Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Куликова, Ю. В. Прохоров, Равномерные распределения на выпуклых множествах: неравенство для характеристических функций, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 4, 787–789

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp3783>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:28:37

Рассмотрим теперь дополнительный класс

$$\mathcal{D}_2(n) = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1(n) = \left\{ D \in \mathcal{D}: \text{vol}_s(D) < \frac{n^{-1/(l+s)}}{c_{7,2}(s)} \right\}.$$

Для каждой $D \in \mathcal{D}_2(n)$ выберем выпуклую область D' такую, что $D \subset D' \subset [0, 1]^s$ и $\text{vol}_s(D') = n^{-1/(l+s)}/c_{7,2}(s)$. Тогда $D' \in \mathcal{D}_1(n)$, и по доказанному

$$\begin{aligned} \sup_{D \in \mathcal{D}_2(n)} |\mathbf{P}\{X_n \in D\} - \text{vol}_s(D)| &\leq \sup_{D \in \mathcal{D}_2(n)} (\mathbf{P}\{X_n \in D\} + \text{vol}_s(D)) \\ &\leq \sup_{D \in \mathcal{D}_2(n)} (\mathbf{P}\{X_n \in D'\} + \text{vol}_s(D)) \\ &\leq \sup_{D \in \mathcal{D}_2(n)} (|\mathbf{P}\{X_n \in D'\} - \text{vol}_s(D')| + \text{vol}_s(D') + \text{vol}_s(D)) \\ &\leq \sup_{D \in \mathcal{D}_1(n)} (|\mathbf{P}\{X_n \in D\} - \text{vol}_s(D)|) + \frac{2n^{-1/(l+s)}}{c_{7,2}(s)} \\ &\leq \left(c_{7,1}(s, l, K) + \frac{2}{c_{7,2}(s)} \right) n^{-1/(l+s)}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{D}_1(n) \cup \mathcal{D}_2(n) = \mathcal{D}$, доказательство завершено.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. В. Прохорову за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.
2. Гамкрелидзе Н. Г. О неравенстве для многомерной характеристической функции. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 3, с. 602–604.
3. Кузнецова А. Я., Куликова А. А. Одна предельная теорема о сходимости к равномерному распределению. — Вестник Моск. ун-та, сер. вычисл. матем. и кибернет., 2002, № 3, с. 39–45.
4. Куликова А. А., Прохоров Ю. В. Равномерные распределения на выпуклых множествах: неравенство для характеристических функций. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 787–789.

Поступила в редакцию
22.VII.2002

© 2002 г.

КУЛИКОВА А. А.*, ПРОХОРОВ Ю. В.**

РАВНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ: НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Доказано (теорема 1) неравенство для характеристической функции равномерного распределения на компактном выпуклом теле $D \subset \mathbf{R}^s$.

Ключевые слова и фразы: равномерное распределение, характеристическая функция.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anna_q@mail.ru

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия.

1. Обозначения. Пусть $x = (x_1, \dots, x_s)$, $t = (t_1, \dots, t_s)$ — точки s -мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^s$ ($s \geq 2$). Тогда $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_s^2}$, $(t, x) = t_1 x_1 + \dots + t_s x_s$; $B(x, \rho)$ — открытый шар в $\mathbf{R}^s$ с центром в x и радиусом ρ ; $\text{vol}_s(A)$ — s -мерный объем (меры Лебега) множества $A \subset \mathbf{R}^s$; $V_s = \pi^{s/2} / \Gamma(s/2 + 1)$ — объем единичного шара в $\mathbf{R}^s$; $f(t; X)$ — характеристическая функция случайного вектора $X \in \mathbf{R}^s$; $p(x; X)$ — соответствующая плотность вероятности (если она существует).

Всюду ниже D обозначает компактное выпуклое множество в $\mathbf{R}^s$, имеющее внутренние точки (т.е. компактное выпуклое тело, по терминологии [2]), а $V(D)$ обозначает случайный вектор с равномерным распределением в D , т.е.

$$p(x; V(D)) = \begin{cases} \frac{1}{\text{vol}_s(D)}, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Если $Z \in \mathbf{R}^1$ — случайная величина, то ее характеристическую функцию будем обозначать $f(\tau; Z)$, $-\infty < \tau < \infty$, а ее плотность — $p(z; Z)$. Функцию концентрации Z обозначим

$$Q(l; Z) = \sup_{z \in \mathbf{R}^1} \mathbf{P}\{z \leq Z \leq z + l\} \quad (l \geq 0).$$

2. Одновершинные распределения. Напомним, что распределение вероятностей случайной величины Z называют *одновершинным* (или *унимодальным*), если существует такое a , что при $x < a$ функция распределения $F(x; Z)$ выпукла, а при $x > a$ функция $F(x; Z)$ вогнута.

З а м е ч а н и е. Пусть $[a, b]$ — некоторый отрезок на числовой прямой, функция $R(z)$ такова, что

- $R(z) = 0$ при $z < a$ и $z > b$,
- $R(z)$ непрерывна на $[a, b]$,
- $R(z)$ положительна и вогнута на (a, b) .

