Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Куликова, Оценка скорости сходимости распределений вероятностей к равномерному распределению, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 4, 780–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3782>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:57:21

Автор благодарен Ж. Мемени (J. Mémin), М. А. Красносельскому и А. В. Соболеву за плодотворные дискуссии о диффузионных процессах и теории положительных операторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979, 424 с.
2. Веретенников А. Ю. О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений. — Матем. сб., 1980, т. 111, № 3, с. 434–452.
3. Веретенников А. Ю. Параболические уравнения и стохастические уравнения Ито с коэффициентами, разрывными по времени. — Матем. заметки, 1982, т. 31, № 4, с. 549–557.
4. Веретенников А. Ю. О больших отклонениях диффузионных процессов с измеримыми коэффициентами. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 5, с. 135–146.
5. Звонкин А. К. Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос. — Матем. сб., 1974, т. 93, № 1, с. 129–149.
6. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985, 256 с.
7. Крылов Н. В., Сафонов М. В. Об одном свойстве решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1980, т. 44, № 1, с. 161–175.
8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
9. Мильштейн Г. Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1988.
10. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations. I: Convergence rate of the distribution function. — Probab. Theory Relat. Fields, 1996, v. 104, № 1, p. 43–60.
11. Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III. — Comm. Pure Appl. Math., 1976, v. 29, p. 389–461.
12. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. New York: Springer-Verlag, 1976, 619 p.
13. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
14. Veretennikov A. Yu. On large deviations for approximations of SDEs. — Probab. Theory Relat. Fields (в печати); <http://www.mathpreprints.com/math/Preprint/veretenn/20010825/5/>

Поступила в редакцию
29.XI.2001

© 2002 г.

КУЛИКОВА А. А.*

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ К РАВНОМЕРНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

В работе рассматриваются последовательности случайных векторов в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^s$ ($s \geq 2$): $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, X_n = (X_{n1}, \dots, X_{ns}), 0 \leq X_{nj} \leq 1, j = 1, \dots, s$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anna_q@mail.ru

Величина отклонения распределения случайных векторов X_n от равномерного в кубе $[0, 1]^s$ распределения оценивается в терминах математических ожиданий $\mathbf{E}e^{2\pi i(m, X_n)}$, где m — любой вектор с целочисленными координатами. При достаточно быстром их убывании при $n \rightarrow \infty$ для любой выпуклой области $D \subset [0, 1]^s$ величина $|\mathbf{P}\{X_n \in D\} - \text{vol}_s(D)|$ убывает как некоторая положительная степень дроби $1/n$.

Работа является обобщением статьи [3], в которой предполагалось $s = 1$.

Ключевые слова и фразы: сходимость распределений, равномерное распределение, формула суммирования Пуассона.

1. Обозначения. Будут использованы следующие обозначения. Если $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbf{R}^s$, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_s^2}$; если $t = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbf{R}^s$, то $(t, x) = t_1x_1 + \dots + t_sx_s$; $B(x, \rho)$ — открытый шар в $\mathbf{R}^s$ с центром в x и радиусом ρ ; $\text{vol}_s(A)$ — s -мерный объем (мера Лебега) множества A ; $V_s = \pi^{s/2}/\Gamma(s/2 + 1)$ — объем единичного шара в $\mathbf{R}^s$; $A_{+\delta}$ — множество всех точек, расстояние от которых до A меньше δ ; $A_{-\delta}$ — множество всех точек x таких, что замкнутый шар радиуса δ с центром в x содержится в A ; $\mathbf{Z}^s$ — совокупность всех точек $\mathbf{R}^s$ с целочисленными координатами; $I_A(x)$ — индикатор множества A ($I_A(x) = 1$, $x \in A$, и $I_A(x) = 0$, $x \notin A$); $f(t; X)$ — характеристическая функция случайного вектора $X \in \mathbf{R}^s$; $p(x; X)$ — соответствующая плотность вероятности (если она существует); если z — действительное число, то $[z]$ — его целая часть и $\{z\}$ — дробная часть; для вектора $z = (z_1, \dots, z_s)$ дробная часть $\{z\} = (\{z_1\}, \dots, \{z_s\})$.

