Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Веретенников, О больших отклонениях для приближенных решений стохастических дифференциальных уравнений на торе, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 4, 772–780

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3781>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:17:27

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bentkus V., Götze F. Optimal rates of convergence in the CLT for quadratic forms. — Ann. Probab., 1996, v. 24, № 1, p. 466–490.
2. Богатырёв С. А. Неравномерная оценка в коротких асимптотических разложениях в гильбертовом пространстве. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 2, с. 742–743.
3. Götze F., Ulyanov V. V. Uniform approximations in the CLT for balls in Euclidean spaces. Preprint 00-034. SFB343. Bielefeld: Universität Bielefeld, 2000, 26 p.
4. Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В. Нормальная аппроксимация в гильбертовом пространстве. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, в. 2, с. 225–245; в. 3, с. 508–521.
5. Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В. Правильная оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве. — Матем. сб., 1989, т. 180, № 12, с. 1587–1613.
6. Ротарь В. И. Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 4, с. 647–665.
7. Sazonov V. V. Normal Approximation — Some Recent Advances. Berlin: Springer-Verlag, 1981, 105 p. (Lecture Notes in Math. V. 879.)
8. Sazonov V. V., Ulyanov V. V. An improved estimate of the accuracy of Gaussian approximation in Hilbert space. — New Trends in Probability and Statistics (Bakuriani, 1990). Vilnius/Utrecht: Mokslas/VSP, 1991, p. 123–136.

Поступила в редакцию
19.VIII.2002

© 2002 г.

ВЕРЕТЕННИКОВ А. Ю.*

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ТОРЕ¹⁾

Памяти М. А. Красносельского

Установлены достаточные условия, при которых преобразования Лежандра функции действия для решения стохастического дифференциального уравнения на конечномерном торе и для его приближенной схемы Эйлера близки, и дана оценка этой близости.

Ключевые слова и фразы: стохастические дифференциальные уравнения, приближенное решение, большие отклонения, положительные операторы.

1. Введение. Рассматривается решение X_t стохастического дифференциального уравнения

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds + B_t \pmod{1}, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x, \quad (1)$$

* Department of Mathematics, University of Kansas, Lawrence, KS, 66045, USA; School of Mathematics, University of Leeds, UK; Институт проблем передачи информации РАН, Большой Каретный, 19, 101447 Москва, Россия; e-mail: veretenn@iitp.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-22000) и INTAS (грант № 99-0590).

на d -мерном торе $T^d = [0, 1]^d$, где B_t — стандартный d -мерный винеровский процесс, функция b — борелевская d -мерная (т.е. на T^d) и ограниченная. Изучаются две тесно связанные задачи: первая — при каких условиях полугруппа, соответствующая приближенному решению, близка к исходной в операторной норме, и вторая — достаточно ли этого для близости больших уклонений. Как оказывается, ответ на второй вопрос положителен, а для ответа на первый можно установить подходящие достаточные условия.

Рассматривается приближенная схема Эйлера

$$X_t^h = x + \int_0^t b(X_{[s/h]h}) ds + B_t, \quad (2)$$

где $[a]$ означает целую часть a . Пусть $f \in C(T^d)$, $\beta \in \mathbf{R}^d$, и через A^β и $A^{h,\beta}$ обозначим операторы на $C(T^d)$:

$$\begin{aligned} A^\beta \phi(x) &= \mathbf{E}_x \phi(X_1) \exp \left(\beta \int_0^1 f(X_s) ds \right), \\ A^{h,\beta} \phi(x) &= \mathbf{E}_x \phi(X_1^h) \exp \left(\beta \int_0^1 f(X_s^h) ds \right). \end{aligned}$$

Для простоты рассматриваются лишь значения $h = 1/n$, при которых n является целым. Первая задача — установить оценку вида

$$\|A^\beta - A^{h,\beta}\|_{C(T^d)} \leq Ch. \quad (3)$$

Вторая задача — об аппроксимации функции действия, описывающей большие уклонения для функционала $\int_0^t f(X_s) ds$, $t \rightarrow \infty$. Известно, что ответ может быть описан в терминах функции

$$H(\beta) := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \mathbf{E} \exp \left(\beta \int_0^t f(X_s) ds \right) \quad (4)$$