Тогда при любом целом $l \geq 1$ функция $R^l(z) / \int_{-\infty}^{\infty} R^l(u) du$ будет плотностью одновершинного распределения вероятностей.

Известно следующее утверждение (см. [1]).

Лемма 1. Если $F(x; Z)$ — одновершинная функция распределения, то

$$|f(\tau; Z)| \leq Q\left(\frac{\pi}{|\tau|}; Z\right).$$

3. Некоторые свойства компактных выпуклых тел в $\mathbf{R}^s$. Симметризация Шварца. Пусть D — компактное выпуклое тело в $\mathbf{R}^s$. Не ограничивая общности, будем считать, что начало координат O лежит внутри D . Пусть дан единичный вектор u («направление»). Обозначим G_u прямую в $\mathbf{R}^s$, проходящую через O в направлении u (т.е. совокупность точек вида zu , $-\infty < z < \infty$). Рассмотрим семейство $(s-1)$ -мерных гиперплоскостей, ортогональных G_u . Каждая такая гиперплоскость однозначно определяется точкой zu ее пересечения с G_u . Поэтому мы будем ее обозначать L_z .

Пусть $[a_u, b_u] \subset \mathbf{R}^1$ наибольший отрезок, такой, что $L_z \cap D \neq \emptyset$ при всех $z \in [a_u, b_u]$.

Лемма 2. Функция $\text{vol}_{s-1}(L_z \cap D)$ непрерывно зависит от z при $a_u \leq z \leq b_u$ и при $a_u < z < b_u$ эта функция положительна.

Доказательство см. в [2], примечание на с. 230 (перед замечанием 19.1).

Процедура, называемая «симметризацией Шварца», приводит к следующему утверждению.

Лемма 3. Для заданных D и u существует выпуклое тело вращения SG_u с осью вращения G_u , такое, что при всех z

$$\text{vol}_{s-1}(L_z \cap SG_u) = \text{vol}_{s-1}(L_z \cap D).$$

Доказательство см. в [2], теорема 19.1.

Следствие. При $a_u < z < b_u$ радиус $R(z)$ сечения (шара!) тела S_{G_u} гиперплоскостью L_z будет вогнутой функцией z . $(s-1)$ -мерный объем этого сечения равен $V_{s-1}R^{s-1}(z)$.

Для доказательства достаточно рассмотреть сечения тела S_{G_u} любой двумерной плоскостью, содержащей ось вращения G_u .

4. Равномерные распределения на компактных выпуклых телах. Характеристическую функцию случайного вектора $V(D)$ можно представить в виде

$$\mathbf{E}e^{i(t, V(D))} = \mathbf{E}e^{i\tau(u, V(D))} = \mathbf{E}e^{i\tau Z(u; D)},$$

где $\tau = |t|$, $t = \tau u$ (u — как и раньше, единичный вектор в $\mathbf{R}^s$, определяющий некоторое направление).

Функцию концентрации случайной величины $Z(u; D)$ легко оценить. Пусть R — радиус какого-либо s -мерного шара $B(y, R)$, содержащего D . Тогда

$$\text{vol}_s(x \in D: z \leq (x, u) \leq z + l) \leq \text{vol}_s(x \in B(y, R): z \leq (x, u) \leq z + l) \leq lV_{s-1}R^{s-1}.$$

Поэтому

$$Q(l; Z(u; D)) \leq \frac{1}{\text{vol}_s(D)} lV_{s-1}R^{s-1}.$$

Докажем теперь что верна следующая лемма.

Лемма 4. Распределение вероятностей случайной величины $Z(u; D)$ одновершинно.

Доказательство. Плотность

$$p(z; Z(u; D)) = \frac{1}{\text{vol}_s(D)} \text{vol}_{s-1}(L_z \cap D) = \frac{1}{\text{vol}_s(D)} \text{vol}_{s-1}(L_z \cap S_{G_u}).$$

Теперь одновершинность распределения вытекает из следствия 1 леммы 3.

Из лемм 1 и 4 получаем основной результат этой заметки.

Теорема 1. Пусть случайный вектор $V(D)$ имеет равномерное распределение в компактном выпуклом теле $D \subset \mathbf{R}^s$. Тогда его характеристическая функция удовлетворяет неравенству

$$|f(t; V(D))| \leq \frac{\pi}{|t|} \frac{1}{\text{vol}_s(D)} V_{s-1}R^{s-1},$$

где R — радиус шара в $\mathbf{R}^s$, содержащего D .

Это утверждение было сформулировано (и использовано) в [3].

Авторы выражают благодарность академику А. В. Погорелову за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ушаков Н. Г. Некоторые неравенства для характеристических функций одновершинных распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 26, в. 3, с. 606–609.
2. Лейтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985, 335 с.
3. Куликова А. А. Оценка скорости сходимости распределений вероятностей к равномерному распределению. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 780–787.

Поступила в редакцию
24.X.2002