Буквы $c_{i,j}$ обозначают положительные константы, индекс i обозначает номер пункта, где вводится данная константа. При необходимости указывается зависимость от тех или иных параметров (например, $c_{i,j}(s)$ и т.п.).

2. Сглаживающее распределение. В работе [2] была дана оценка характеристической функции случайного вектора U , распределение которого сосредоточено в единичном шаре $B(0, 1)$ пространства $\mathbf{R}^s$. Это распределение зависит от параметра $\alpha > 1$, который может быть выбран произвольно. Случайный вектор U определяется как сумма ряда

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sA(\alpha, s)}{2n^\alpha} U_n,$$

где $A(\alpha, s) = 2/(s\zeta(\alpha))$ и $U_1, \dots, U_n, \dots$ — независимые случайные векторы с равномерным распределением в шаре $B(0, 1)$.

Выбор α для наших целей не играет существенной роли, поэтому возьмем $\alpha = 2$.

Неравенство работы [2] для характеристической функции $f(t; U)$ можно записать в виде

$$|f(t; U)| \leq e^{c_{2,1}(\alpha, s)} e^{-c_{2,2}(\alpha, s)|t|^{1/\alpha}},$$

где

$$c_{2,1}(\alpha, s) = \frac{(s/2)^2}{(s/2 + 1)(2\alpha - 1)2^{2\alpha+1}}, \quad c_{2,2}(\alpha, s) = (A(\alpha, s))^{1/\alpha} c_{2,1}(\alpha, s).$$

При $\alpha = 2$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad A(2, s) = \frac{12}{s\pi^2}, \quad c_{2,1}(2, s) = \frac{s^2}{3(s+2)2^6} < \frac{s}{192},$$

$$c_{2,2}(2, s) \geq \frac{\sqrt{3}\sqrt{s}}{3\pi 2^6} \geq \sqrt{s}\sqrt{\gamma}, \quad \text{где } \gamma = 8.245 \cdot 10^{-6}.$$

Этим доказана следующая лемма.

Лемма 1. При целом $s \geq 2$ и $\alpha = 2$

$$|f(t; U)| \leq e^{s/192} e^{-|\gamma s t|^{1/2}}$$

3. Неравенства для разности $\text{vol}_s(D_{\pm\delta}) - \text{vol}_s(D)$. В дальнейшем D обозначает ограниченную выпуклую область в $\mathbf{R}^s$. Как известно, при любом $\delta > 0$ области $D_{-\delta}$ (при условии, что $D_{-\delta}$ непусто) и $D_{+\delta}$ также будут выпуклыми.

Докажем, что имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Пусть R — радиус некоторого шара, содержащего выпуклую область D . Тогда при $0 < \delta \leq R$

$$|\text{vol}_s(D_{\pm\delta}) - \text{vol}_s(D)| \leq c_{3,1}(s, R) \delta,$$

где $c_{3,1}(s, R) = 2^{s+1} \pi^{s/2} R^{s-1} / \Gamma(s/2)$.

Доказательство. Поскольку $D_{-\delta} \subset D \subset D_{+\delta}$, достаточно доказать, что $|\text{vol}_s(D_{+\delta}) - \text{vol}_s(D_{-\delta})| \leq c_{3,1}(s, R) \delta$.

