Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Богатырев, Неравномерная оценка погрешности
в коротких асимптотических разложениях в гильбер-
товом пространстве, *Теория вероятн. и ее примен.*,
2002, том 47, выпуск 4, 769–772

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:30:35

© 2002 г.

БОГАТЫРЁВ С. А.*

НЕРАВНОМЕРНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ В КОРОТКИХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассматриваются короткие асимптотические разложения вероятности попадания суммы независимых случайных элементов в шар гильбертова пространства. Получена оценка погрешности разложения, оптимальная по числу слагаемых и зависящая лишь от двенадцати наибольших собственных значений ковариационного оператора отдельного слагаемого. Погрешность убывает при увеличении расстояния между границей шара и нулевым элементом.

Ключевые слова и фразы: короткие асимптотические разложения, гильбертово пространство, неравномерные оценки.

1. Основные обозначения и формулировка результата. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные элементы (с.э.), принимающие значения в сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве H . Далее $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение и $|\cdot| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ — норму в H .

Будем считать, что $\mathbf{E}|X_1|^2 < \infty$, и пусть V — ковариационный оператор с.э. X_1 . Далее, не ограничивая общности, предполагаем, что $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}|X_1|^2 = 1$. Положим $S_n = n^{-1/2}(X_1 + \dots + X_n)$.

Через Y будем обозначать гауссовский с.э. с нулевым средним и ковариационным оператором V . Здесь и далее, если обратное не следует из контекста, считаем все с.э. независимыми в совокупности. Пусть $e_1, e_2, \dots$ — ортонормированный базис из собственных векторов оператора V и $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots$ — соответствующие собственные значения.

Определим для любых $a \in H$ и $r \geq 0$ погрешность

$$\Delta_n(a, r) = \left| \mathbf{P}\{|S_n - a| < r\} - \mathbf{P}\{|Y - a| < r\} - n^{-1/2}F_1(r^2) \right|,$$

где $n^{-1/2}F_1(r^2)$ — первый член асимптотического разложения типа Эджворта функции $F(x) = \mathbf{P}\{|S_n - a|^2 < x\}$, т.е. $F_1(-\infty) = 0$ и преобразование Фурье–Стилтьеса функции $n^{-1/2}F_1(r^2)$ равно

$$\hat{F}_1(t) = -\frac{2}{3\sqrt{n}} t^2 \mathbf{E} \exp\{it|Y - a|^2\} (3(X_1, Y - a)|X_1|^2 + 2it(X_1, Y - a)^3).$$

Аппроксимации с использованием первого поправочного члена рассматривались рядом авторов (см. подробную библиографию в [3]). Отметим здесь только, что первые правильный порядок n^{-1} был получен Бенткусом и Гётце в [1]. Гётце и Ульянов в [3] уточнили результат [1]. Оценка в [3] зависит от оптимального числа (двенадцати) наибольших собственных значений V . Как в работе [1], так и в [3] авторы фактически оценивали $\sup_r \Delta_n(a, r)$. Приведенный ниже результат показывает, что погрешность $\Delta_n(a, r)$ убывает не только при росте числа слагаемых в S_n , но и при увеличении $s = |r - |a||$ — расстояния между границей шара и нулем в H .

Положим $\Lambda_k(V) = (\sigma_1 \dots \sigma_k)^{-1}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Найдется такая абсолютная постоянная c , что*

$$\Delta_n(a, r) \leq c \cdot c_{12}(V) \cdot \frac{1 + |a|^6}{(1 + s)^4} \frac{\beta_4}{n}, \quad (1.1)$$

где $c_{12}(V) \leq \sigma_9^{-20} \Lambda_9(V) + \Lambda_{12}(V) + \sigma_{12}^{-2} \Lambda_9^{8/9}(V)$, $\beta_4 = \mathbf{E}|X_1|^4$.

Данный результат является уточнением оценки в [2].

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: sbogatyrev@hotmail.com

2. Доказательство теоремы. Всюду ниже s (с индексом или без) обозначает абсолютную константу (не обязательно одну и ту же в разных местах).

Доказательство теоремы достаточно объемно и здесь будет приведено кратко. Прежде чем привести само доказательство, сформулируем основные его идеи.