и ее преобразования Фенхеля–Лежандра

$$L(\alpha) = \sup_{\beta} (\alpha\beta - H(\beta)).$$

Приближенное значение H имеет вид

$$H^h(\beta) := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \mathbf{E} \exp \left(\beta \int_0^t f(X_s^h) ds \right). \quad (5)$$

Если H^h является приближением H , то и приближенное значение функции действия

$$L^h(\alpha) = \sup_{\beta} (\alpha\beta - H^h(\beta))$$

оказывается близко к $L(\alpha)$. Отметим, что в одномерном случае оценка $Ch^{1/2}$ в (3) вместо Ch установлена в [14] при менее ограничительных условиях. Ужесточая предположения гладкости, в этой оценке можно получить, в принципе, любую точность. Метод исследования допускает рассмотрение более общих уравнений, т.е. с общим коэффициентом диффузии, в том числе и с возможным вырождением при условии типа Хёрмандера. Однако в настоящей статье никакие подобные обобщения не рассматриваются, чтобы не перегружать изложение. Можно задать следующий естественный вопрос: есть ли какой-либо аналог данного результата (теоремы 1 ниже) для некомпактных пространств? В принципе ответ положителен: надо приблизить решение уравнения в $\mathbf{R}^d$ решением уравнения в достаточно большом компакте (торе), тогда функция $H(\beta)$ также будет приближенно равна соответствующему ее компактному аналогу. При этом естественным образом можно использовать рекуррентные условия на процесс (ср. [4]), которые для тора не нужны.

2. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть $b \in C_b^3(T^d)$ и $f \in C_b^2(T^d)$. Тогда при любом $B > 0$ и $|\beta| < B$ найдется такое C , что

$$\|A^\beta - A^{h,\beta}\|_{C(T^d)} \leq \|A^\beta - A^{h,\beta}\|_{C(\mathbf{R}^d)} \leq Ch.$$

Доказательство см. в п. 4.

Если известно, что $\|A^\beta - A^{h,\beta}\|$ мало, то можно гарантировать близость H и H^h (см. [12] или лемму 4 ниже).

Теорема 2. Пусть $b \in C_b^3(T^d)$, $f \in C_b^2(T^d)$. Тогда для любого $B > 0$ найдется такое C , что при всех $|\beta| < B$ оценка (3) имеет место и

$$|H^h(\beta) - H(\beta)| \leq Ch. \quad (6)$$

Доказательство теоремы 2 следует из леммы 4.

Обозначим $\bar{L} = \{\alpha: L(\alpha) < \infty\}$ и $\text{int}(\bar{L})$ — совокупность всех внутренних точек множества $\bar{L}$ относительно своей линейной оболочки (см. [13]). Если $\alpha \in \text{int}(\bar{L})$, то найдется β такое, что $L(\alpha) = \alpha\beta - H(\beta)$. Обозначим (любое) такое β через $\beta(\alpha)$. Аналогично введем обозначение $\beta^h(\alpha)$.

Следствие 1. В условиях теоремы 2

$$L^h(\alpha) \approx L(\alpha). \quad (7)$$

Более точно, при любом $\alpha \in \text{int}(\bar{L})$ найдется $C > 0$ такое, что

$$L(\alpha) \leq L^h(\alpha) + Ch. \quad (8)$$

Если, кроме того, при достаточно малых $h > 0$ также $\alpha \in \text{int}(\bar{L}^h)$ и множество всех значений $\beta^h(\alpha)$ при данном α и достаточно малых h ограничено, то найдется такое $C > 0$, что

$$L^h(\alpha) \leq L(\alpha) + Ch. \quad (9)$$

Указанное свойство ограниченности выполнено, в частности, если функция H в точке $\beta(\alpha)$ является строго выпуклой, поскольку в этом случае значение $\beta(\alpha)$ определено однозначно и $\beta^h(\alpha) \rightarrow \beta(\alpha)$, $h \rightarrow 0$.