Для любого $d > 0$ рассмотрим функцию

$$g(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq R + \delta, \\ 0, & y \geq R + \delta + d, \\ g_1(y), & R + \delta < y < R + \delta + d, \end{cases}$$

где $g_1(y)$ — любая убывающая на $[R + \delta, R + \delta + d]$ функция такая, что $0 \leq g_1(y) \leq 1$ и $g(y)$ дифференцируема на $[0, \infty)$, например,

$$g_1(y) = -2 \left(\frac{R + \delta + d - y}{d} \right)^3 + 3 \left(\frac{R + \delta + d - y}{d} \right)^2.$$

Положим

$$\begin{aligned} \beta(d) &= \int_0^\infty |g'(y)| y^{s-1} dy = - \int_{R+\delta}^{R+\delta+d} g'_1(y) y^{s-1} dy \\ &= \int_{R+\delta}^{R+\delta+d} g_1(y) (s-1) y^{s-2} dy - g_1(y) y^{s-1} \Big|_{R+\delta}^{R+\delta+d} \\ &\leq d(s-1)(R + \delta + d)^{s-2} + (R + \delta)^{s-1}. \end{aligned}$$

Используя [1, теорема 3.1], получаем

$$|\text{vol}_s(D_{+\delta}) - \text{vol}_s(D_{-\delta})| = \int_{D_{+\delta} \setminus D_{-\delta}} g(|x|) dx \leq 2\delta \frac{2\pi^{s/2} \beta(d)}{\Gamma(s/2)}.$$

Переходя к пределу при d , стремящемся к нулю, получаем, что

$$\limsup_{d \rightarrow 0} \beta(d) \leq (R + \delta)^{s-1} \leq 2^{s-1} R^{s-1}$$

и

$$|\text{vol}_s(D_{+\delta}) - \text{vol}_s(D_{-\delta})| \leq c_{3,1}(s, R) \delta.$$

Лемма 2 доказана.

4. Неравенства для $\mathbf{P}\{X \in D\}$. Пусть $V(D)$ и U — независимые случайные векторы, $V(D)$ имеет равномерное распределение в D , а U имеет распределение, указанное в п. 2 (с $\alpha = 2$). Пусть $\delta > 0$ и $Z(D; \delta) = V(D) + \delta U$. Тогда характеристическая функция $|f(t; Z(D; \delta))| \leq |f(t\delta; U)|$, и так как по лемме 1 при любом целом $r > 0$

$$\int_{\mathbf{R}^s} |t|^r |f(t\delta; U)| dt < \infty,$$

то соответствующая плотность $p(x; Z(D; \delta))$ (так же как и $p(x; \delta U)$) бесконечно дифференцируема.

Для любого $\delta > 0$ и любой выпуклой области D определим функцию $H(x; D; \delta) = \text{vol}_s(D) p(x; \{Z(D; \delta)\})$.

Докажем, что выполняется следующая лемма.

Лемма 3. Если $D \subset [0, 1]^s$ и $\delta < \text{vol}_s(D) / c_{3,1}(s, R)$, то

$$\mathbf{E}H(X; D_{-\delta}; \delta) \leq \mathbf{P}\{X \in D\} \leq \mathbf{E}H(X; D_{+\delta}; \delta).$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $\text{vol}_s(D_{-\delta}) > 0$, а потому область $D_{-\delta}$ непуста и функция $H(X; D_{-\delta}; \delta)$ корректно определена.

Докажем, что при $x \notin D$ справедливо равенство $H(x; D_{-\delta}; \delta) = 0$.

Так как п.н. $|U| < 1$, то $Z(D_{-\delta}; \delta) = V(D_{-\delta}) + \delta U$ с вероятностью 1 принимает значения в $D \subset [0, 1]^s$. Следовательно, $\{Z(D_{-\delta}; \delta)\} = Z(D_{-\delta}; \delta)$.

Учитывая, что при $x \notin D$, $t \in B(x, \delta)$ верно $p(t; V(D_{-\delta})) = 0$, имеем по формуле свертки:

$$\begin{aligned} H(x; D_{-\delta}; \delta) &= \text{vol}_s(D_{-\delta}) p(x; Z(D_{-\delta}; \delta)) = \text{vol}_s(D_{-\delta}) \int_{\mathbf{R}^s} p(t; V(D_{-\delta})) p(x - t; \delta U) dt \\ &= \text{vol}_s(D_{-\delta}) \int_{B(x, \delta)} p(t; V(D_{-\delta})) p(x - t; \delta U) dt = 0. \end{aligned}$$

Докажем, что при $x \in D$ справедливо неравенство $H(x; D_{-\delta}; \delta) \leq 1$.