Доказательство проводится методом характеристических функций. Основные приемы этого метода, необходимые для обоснования (1.1), см. в [7], [4], [5], [3]. Наиболее активно используются следствие 12 из [4] и теорема 1.2 из [3]. Отметим, что при выводе (1.1) используется ряд модификаций следствия 12, но для простоты изложения везде ниже мы ссылаемся на работу [4].

Усечения. Положим $\bar{X}_j = X_j I(|X_j| \leq \sqrt{n})$, $j = 1, \dots, n$. Здесь $I(A)$ — индикатор события A . Стандартные приемы (см., например, [4]) позволяют свести вывод (1.1) к случаю, когда S_n заменено на $\bar{S}_n$, где $\bar{S}_n = n^{-1/2}(\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n)$.

Промежуточные случайные элементы. Наряду с $X_1, \dots, X_n$ введем одинаково распределенные с.э. $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n$. При этом $\bar{Z}_1$ распределен так же, как $\zeta(\bar{X}_1 - \mathbf{E}\bar{X}_1) + Y_1$, где Y_1 — гауссовский с.э. с нулевым средним и ковариационным оператором $V/2$, ζ — действительная случайная величина (с.в.) такая, что $\mathbf{E}\zeta = 0$, $\mathbf{E}\zeta^2 = \frac{1}{2}$, $\mathbf{E}\zeta^3 = 1$; ζ , $\bar{X}_1$ и Y_1 независимы.

Введенные здесь с.э. удобны тем, что моменты первых трех порядков с.э. $\bar{X}_1$ и $\bar{Z}_1$ близки при больших n . Подробнее см. лемму 2.8 в [3] или [7, с. 85].

Лемма о сглаживании. Пусть ξ — с.в. с плотностью $p(x) = c_8 [\sin(x/8)/(x/8)]^8$, где c_8 — нормирующая постоянная.

Положим $\bar{H}_n = n^{-1/2}(\bar{Z}_1 + \dots + \bar{Z}_n)$, $C_i(a) = \{r: r > 0, |r - |a|| \geq i\}$,

$$\delta(i) = \sup_{C_i(a)} |r - |a||^4 |\mathbf{P}\{|\bar{S}_n - a|^2 < r^2\} - \mathbf{P}\{|\bar{H}_n - a|^2 < r^2\}|,$$

$$\delta_T(a, r) = |\mathbf{P}\{|\bar{S}_n - a|^2 + \xi T^{-1} < r^2\} - \mathbf{P}\{|\bar{H}_n - a|^2 + \xi T^{-1} < r^2\}|.$$

Здесь $T \geq 1$ — параметр сглаживания. Справедлива следующая лемма.

Лемма (ср. с леммой 4 в [6]). Пусть $\delta(1) = \delta(2) = \delta$, тогда существует абсолютная постоянная c такая, что для любого $T \geq 1$

$$\delta \leq 64 \sup_{C_1(a)} |r - |a||^4 \delta_T(a, r) + c T^{-1} \Lambda_3^{2/3}(V) (1 + |a|^4).$$

Доказательство теоремы. В силу замечания 2 в [8] оценку (1.1) достаточно доказать в предположении, что $0 < \hat{c}_1 \leq s \leq \hat{c}_2 \ln n$, где $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$ — некоторые константы. Имеем $\Delta_n(a, r) \leq \Delta_{n,1}(a, r) + \Delta_{n,2}(a, r)$, где

$$\Delta_{n,1}(a, r) = |\mathbf{P}\{|S_n - a| < r\} - \mathbf{P}\{|\bar{H}_n - a| < r\}|,$$

$$\Delta_{n,2}(a, r) = |\mathbf{P}\{|\bar{H}_n - a| < r\} - \mathbf{P}\{|Y - a| < r\} - n^{-1/2} F_1(r^2)|.$$

Сначала оценим $\Delta_{n,1}(a, r)$. Из рассуждений работы [4] вытекает, что достаточно оценить

$$\Delta'_{n,1}(a, r) = |\mathbf{P}\{|\bar{S}_n - a| < r\} - \mathbf{P}\{|\bar{H}_n - a| < r\}|.$$