Доказательство следствия. Неравенство (8) вытекает из (6) и того факта, что для всякого указанного α найдется β такое, что $L(\alpha) = \alpha\beta - H(\beta)$; стало быть,

$$L(\alpha) = \alpha\beta - H(\beta) \leq \alpha\beta - H^h(\beta) + Ch \leq L^h(\alpha) + Ch.$$

Неравенство (9) следует аналогично:

$$L^h(\alpha) = \alpha\beta^h - H^h(\beta^h) \leq \alpha\beta^h - H(\beta^h) + Ch \leq L(\alpha) + Ch.$$

3. Вспомогательные утверждения. Пусть $r(A)$ обозначает спектральный радиус оператора A . Как известно (см. [1]), справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть b, f ограничены и борелевы. Тогда предел (4) существует и $H(\beta)$ совпадает со значением $\ln r(A^\beta)$.

Предел в (5) также существует и совпадает с логарифмом спектрального радиуса оператора $A^{h,\beta}$:

$$H^h(\beta) = \ln r(A^{h,\beta}). \quad (10)$$

Доказательство вытекает из теоремы 11.5 в [6].

Лемма 2. Пусть b, f ограничены и борелевы. Тогда для любого $B > 0$ найдется такое C , что при всех $|\beta| < B$

$$C^{-1} \leq r(A^\beta) \leq C \quad (11)$$

и равномерно относительно $h > 0$

$$C^{-1} \leq r(A^{h,\beta}) \leq C. \quad (12)$$

Доказательство следует из леммы 9.1 в [6] и из равностепенной ограниченности A^β и $A^{h,\beta}$.

Следующая лемма дает оценку спектрального зазора

$$q(A^\beta) = \inf\{q: |\lambda| \leq q r(A^\beta), \lambda \text{ принадлежит спектру } A^\beta \setminus \{r(A^\beta)\}\}.$$

Лемма 3. Пусть b, f ограничены и борелевы. Тогда при любом $B > 0$ найдутся такие $C, \bar{q} \in (0, 1)$, что при всех $|\beta| < B$

$$q(A^\beta) \leq \bar{q}. \quad (13)$$

Доказательство вытекает из теоремы 12.1 в [6] и из неравенств $A^\beta \phi(x) \leq C$ и $A^\beta \psi(x) \geq C^{-1}$ для $\phi, \psi \geq 0$, $\int \phi dx = \int \psi dx = 1$.

Лемма 4. Пусть b, f ограничены и борелевы. Тогда при любом $B > 0$ найдется такое C , что при всех $|\beta| < B$ для любого достаточно малого h

$$|\ln r(A^{h,\beta}) - \ln r(A^\beta)| \leq C \|A^{h,\beta} - A^\beta\|_{C(T^d)}.$$

Доказательство следует из леммы 2 и тождеств для соответствующих собственных функций $A^{h,\beta} \phi^h = r(A^{h,\beta}) \phi^h$ и $A^\beta \phi = r(A^\beta) \phi$ в силу представлений

$$\phi = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\zeta - A^\beta)^{-1} d\zeta \right) \phi, \quad (14)$$

$$\phi^h = P^h \phi \equiv \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\zeta - A^{h,\beta})^{-1} d\zeta \right) \phi \quad (15)$$

(см. [12]), где в качестве Γ выбран контур, отделяющий точку $r(A^{h,\beta})$ от остальной части спектра оператора $A^{h,\beta}$ при любом $0 \leq h \leq h_0$; если h_0 достаточно мало, то можно выбрать Γ таким образом, чтобы его длина не превосходила некоторой постоянной, ср. формулы (III.6.17) или (IV.3.11) в [12]. Малое h требуется для того, чтобы гарантировать, что проекция $P^h \phi$ близка к ϕ и, стало быть, положительна (не равна нулю).

4. Доказательство теоремы 1. Не умаляя общности, мы можем и будем считать справедливой оценку $c_1 := \sup_{t,x} \|b_x(t, x)\| < \ln 2$, где $\|\cdot\|$ означает норму матрицы при фиксированных аргументах. Иначе следует перейти к рассмотрению оператора $A_{t_0}^\beta$ с таким t_0 , что $\sup_{t,x} \|b_x(t, x)\|_{t_0} < \ln 2$.