Учитывая, что $p(t; V(D_{-\delta})) \leq 1/\text{vol}_s(D_{-\delta})$, имеем:

$$\begin{aligned} H(x; D_{-\delta}; \delta) &= \text{vol}_s(D_{-\delta}) p(x; Z(D_{-\delta}; \delta)) = \text{vol}_s(D_{-\delta}) \int_{\mathbf{R}^s} p(t; V(D_{-\delta})) p(x - t; \delta U) dt \\ &= \text{vol}_s(D_{-\delta}) \int_{B(x, \delta)} p(t; V(D_{-\delta})) p(x - t; \delta U) dt \\ &\leq \text{vol}_s(D_{-\delta}) \int_{B(x, \delta)} \frac{p(x - t; \delta U) dt}{\text{vol}_s(D_{-\delta})} = 1. \end{aligned}$$

При всех $x \in [0, 1]^s$ справедливо неравенство $H(x; D_{+\delta}; \delta) \geq 0$.

Докажем, что $H(x; D_{+\delta}; \delta) \geq 1$ при $x \in D$.

Учитывая, что для $x \in [0, 1]^s$ выполнено $p(x; \{Z(D_{+\delta}; \delta)\}) \geq p(x; Z(D_{+\delta}; \delta))$ и что для $x \in D$, $t \in B(x, \delta)$ верно $p(t; V(D_{+\delta})) = 1/\text{vol}_s(D_{+\delta})$, имеем:

$$\begin{aligned} H(x; D_{+\delta}; \delta) &\geq \text{vol}_s(D_{+\delta}) p(x; Z(D_{+\delta}; \delta)) = \text{vol}_s(D_{+\delta}) \int_{\mathbf{R}^s} p(t; V(D_{+\delta})) p(x - t; \delta U) dt \\ &= \text{vol}_s(D_{+\delta}) \int_{B(x, \delta)} p(t; V(D_{+\delta})) p(x - t; \delta U) dt \\ &= \text{vol}_s(D_{+\delta}) \int_{B(x, \delta)} \frac{p(x - t; \delta U) dt}{\text{vol}_s(D_{+\delta})} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $x \in [0, 1]^s$

$$H(x; D_{-\delta}; \delta) \leq I_D(x) \leq H(x; D_{+\delta}; \delta),$$

и, следовательно, $\mathbf{E}H(X; D_{-\delta}; \delta) \leq \mathbf{P}\{X \in D\} \leq \mathbf{E}H(X; D_{+\delta}; \delta)$. Лемма 3 доказана.

5. Оценка одной суммы по $m \in \mathbf{Z}^s$. Оценим сумму

$$S(w, \theta) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} |m|^w e^{-(\theta|m|)^{1/2}},$$

где $w \geq 0$, $0 < \theta \leq 2/(5\sqrt{s})$. В конце концов мы придем к интегралу типа

$$\int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-\rho y^\mu} dy = \frac{1}{\mu} \rho^{-\alpha/\mu} \Gamma\left(\frac{\alpha}{\mu}\right), \quad \text{где } \mu, \alpha \text{ и } \rho > 0.$$

Обозначим $r_0 = \lfloor 2\sqrt{s} \rfloor$ и разобьем сумму $S(w, \theta)$ на части:

$$S_0(w, \theta) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0, |m| \leq r_0} |m|^w e^{-(\theta|m|)^{1/2}}$$

и при $r \geq r_0 + 1$

$$S_r(w, \theta) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, r \leq |m| < r+1} |m|^w e^{-(\theta|m|)^{1/2}}.$$

Имеем при $r \geq r_0 + 1$

$$S_r(w, \theta) \leq e^{-(\theta r)^{1/2}} (r+1)^w \# \{m \in \mathbf{Z}^s : r \leq |m| < r+1\}.$$