Положим $L^2 = 3\beta_4\sigma_9^{-2}$, $c_0 = \max\{e, \exp\{c_1^2/(3c_9)\}, c_1^{-1}\}$, где c_1 — константа из следствия 12 в [4], c_9 — константа из леммы 2.4 работы [3]. Если $n/L^2 \leq c_0$, то аналогично выводу (65) в [4] получаем

$$\Delta'_{n,1}(a, r) \leq c\sigma_9^{-2}(1+s)^{-4}\beta_4n^{-1}. \quad (2.1)$$

Пусть теперь $n/L^2 > c_0$. Можно считать, что $\delta(1) = \delta(2)$. Применим лемму о сглаживании с $T = c_2\sigma_1^{-4}\sigma_9^8(\sigma_1 \dots \sigma_9)^{2/9}n/\beta_4$ (константа c_2 выбирается так же, как в теореме 1.1 работы [3]). Получаем

$$\sup_{C_2(a)} s^4 \Delta'_{n,1}(a, r) \leq 64 \sup_{C_1(a)} s^4 \delta_T(a, r) + c\sigma_9^{-20}\Lambda_9^{8/9}(V) (1 + |a|^4) \beta_4 n^{-1}. \quad (2.2)$$

Используя идею доказательства леммы 12 в [4], можно получить

$$\delta_T(a, r) \leq c\sigma_9^{-20}\Lambda_9(V) s^{-4} (1 + |a|^4) \beta_4 n^{-1}. \quad (2.3)$$

Неравенства (2.1), (2.2) и (2.3) вместе с леммами 1 и 2 из [4] дают

$$\Delta_{n,1}(a, r) \leq c \sigma_9^{-20} \Lambda_9(V) \frac{1 + |a|^4}{(1 + s)^4} \frac{\beta_4}{n}. \quad (2.4)$$

Теперь оценим $\Delta_{n,2}(a, r)$. Положим $L^2 = 3\beta_4 \sigma_{12}^{-2}$. Снова благодаря методам [4] получаем, что при $n/L^2 \leq c_0$ справедливо

$$\Delta_{n,2}(a, r) \leq c (\sigma_{12}^{-2} + \sigma_{12}^{-1} \Lambda_7^{6/7}(V)) \frac{1 + |a|^3}{(1 + s)^4} \frac{\beta_4}{n}. \quad (2.5)$$

Предположим, что $n/L^2 > c_0$. Пусть $\bar{K}$ и $\bar{G}$ — меры, индуцированные с.э. $\bar{Z}_1/\sqrt{n}$ и $Y/\sqrt{n}$ соответственно. Далее μ^n обозначает n -кратную свертку меры μ . Интегрирование по частям дает

$$\Delta_{n,2}(a, r) \leq I_1 + I_2, \quad (2.6)$$

$$I_1 = \left| \int_D \int_{|t| \geq T'} F(t, u) R(t, u) dt du \right|, \quad I_2 = \left| \int_D \int_{-T'}^{T'} F(t, u) R(t, u) dt du \right|.$$

Здесь $F(t, u) = (|a|^2 - u)^{-4} \exp\{it(|a|^2 - u)\}$,

$$R(t, u) = \frac{d^4}{dt^4} \left(\int \exp\{it(|x|^2 - 2(x, a))\} (\bar{K}^n - \bar{G}^n)(dx) - e^{-it|a|^2} \hat{F}_1(t) \right), \quad (2.7)$$

$$D = \begin{cases} (-\infty, r^2], & \text{если } |a| \geq r + 1, \\ [r^2, \infty), & \text{если } r \geq |a| + 1, \end{cases} \quad T' = c_1 \frac{(n/L^2)^{1/2}}{(\ln(n/L^2))^{1/2}}.$$

Интеграл I_1 оценивается сверху суммой модулей, соответствующих слагаемым в круглых скобках в (2.7). Затем каждый из модулей оцениваем с помощью следствия 12 и леммы 13 из [4]. Получаем

$$I_1 \leq c \left(\Lambda_{12}(V) + \sigma_{12}^{-2} \Lambda_9^{8/9}(V) \right) (1 + |a|^3) s^{-4} \beta_4 n^{-1}. \quad (2.8)$$