Используется основная идея из работы [10]. Пусть $\|\phi\|_C \leq 1$. Мы должны сравнить два значения:

$$\mathbf{E}_x \phi(X_1) \exp \left(\int_0^1 \beta f(X_s) ds \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_x \phi(X_1^h) \exp \left(\int_0^1 \beta f(X_s^h) ds \right).$$

Обозначим через $u(t, x)$ решение уравнения

$$\partial_t u + Lu + \beta f u = 0, \quad u(1, x) = \phi(x),$$

где $L = \frac{1}{2} \Delta + b(x) \partial_x$. Решение существует и единственно в классе функций

$$C([0, 1] \times \mathbf{R}^d) \bigcap_{t_0 < 1} \bigcap_{p > 1} W_{p, \text{loc}}^{1,2}([0, t_0] \times \mathbf{R}^d)$$

(см. [8], а также [3]), причем

$$\|u\|_{C([0,1] \times \mathbf{R}^1)} + \|u\|_{C^{1,2}([0,t_0] \times \mathbf{R}^1)} \leq C \|\phi\|_C.$$

Для справедливости последней оценки достаточно предположить, что $b \in C^2, f \in C^1$.

Далее, при $h = 1/n$ находим

$$\mathbf{E}_x \phi(X_1^h) \exp \left(\int_0^1 \beta f(X_s^h) ds \right) - \mathbf{E}_x \phi(X_1) \exp \left(\int_0^1 \beta f(X_s) ds \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}_x u(1, X_1^h) \exp \left(\int_0^1 \beta f(X_s^h) ds \right) - u(0, x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}_x \left[u \left(\frac{k+1}{n}, X_{(k+1)/n}^h \right) \exp \left(\int_0^{(k+1)/n} \beta f(X_s^h) ds \right) \right. \\
&\quad \left. - u \left(\frac{k}{n}, X_{k/n}^h \right) \exp \left(\int_0^{k/n} \beta f(X_s^h) ds \right) \right] \equiv \sum_{k=0}^{n-1} J_k.
\end{aligned}$$

Обозначим $L_z = \Delta/2 + b(z) \partial_x$. Применяя формулу Ито, которая справедлива при любом k , включая $k = n-1$, — см. ниже (конец пункта) об этом случае, — и вычисляя математические ожидания, получаем

$$\begin{aligned}
J_k &= \mathbf{E}_x \int_{k/n}^{(k+1)/n} \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) [\partial_t + L_{X_{k/n}^h} + \beta f(X_t^h)] u(t, X_t^h) dt \\
&= - \int_{k/n}^{(k+1)/n} \mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t L_{X_{k/n}^h} b(X_s^h) ds \right) u_x(t, X_t^h) dt \\
&\quad - \int_{k/n}^{(k+1)/n} \mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t b_x(X_s^h) dB_s \right) u_x(t, X_t^h) dt \equiv -I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

Р а с с м о т р и м с л у ч а й $k/n \leq \frac{1}{2}$. Имеем

$$\left| \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t L_{X_{k/n}^h} b(X_s^h) ds \right) u_x(t, X_t^h) \right| \leq C_\beta h.$$

Значит, интеграл I_1 допускает оценку $|I_1| \leq C_\beta h^2$.

Оценим I_2 по формуле Ито

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t b_x(X_s^h) dB_s \right) u_x(t, X_t^h) \\
&= \mathbf{E}_x \int_{k/n}^t \left[\exp \left(\int_0^s \beta f(X_r^h) dr \right) b_x(X_s^h) u_{xx}(s, X_s^h) \right] ds \\
&\quad + \mathbf{E}_x \int_{k/n}^t \left[\exp \left(\int_0^s \beta f(X_r^h) dr \right) \left(\int_{k/n}^s b_x(X_r^h) dB_r \right) \right. \\
&\quad \left. \times (L_{X_{k/n}^h} + \beta f + \partial_s) u_x(s, X_s^h) \right] ds \\
&= \mathbf{E}_x \int_{k/n}^t \left[\exp \left(\int_0^s \beta f(X_r^h) dr \right) b_x(X_s^h) u_{xx}(s, X_s^h) \right] ds \\
&\quad + \mathbf{E}_x \int_{k/n}^t \left[\exp \left(\int_0^s \beta f(X_r^h) dr \right) \left(\int_{k/n}^s b_x(X_r^h) dB_r \right) \right. \\
&\quad \left. \times [b(X_s^h) - b(X_{k/n}^h) + \beta(f(X_s^h) - f(X_{k/n}^h))] u_{xx}(s, X_s^h) \right] ds.
\end{aligned}$$