Последний сомножитель в правой части не превосходит объема шарового слоя $\{x: r - \sqrt{s}/2 \leq |x| \leq r+1 + \sqrt{s}/2\}$, т.е. величины

$$\begin{aligned} & V_s \left((r+1 + 2^{-1}\sqrt{s})^s - (r - 2^{-1}\sqrt{s})^s \right) \\ &= V_s \left(\sum_{j=0}^s C_s^j r^j (1 + 2^{-1}\sqrt{s})^{s-j} - \sum_{j=0}^s C_s^j r^j (-2^{-1}\sqrt{s})^{s-j} \right) \\ &= V_s r^{s-1} \sum_{j=0}^{s-1} C_s^j \left((1 + 2^{-1}\sqrt{s})^{s-j} - (-2^{-1}\sqrt{s})^{s-j} \right) r^{j-s+1} \\ &\leq V_s r^{s-1} \sum_{j=0}^s C_s^j \left((1 + 2^{-1}\sqrt{s})^{s-j} - (-2^{-1}\sqrt{s})^{s-j} \right) \\ &= V_s \left((2 + 2^{-1}\sqrt{s})^s - (1 - 2^{-1}\sqrt{s})^s \right) r^{s-1} = c_{5,1}(s) r^{s-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{r=r_0+1}^{\infty} S_r(w, \theta) \leq c_{5,1}(s) \sum_{r=r_0+1}^{\infty} (r+1)^w r^{s-1} e^{-(\theta r)^{1/2}} \leq c_{5,2}(w, s) \sum_{r=r_0+1}^{\infty} r^{w+s-1} e^{-(\theta r)^{1/2}},$$

где $c_{5,2}(w, s) = c_{5,1}(w) e^{w/(2\sqrt{s})}$.

При $y \geq 0$ функция $y^{w+s-1} e^{-(\theta y)^{1/2}}$ достигает единственного максимума, равного

$$(4(w+s-1)^2 \theta^{-1})^{w+s-1} e^{-2(w+s-1)} = c_{5,3}(w, s) \theta^{-w-s+1},$$

в точке $y_1 = 4(w+s-1)^2 \theta^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{r=r_0+1}^{\infty} r^{w+s-1} e^{-(\theta r)^{1/2}} &\leq \int_0^{\infty} y^{w+s-1} e^{-\theta^{1/2} y^{1/2}} dy + 2c_{5,3}(w, s) \theta^{-w-s+1} \\ &= 2\Gamma(2(w+s)) \theta^{-w-s} + 2c_{5,3}(w, s) \theta^{-w-s+1} \leq c_{5,4}(w, s) \theta^{-w-s}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{r=r_0+1}^{\infty} S_r(w, \theta) \leq c_{5,2}(w, s) c_{5,4}(w, s) \theta^{-w-s}.$$

Оценим $S_0(w, \theta)$:

$$\begin{aligned} S_0(w, \theta) &\leq \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, |m| \leq r_0} |m|^w \leq r_0^w \# \{m \in \mathbf{Z}^s : |m| \leq r_0\} \leq r_0^w V_s(r_0 + 2^{-1}\sqrt{s})^s \\ &\leq V_s(r_0 + 2^{-1}\sqrt{s})^{w+s} \leq V_s(5 \cdot 2^{-1}\sqrt{s})^{w+s} \leq V_s \theta^{-w-s}, \end{aligned}$$

так как по предположению $\theta \leq 2/(5\sqrt{s})$.

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 4. При $w > 0$ и $0 < \theta \leq 2/(5\sqrt{s})$

$$S(w, \theta) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} |m|^w e^{-(\theta |m|)^{1/2}} \leq (c_{5,2}(w, s) c_{5,4}(w, s) + V_s) \theta^{-w-s} = c_{5,5}(w, s) \theta^{-w-s}.$$

6. О характеристической функции $f(t; V(D))$. Равномерно распределенный в D случайный вектор $V(D)$ имеет плотность

$$p(x; V(D)) = \begin{cases} \frac{1}{\text{vol}_s(D)}, & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$$

и $f(t; V(D))$ отличается лишь множителем $1/\text{vol}_s(D)$ от преобразования Фурье индикатора $I_D(x)$, т.е. от интеграла $F(t; D) = \int_D e^{i(t,x)} dx$. По теореме Римана–Лебега $F(t; D) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Скорость убывания $F(t; D)$ зависит от свойств области D . Имеет место следующая общая теорема.

