d} P^{(2)}\{B_1 \mid X(0) = l\} P^{(2)}\{X(0) \in dl\} > 0.$$

Поэтому

$$P^{(2)}(B_1 \cap B_2) > 0 \quad \text{и} \quad B_1 \cap B_2 \neq \emptyset,$$

что противоречит предположению $\bar{F}_1 \neq \bar{F}_2$. Теорема полностью доказана.

Автор благодарит академика Я. Г. Синая за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E W., Mattingly J. C., Sinai Ya. G. Gibbsian dynamics and ergodicity for the stochastically forced 2D Navier–Stokes equation. — Comm. Math. Phys., 2001, v. 224, № 1, p. 83–106.
2. E W., Liu D. Gibbsian dynamics and invariant measures for stochastic dissipative PDEs. — J. Statist. Phys., 2002, v. 108, № 5/6, p. 926–953.
3. Itô K., Nisio M. On stationary solutions of a stochastic differential equation. — J. Math. Kyoto Univ., 1964, v. 4, p. 1–75.
4. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М: Наука, 1977, 352 с.
5. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1994, 560 p.

Поступила в редакцию
25.I.2002