Очевидно, что первое слагаемое в правой части по абсолютной величине не превосходит $C_\beta h$, и даже лучшая оценка имеет место для второго интеграла, который по абсолютной величине не превосходит

$$\begin{aligned}
&\int_{k/n}^t \left(\mathbf{E}_x \left[\exp \left(2 \int_0^s \beta f(X_r^h) dr \right) |[\cdot \cdot] u_{xx}(s, X_s^h)|^2 \right] \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\mathbf{E}_x \left(\int_{k/n}^s b_x(X_r^h) dB_r \right)^2 \right)^{1/2} ds \leq C_\beta h^{3/2}.
\end{aligned}$$

Поэтому $|I_2| \leq Ch^2$.

Рассмотрим случай $k/n > \frac{1}{2}$, слагаемое I_1 . Пусть $\varepsilon > 0$, e — любой d -мерный вектор, $e_1, \dots, e_d$ — ортонормированный базис. Обозначим через $X_t^{h,\varepsilon,e}$ решение стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} X_t^{h,\varepsilon,e} &= x + B_t + \varepsilon t e + \int_0^t b(X_{[s/h]h}^{h,\varepsilon,e}) ds, \\ Y_t^{h,\varepsilon,e} &= \partial_\varepsilon X_t^{h,\varepsilon,e} = t e + \int_0^t \nabla_x b(X_{[s/h]h}^{h,\varepsilon,e}) Y_{[s/h]h}^{h,\varepsilon,e} ds. \end{aligned} \quad (16)$$

В силу формулы (16) процесс $Y_t^{h,\varepsilon,e}$ представим в виде (I — единичная матрица размера $d \times d$)

$$Y_{kh}^{h,\varepsilon,e} = \sum_{i=1}^k \prod_{j=i}^{k-1} (I + \nabla_x b(X_{jh}^{h,\varepsilon}) h) h e$$

при $t = kh$, $k = 0, 1, \dots$, и

$$Y_t^{h,\varepsilon,e} = Y_{kh}^{h,\varepsilon,e} + (t - kh) (I e + \nabla_x b(X_{kh}^{h,\varepsilon}) Y_{kh}^{h,\varepsilon,e})$$

при $kh \leq t < (k+1)h$. Поэтому найдется такое $C > 0$, что при любом ε верна оценка $\sup_{h \leq 1} \sup_{t \leq 1} \|Y_t^{h,\varepsilon,e}\| \leq C$. Рассмотрим матричный процесс

$$Y_t^{h,\varepsilon} = (Y_t^{h,\varepsilon,e_1}, \dots, Y_t^{h,\varepsilon,e_d}), \quad Y_t^h = Y_t^{h,0}.$$

Чтобы установить его обратимость при достаточно малых $h > 0$ и $0 < t = kh \leq 1$, оценим $\|khI - Y_k^{h,\varepsilon} h\|$:

$$\begin{aligned} \|khI - Y_k^{h,\varepsilon} h\| &= h \left\| \sum_{i=1}^k \left(I - \prod_{j=i}^{k-1} (I + \nabla_x b(X_{jh}^{h,\varepsilon}) h) \right) \right\| \leq kh((1 + c_1 h)^{k-1} - 1) \\ &\leq t((1 + c_1 h)^{t/h} - 1) \leq t(\exp(c_1 t) - 1) < t. \end{aligned}$$

Стало быть, при $t = kh$ матрица $Y_t^{h,\varepsilon}$ обратима, и

$$\|(Y_t^{h,\varepsilon})^{-1}\| \leq \frac{C}{t}, \quad C > (2 - \exp(c_1))^{-1}.$$

При $kh < t < (k+1)h$ обратимость матрицы $Y_t^{h,\varepsilon}$ и аналогичная оценка на величину $\|(Y_t^{h,\varepsilon})^{-1}\|$ вытекают из малости разности $Y_t^{h,\varepsilon} - Y_{kh}^{h,\varepsilon}$ при малых h .