Теорема 1. Пусть D — собственная выпуклая область в $\mathbf{R}^s$ и R — радиус некоторого шара, содержащего область D . Тогда для любого $t \neq 0$ выполнено неравенство

$$|f(t; V(D))| \leq \frac{V_{s-1} R^{s-1} \pi}{\text{vol}_s(D) |t|}.$$

Доказательство теоремы использует факты геометрии выпуклых областей (см. [4]).

При $0 < \delta \leq \min\{\text{vol}_s(D)/(2c_{3,1}(s, R)), R\}$ по лемме 2 получаем $\text{vol}_s(D_{-\delta}) \geq \text{vol}_s(D)/2$, а значит,

$$|f(t; V(D_{-\delta}))| \leq \frac{2V_{s-1} R^{s-1} \pi}{\text{vol}_s(D) |t|}.$$

Так как $\text{vol}_s(D_{+\delta}) > \text{vol}_s(D)$ и $D_{+\delta}$ содержится в некотором шаре радиуса $R + \delta \leq 2R$, то

$$|f(t; V(D_{+\delta}))| \leq \frac{2^{s-1} V_{s-1} R^{s-1} \pi}{\text{vol}_s(D) |t|}.$$

Таким образом, нами доказано следующее следствие.

Следствие 1. Для выпуклой области D

$$|f(t; V(D_{\pm\delta}))| \leq \frac{2^{s-1} V_{s-1} R^{s-1} \pi}{\text{vol}_s(D) |t|} = \frac{c_{6,1}(s, R)}{\text{vol}_s(D) |t|}$$

при $0 < \delta \leq c_{6,2}(s, R) \text{vol}_s(D)$, $c_{6,2}(s, R) = \min\{1/(2c_{3,1}(s, R)), R^{1-s}/V_s\}$.

7. Одна теорема о сходимости к равномерному распределению. Теперь, используя результаты предыдущих пунктов, мы имеем возможность доказать теорему о сходимости к равномерному распределению в кубе $[0, 1]^s$, которая является обобщением результата работы [3] на многомерный случай.

Теорема 2. Пусть последовательность случайных векторов в евклидовом пространстве $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, $X_n = (X_{n1}, \dots, X_{ns})$, $0 \leq X_{nj} \leq 1$, для некоторого $l > 1$ удовлетворяет условию $|\mathbf{E} e^{2\pi i(m, X_n)}| \leq K|t|^l/n$ при любом $t \in \mathbf{Z}^s \setminus \{0\}$, и пусть $D \subset [0, 1]^s$ — выпуклая область. Тогда

$$|\mathbf{P}\{X_n \in D\} - \text{vol}_s(D)| \leq c_{7,1}(s, l, K) n^{-1/(l+s)}$$

при $n \geq (c_{7,2}(s) \text{vol}_s(D))^{-(l+s)}$.

Доказательство. Полагая $R = 2^{-1}\sqrt{s}$ и применяя формулу суммирования Пуассона при $\delta < \text{vol}_s(D)/c_{3,1}(s, 2^{-1}\sqrt{s})$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}H(X; D_{\pm\delta}; \delta) &= \text{vol}_s(D_{\pm\delta}) \mathbf{E}p(X; \{Z(D_{\pm\delta}; \delta)\}) \\ &= \text{vol}_s(D_{\pm\delta}) \sum_{m \in \mathbf{Z}^s} \mathbf{E} e^{-2\pi i(m, X)} f(2\pi m; V(D_{\pm\delta})) f(2\pi m\delta; U) \\ &= \text{vol}_s(D) + (\text{vol}_s(D_{\pm\delta}) - \text{vol}_s(D)) \\ &\quad + \text{vol}_s(D) \left(\sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} \mathbf{E} e^{-2\pi i(m, X)} f(2\pi m; V(D_{\pm\delta})) f(2\pi m\delta; U) \right) \\ &\quad + (\text{vol}_s(D_{\pm\delta}) - \text{vol}_s(D)) \left(\sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} \mathbf{E} e^{-2\pi i(m, X)} f(2\pi m; V(D_{\pm\delta})) f(2\pi m\delta; U) \right). \end{aligned}$$