Положим $f(\lambda) = \exp\{it(|x + \lambda y|^2 - 2(x + \lambda y, a))\}$, $T_j = \bar{K}^j \bar{G}^{n-j-1}$, $R = \bar{K} - \bar{G}$. Тогда для I_2 получаем

$$\begin{aligned} I_2 \leq & \left| \int_D \int_{-T'}^{T'} F(t, u) \frac{d^4}{dt^4} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{6} \iint f_\lambda^{(3)}(0) T_j(dx) R(dy) - e^{-it|a|^2} \hat{F}_1(t) \right) dt du \right| \\ & + \left| \int_D \int_{-T'}^{T'} F(t, u) \frac{d^4}{dt^4} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{l=0}^2 \iint \frac{f_\lambda^{(l)}(0)}{l!} T_j(dx) R(dy) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{6} \iint \int_0^1 f_\lambda^{(4)}(\theta) (1 - \theta)^3 d\theta T_j(dx) R(dy) \right] \right) dt du \right|. \quad (2.9) \end{aligned}$$

При оценивании второго слагаемого в правой части (2.9) мы воспользуемся близостью моментов первых двух порядков с.э. $\bar{Z}_1$ и Y и следствием 12 из [4]. Чтобы оценить первое слагаемое в (2.9), заметим, что моменты первых трех порядков $\bar{Z}_1$ и $\bar{X}_1$ близки, а также то, что сумма по j фактически включает в себя элемент, сравнимый с $e^{-it|a|^2} \hat{F}_1(t)$. Здесь также активно применяются методы работы [4]. Для сокращения числа участвующих в оценке собственных значений V до двенадцати привлекается лемма 2.2 из [3]. В результате приходим к неравенству

$$I_2 \leq c \Lambda_{12}(V) (1 + |a|^6) s^{-4} \beta_4 n^{-1}. \quad (2.10)$$

Соотношения (2.5), (2.6), (2.8) и (2.10) приводят к

$$\Delta_{n,2}(a, r) \leq c (\sigma_{12}^{-2} \Lambda_9^{8/9}(V) + \Lambda_{12}(V)) \frac{1 + |a|^6}{(1 + s)^4} \frac{\beta_4}{n}. \quad (2.11)$$

Объединение (2.4) и (2.11) завершает доказательство теоремы.

Автор выражает глубокую признательность В.В. Ульянову за постановку задачи и постоянное внимание при подготовке работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bentkus V., Götze F. Optimal rates of convergence in the CLT for quadratic forms. — Ann. Probab., 1996, v. 24, № 1, p. 466–490.
2. Богатырёв С. А. Неравномерная оценка в коротких асимптотических разложениях в гильбертовом пространстве. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 2, с. 742–743.
3. Götze F., Ulyanov V. V. Uniform approximations in the CLT for balls in Euclidean spaces. Preprint 00-034. SFB343. Bielefeld: Universität Bielefeld, 2000, 26 p.
4. Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В. Нормальная аппроксимация в гильбертовом пространстве. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, в. 2, с. 225–245; в. 3, с. 508–521.
5. Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В. Правильная оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве. — Матем. сб., 1989, т. 180, № 12, с. 1587–1613.
6. Ротарь В. И. Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 4, с. 647–665.
7. Sazonov V. V. Normal Approximation — Some Recent Advances. Berlin: Springer-Verlag, 1981, 105 p. (Lecture Notes in Math. V. 879.)
8. Sazonov V. V., Ulyanov V. V. An improved estimate of the accuracy of Gaussian approximation in Hilbert space. — New Trends in Probability and Statistics (Bakuriani, 1990). Vilnius/Utrecht: Mokslas/VSP, 1991, p. 123–136.

Поступила в редакцию
19.VIII.2002

© 2002 г.

ВЕРЕТЕННИКОВ А. Ю.*

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ТОРЕ¹⁾

Памяти М. А. Красносельского

Установлены достаточные условия, при которых преобразования Лежандра функции действия для решения стохастического дифференциального уравнения на конечномерном торе и для его приближенной схемы Эйлера близки, и дана оценка этой близости.

Ключевые слова и фразы: стохастические дифференциальные уравнения, приближенное решение, большие отклонения, положительные операторы.

1. Введение. Рассматривается решение X_t стохастического дифференциального уравнения

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds + B_t \pmod{1}, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x, \quad (1)$$

* Department of Mathematics, University of Kansas, Lawrence, KS, 66045, USA; School of Mathematics, University of Leeds, UK; Институт проблем передачи информации РАН, Большой Каретный, 19, 101447 Москва, Россия; e-mail: veretenn@iitp.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-22000) и INTAS (грант № 99-0590).