Рассмотрим процесс $\zeta_t^{h,\varepsilon,e} := \partial_\varepsilon Y_t^{h,\varepsilon,e}$. В силу (16) он удовлетворяет уравнению

$$\zeta_t^{h,\varepsilon,e} = \int_0^t \nabla_x b(X_{[s/h]h}^{h,\varepsilon,e}) \zeta_{[s/h]h}^{h,\varepsilon,e} ds + \int_0^t \nabla_x^2 b(X_{[s/h]h}^{h,\varepsilon,e}) Y_{[s/h]h}^{h,\varepsilon,e} Y_{[s/h]h}^{h,\varepsilon,e} ds,$$

из которого следует оценка $\sup_{t \leq 1, \varepsilon > 0, h \leq 1} \|\zeta_t^{h,\varepsilon,e}\| \leq C < \infty$. Обозначим

$$\eta_t^h \equiv \eta_t^h[B] := (Y_t^h)^{-1}$$

(это матричная функция от винеровского процесса B , как и сама матрица Y_t^h). Наконец, определим $\eta_t^{h,\varepsilon} := (\eta_t^{h,\varepsilon}(ij))$, где при любом $1 \leq i \leq d$,

$$\eta_t^{h,\varepsilon}(ij) = \eta_t^h(ij)[B. + \varepsilon e_i];$$

т.е. в i -й строке этой матрицы во всех аргументах X^h меняется на X^{h,ε,e_i} . Положим

$$Z_t^{h,\varepsilon} := \partial_\varepsilon \eta_t^{h,\varepsilon}, \quad Z_t^h = Z_t^{h,0}.$$

В силу ограниченности норм $\|\zeta^{h,\varepsilon,e}\|$ и $\|Y^{h,\varepsilon}\|^{-1}$ процесс $(Z_t^{h,\varepsilon}, t \leq 1)$ также равномерно ограничен по норме.

Запишем следующую формулу Гирсанова (ℓ фиксировано):

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x \left(\exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^{h,\varepsilon,e_j}) ds \right) \left(\int_{k/n}^t L_{X_{k/n}^{h,\varepsilon,e_j}} b^\ell(X_s^{h,\varepsilon,e_j}) ds \right) u(t, X_t^{h,\varepsilon,e_j}) \right. \\ & \quad \left. \times \exp \left(-\varepsilon e_j^* B_t - \frac{\varepsilon^2 t}{2} \right) \right) \eta_t^{h,\varepsilon} = \text{const} \end{aligned}$$

(здесь вектор-строка размера $1 \times d$ умножается на матрицу $d \times d$; const в правой части — также вектор $1 \times d$). Возьмем производную по ε в точке $\varepsilon = 0$ (при этом $\nabla_x u$ — вектор-строка):

$$\begin{aligned} & -\mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t L_{X_{k/n}^h} b^\ell(X_s^h) ds \right) \nabla_x u(t, X_t^h) Y_t^h \eta_t^h \\ & \equiv -\mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t L_{X_{k/n}^h} b^\ell(X_s^h) ds \right) \nabla_x u(t, X_t^h) \\ & = \mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t L_{X_{k/n}^h} b^\ell(X_s^h) ds \right) u(t, X_t^h) \eta_t^h \beta \int_0^t \nabla_x f(X_s^h) Y_s^h ds \\ & \quad + \mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t L_{X_{k/n}^h} b_x^\ell(X_s^h) Y_s^h ds \right) u(t, X_t^h) \eta_t^h \\ & \quad + \mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t b_x(X_{k/n}^h) Y_{k/n}^h b_x^\ell(X_s^h) ds \right) u(t, X_t^h) \eta_t^h \\ & \quad + \mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t L_{X_{k/n}^h} b^\ell(X_s^h) ds \right) u(t, X_t^h) (1, \dots, 1) \eta_t^h Z_t^h \eta_t^h \\ & \quad - \mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t L_{X_{k/n}^h} b^\ell(X_s^h) ds \right) u(t, X_t^h) B_t^* \eta_t^h. \end{aligned}$$

Все интегралы в правой части по абсолютной величине не превосходят Ch (напомним, что $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$). Значит, величина I_1 при $k > n/2$ удовлетворяет оценке $|I_1| \leq Ch^2$.