По лемме 3

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{P}\{X_n \in D\} - \text{vol}_s(D)| \\
 & \leq \max_{\Delta \in \{-\delta, \delta\}} \left(|\text{vol}_s(D_\Delta) - \text{vol}_s(D)| + \text{vol}_s(D) \right. \\
 & \quad \times \left| \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} \mathbf{E} e^{-2\pi i(m, X_n)} f(2\pi m; V(D_\Delta)) f(2\pi m\delta; U) \right| + |\text{vol}_s(D_\Delta) - \text{vol}_s(D)| \\
 & \quad \times \left| \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} \mathbf{E} e^{-2\pi i(m, X_n)} f(2\pi m; V(D_\Delta)) f(2\pi m\delta; U) \right| \Bigg).
 \end{aligned}$$

По условию теоремы, леммам 1, 4 и следствию 1 при $0 < \delta \leq c_{7,2}(s) \text{vol}_s(D)$, где $c_{7,2}(s) = \min\{c_{6,2}(2^{-1}\sqrt{s}, s), 2^{-1}\sqrt{s}, 1/(5\gamma\pi s\sqrt{s})\}$, получаем

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} \mathbf{E} e^{-2\pi i(m, X_n)} f(2\pi m; V(D_{\pm\delta})) f(2\pi m\delta; U) \right| \\
 & \leq \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} \frac{K|m|^l}{n} \frac{c_{6,1}(s, 2^{-1}\sqrt{s}) e^{s/192} e^{-|2\pi\gamma s\delta m|^2/2}}{\text{vol}_s(D)|2\pi m|} \\
 & \leq \frac{K e^{s/192} c_{6,1}(s, 2^{-1}\sqrt{s})}{2\pi n \text{vol}_s(D)} S(l-1, 2\pi\gamma s\delta) \\
 & \leq \frac{K e^{s/192} c_{6,1}(s, 2^{-1}\sqrt{s}) c_{5,5}(l-1, s)}{2\pi n \text{vol}_s(D) (2\pi\gamma s\delta)^{l+s-1}} = \frac{K c_{7,3}(s, l)}{\text{vol}_s(D) n \delta^{l+s-1}}.
 \end{aligned}$$

По лемме 2 получаем

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{P}\{X_n \in D\} - \text{vol}_s(D)| & \leq c_{3,1}(s, 2^{-1}\sqrt{s}) \delta + \text{vol}_s(D) \frac{K c_{7,3}(s, l)}{\text{vol}_s(D)} \frac{1}{n \delta^{l+s-1}} \\
 & \quad + c_{3,1}(s, 2^{-1}\sqrt{s}) \delta \frac{K c_{7,3}(s, l)}{\text{vol}_s(D)} \frac{1}{n \delta^{l+s-1}}.
 \end{aligned}$$

Полагая $\delta = n^{-1/(l+s)}$ при $n > (c_{7,2}(s) \text{vol}_s(D))^{-(l+s)}$, получаем

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{P}\{X_n \in D\} - \text{vol}_s(D)| \leq n^{-1/(l+s)} \\
 & \quad \times \left(c_{3,1}(s, 2^{-1}\sqrt{s}) + K c_{7,3}(s, l) + c_{3,1}(s, 2^{-1}\sqrt{s}) c_{7,2}(s) \text{vol}_s(D) \frac{K c_{7,3}(s, l)}{\text{vol}_s(D)} \right) \\
 & \leq c_{7,1}(s, l, K) n^{-1/(l+s)}.
 \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{D}$ — класс выпуклых областей в единичном кубе. Тогда в условиях теоремы имеет место оценка скорости сходимости к равномерному распределению

$$\sup_{D \in \mathcal{D}} |\mathbf{P}\{X_n \in D\} - \text{vol}_s(D)| = O\left(n^{-1/(l+s)}\right).$$

Постоянный множитель в $O(n^{-1/(l+s)})$ зависит от s, K и l и может быть выписан явно.