Р а с с м о т р и м в е л и ч и н у I_2 п р и $k > n/2$. Прежде всего, запишем подынтегральное выражение в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x \exp \left(\int_{k/n}^t \beta f(X_s^h) ds \right) \int_{k/n}^t b_{x_i}^\ell(X_s^h) dB_s^i u_{x_\ell}(t, X_t^h) \\ & = \mathbf{E}_x \int_{k/n}^t \left[\exp \left(\int_{k/n}^s \beta f(X_r^h) dr \right) b_{x_i}^\ell(X_s^h) u_{x_\ell x_i}(s, X_s^h) \right] ds \\ & \quad + \mathbf{E}_x \int_{k/n}^t \left[\exp \left(\int_{k/n}^s \beta f(X_r^h) dr \right) \left(\int_{k/n}^s b_{x_i}^\ell(X_r^h) dB_r^i \right) \right. \\ & \quad \quad \left. \times (L + \beta f + \partial_s) u_{x_\ell}(s, X_s^h) \right] ds \\ & = \mathbf{E}_x \int_{k/n}^t \left[\exp \left(\int_{k/n}^s \beta f(X_r^h) dr \right) b_x^\ell(X_s^h) u_{x_\ell x_i}(s, X_s^h) \right] ds \\ & \quad + \mathbf{E}_x \int_{k/n}^t \left[\exp \left(\int_{k/n}^s \beta f(X_r^h) dr \right) \left(\int_{k/n}^s b_{x_i}^\ell(X_r^h) dB_r^i \right) \right. \\ & \quad \quad \left. \times (b^m(X_s^h) - b^m(X_{k/n}^h)) u_{x_\ell x_m}(s, X_s^h) \right] ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь оба математических ожидания оцениваются аналогично, рассмотрим для определенности последнее. Применим преобразование Гирсанова дважды: сначала чтобы заменить u_{xx} на u_x , и затем — на u .

1. Имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x \left(\exp \left\{ \int_0^t \beta f(X_s^{h,\varepsilon,e_j}) ds \right\} \left(\int_{k/n}^t b_{x_i}^\ell(X_s^{h,\varepsilon,e_j}) (dB_s^i + \varepsilon \delta_{ij} ds) \right) \right. \\ & \quad \times \left(b^m(X_t^{h,\varepsilon,e_j}) - b^m(X_{k/n}^{h,\varepsilon,e_j}) \right) u_{x_\ell}(t, X_t^{h,\varepsilon,e_j}) \\ & \quad \times \exp \left\{ -\varepsilon e_j^* B_t - \frac{\varepsilon^2 t}{2} \right\} \Bigg)_{j=1,\dots,d} \eta_t^{h,\varepsilon} = \text{const}. \end{aligned} \quad (18)$$

Дифференцирование (18) по ε в точке $\varepsilon = 0$ дает

$$\begin{aligned} & -\mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \int_{k/n}^t b_{x_i}^\ell(X_s^h) dB_s^i (b^m(X_t^h) - b^m(X_{k/n}^h)) \nabla_x u_{x_\ell}(t, X_t^h) \\ & = \mathbf{E}_x \left(\beta \int_0^t \nabla_x f(X_s^h) Y_s^h ds \right) \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \\ & \quad \times \left(\int_{k/n}^t b_{x_i}^\ell(X_s^h) dB_s^i \right) (b^m(X_s^h) - b^m(X_{k/n}^h)) u_{x_\ell}(t, X_t^h) \eta_t^h \\ & \quad + \mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t \nabla_x b_{x_i}^\ell(X_s^h) Y_s^h dB_s^i \right) \\ & \quad \times (b^m(X_s^h) - b^m(X_{k/n}^h)) u_{x_\ell}(t, X_t^h) \eta_t^h \\ & \quad + \mathbf{E}_x \left(\exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t b_{x_i}^\ell(X_s^h) \delta_{ij} ds \right) \right. \\ & \quad \times (b^m(X_t^h) - b^m(X_{k/n}^h)) u_{x_\ell}(t, X_t^h) \Bigg) \eta_t^h \\ & - \mathbf{E}_x \exp \left(\int_0^t \beta f(X_s^h) ds \right) \left(\int_{k/n}^t b_x(X_r^h) dB_r \right) (b(X_s^h) - b(X_{k/n}^h)) \\ & \quad \times u_{x_\ell}(t, X_t^h) (1, \dots, 1) \eta_t^h Z_t^h \eta_t^h \\ & \quad (\text{символически}) \equiv \mathbf{E}_x u_{x_\ell}(t, X_t^h) A_t^h, \end{aligned}$$

где A_t^h — вектор-столбец.

2. Пусть a_t^h — любая координата вектора A_t^h ; она является функционалом от B . Второе преобразование Гирсанова имеет вид

$$\mathbf{E}_x \left(u(t, X_t^{h,\varepsilon,e_j}) a_t^{h,\varepsilon,e_j} \exp \left(-\varepsilon e_j^* B_t - \frac{\varepsilon^2 t}{2} \right) \right)_{j=1,\dots,d} \eta_t^{h,\varepsilon} = \text{const}. \quad (19)$$

Здесь выражение a_t^{h,ε,e_j} означает, что функционал от B заменяется на такой же функционал от $B + \varepsilon e_j$. Производная (19) в точке $\varepsilon = 0$ в такой же символической форме приводит к равенству $-\mathbf{E}_x \nabla_x u(t, X_t^h) a_t^h = \mathbf{E}_x u(t, X_t^h) D_t^h$ с некоторым вектором D_t^h , где $|u|$ ограничено, и $\mathbf{E}_x |D_t^h|$ — также, поскольку выражение D_t^h содержит производные b не выше третьего и f — не выше второго порядка. Это приводит к оценке $|I_2| \leq Ch^2$.

Рассмотрим случай $k = n - 1$. Рассмотрим $1 - 1/n < T < 1$ и разность

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x \left[u(T, X_T^h) \exp \left(\int_0^T \beta f(X_s^h) ds \right) \right. \\ & \quad \left. - u \left(\frac{n-1}{n}, X_{(n-1)/n}^h \right) \exp \left(\int_0^{(n-1)/n} \beta f(X_s^h) ds \right) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Сначала эту разность представим в виде, подобном $-I_1 - I_2$; затем, используя преобразования Гирсанова, преобразуем все математические ожидания к виду, не содержащему u_x и u_{xx} . Наконец, в этом представлении можно перейти к пределу при $T \rightarrow 1$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Автор благодарен Ж. Мемени (J. Mémin), М. А. Красносельскому и А. В. Соболеву за плодотворные дискуссии о диффузионных процессах и теории положительных операторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979, 424 с.
2. Веретенников А. Ю. О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений. — Матем. сб., 1980, т. 111, № 3, с. 434–452.
3. Веретенников А. Ю. Параболические уравнения и стохастические уравнения Ито с коэффициентами, разрывными по времени. — Матем. заметки, 1982, т. 31, № 4, с. 549–557.
4. Веретенников А. Ю. О больших отклонениях диффузионных процессов с измеримыми коэффициентами. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 5, с. 135–146.
5. Звонкин А. К. Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос. — Матем. сб., 1974, т. 93, № 1, с. 129–149.
6. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985, 256 с.
7. Крылов Н. В., Сафонов М. В. Об одном свойстве решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1980, т. 44, № 1, с. 161–175.
8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
9. Мильштейн Г. Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1988.
10. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations. I: Convergence rate of the distribution function. — Probab. Theory Relat. Fields, 1996, v. 104, № 1, p. 43–60.
11. Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III. — Comm. Pure Appl. Math., 1976, v. 29, p. 389–461.
12. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. New York: Springer-Verlag, 1976, 619 p.
13. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
14. Veretennikov A. Yu. On large deviations for approximations of SDEs. — Probab. Theory Relat. Fields (в печати); <http://www.mathpreprints.com/math/Preprint/veretenn/20010825/5/>

Поступила в редакцию
29.XI.2001

© 2002 г.

КУЛИКОВА А. А.*

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ К РАВНОМЕРНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

В работе рассматриваются последовательности случайных векторов в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^s$ ($s \geq 2$): $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, X_n = (X_{n1}, \dots, X_{ns}), 0 \leq X_{nj} \leq 1, j = 1, \dots, s$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anna_q@mail.ru