Доказательство. Пусть $n > c_{7,2}(s)^{-(l+s)}$. Рассмотрим класс областей

$$\mathcal{D}_1(n) = \left\{ D \in \mathcal{D}: \text{vol}_s(D) \geq \frac{n^{-1/(l+s)}}{c_{7,2}(s)} \right\},$$

который непуст, так как открытый куб $(0, 1)^s \in \mathcal{D}_1(n)$. По теореме 2

$$\sup_{D \in \mathcal{D}_1(n)} |\mathbf{P}\{X_n \in D\} - \text{vol}_s(D)| \leq c_{7,1}(s, l, K) n^{-1/(l+s)}.$$

Рассмотрим теперь дополнительный класс

$$\mathcal{D}_2(n) = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1(n) = \left\{ D \in \mathcal{D}: \text{vol}_s(D) < \frac{n^{-1/(l+s)}}{c_{7,2}(s)} \right\}.$$

Для каждой $D \in \mathcal{D}_2(n)$ выберем выпуклую область D' такую, что $D \subset D' \subset [0, 1]^s$ и $\text{vol}_s(D') = n^{-1/(l+s)}/c_{7,2}(s)$. Тогда $D' \in \mathcal{D}_1(n)$, и по доказанному

$$\begin{aligned} \sup_{D \in \mathcal{D}_2(n)} |\mathbf{P}\{X_n \in D\} - \text{vol}_s(D)| &\leq \sup_{D \in \mathcal{D}_2(n)} (\mathbf{P}\{X_n \in D\} + \text{vol}_s(D)) \\ &\leq \sup_{D \in \mathcal{D}_2(n)} (\mathbf{P}\{X_n \in D'\} + \text{vol}_s(D)) \\ &\leq \sup_{D \in \mathcal{D}_2(n)} (|\mathbf{P}\{X_n \in D'\} - \text{vol}_s(D')| + \text{vol}_s(D') + \text{vol}_s(D)) \\ &\leq \sup_{D \in \mathcal{D}_1(n)} (|\mathbf{P}\{X_n \in D\} - \text{vol}_s(D)|) + \frac{2n^{-1/(l+s)}}{c_{7,2}(s)} \\ &\leq \left(c_{7,1}(s, l, K) + \frac{2}{c_{7,2}(s)} \right) n^{-1/(l+s)}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{D}_1(n) \cup \mathcal{D}_2(n) = \mathcal{D}$, доказательство завершено.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. В. Прохорову за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.
2. Гамкрелидзе Н. Г. О неравенстве для многомерной характеристической функции. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 3, с. 602–604.
3. Кузнецова А. Я., Куликова А. А. Одна предельная теорема о сходимости к равномерному распределению. — Вестник Моск. ун-та, сер. вычисл. матем. и кибернет., 2002, № 3, с. 39–45.
4. Куликова А. А., Прохоров Ю. В. Равномерные распределения на выпуклых множествах: неравенство для характеристических функций. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 787–789.

Поступила в редакцию
22.VII.2002

© 2002 г.

КУЛИКОВА А. А.*, ПРОХОРОВ Ю. В.**

РАВНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ: НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Доказано (теорема 1) неравенство для характеристической функции равномерного распределения на компактном выпуклом теле $D \subset \mathbf{R}^s$.

Ключевые слова и фразы: равномерное распределение, характеристическая функция.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anna_q@mail.ru

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия.